Electrodynamics and electrochemistry of inhomogeneous(Laminated, Angular) structures

N.Grinchik, V. Lazuk

Рассмотрим прохождение постоянного тока через плоский конденсатор, заполненный двумя диэлектрическими материалами с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, и проводимостями λ_1 и λ_2. К обкладкам конденсатора приложено постоянное напряжение *U*, общее сопротивление конденсатора *R* (рис. 1). Требуется вычислить наведенный электрический поверхностный заряд, обусловленный прохождением тока.

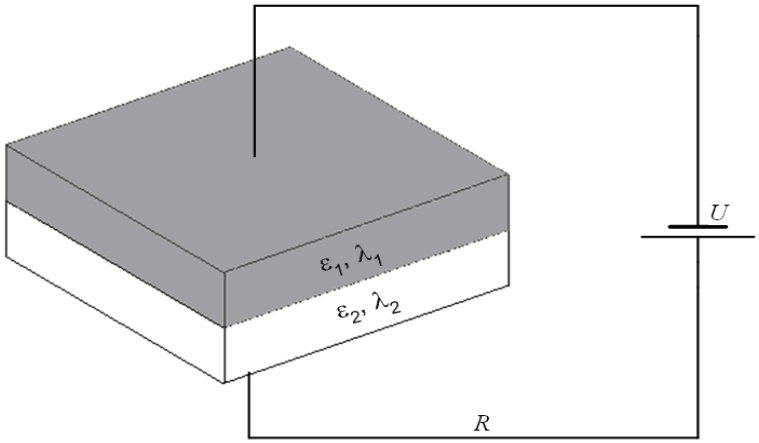


Рис. 1. Диэлектрические среды внутри плоского конденсатора

Из закона сохранения электрических зарядов следует постоянство потока в контуре, поэтому выполняется уравнение

$$\lambda_1 E_{n_1} = \lambda_2 E_{n_2} = U/(RS), \qquad (1)$$

где E_{n_1} **и** E_{n_2} **– нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля.**

В электрическом поле на границе раздела диэлектриков нормальные составляющие вектора электрической индукции испытывают скачок, равный величине наведенного поверхностного заряда σ:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{n_2} = \sigma. \qquad (2)$$

Из решения системы уравнений (1), (2) получим выражение для σ

$$\sigma = (U/RS)\varepsilon_0 [(\varepsilon_1/\lambda_1) - (\varepsilon_2/\lambda_2)]. \qquad (3)$$

Как следует из (3), заряд σ определяется величиной тока, а также множителем, учитывающим свойства среды. Если

$$(\varepsilon_1/\lambda_1) - (\varepsilon_2/\lambda_2) = 0, \qquad (4)$$

то заряд σ не возникает.

При исследовании электрического поля, взаимодействующего с материальной средой, используются уравнения Максвелла (1857 г.)

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \nabla \times \vec{\mathbf{H}}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \tag{5}$$

$$-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}, \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0, \tag{6}$$

где При этом на поверхности раздела *S* система уравнений дополняется граничными условиями

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \lambda \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \vec{\mathbf{B}} = \mu\mu_0 \vec{\mathbf{H}}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}. \tag{7}$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma, \tag{8}$$

$$E_{\tau_1} - E_{\tau_2} = 0, \qquad \boldsymbol{H}_{\tau_1} - \boldsymbol{H}_{\tau_2} = \left[\mathbf{i}_\tau \mathbf{n}\right] \tag{9}$$

$$B_{n_1} - B_{n_2} = 0, \tag{10}$$

Индексы *n* и τ обозначают нормальные и касательные составляющие векторов к поверхности *S*, а индексы 1 и 2 – смежные среды с различными электрофизическими свойствами. Под τ понимаем любое направление, касательное к поверхности разрыва.

Покажем, что σ можно вычислять из феноменологических макроскопических уравнений электромагнитного поля Максвелла и закона сохранения электрического заряда, учитывающего специфику границы раздела смежных сред.

Физико-математическая модель. Сформулируем физико-математическую модель распространения электромагнитного поля в слоистой среде. Умножим левую и правую части уравнения для полного тока (5) на μ и продифференцируем его по времени; действуем оператором *rot* на левую и правую части первого уравнения (6) и, полагая μ = const, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{\text{полн}}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{\mu}grad\left(div\mathbf{E}\right). \qquad \textbf{(11)}$$

В декартовых координатах (11) будет иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{\text{полн.}x}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 E_{\text{x}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{\text{x}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{\text{x}}}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right), \qquad \textbf{(12)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{\text{полн.}y}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 E_{\text{y}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{\text{y}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{\text{y}}}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right), \qquad \textbf{(13)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{\text{полн.}z}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 E_{\text{z}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{\text{z}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{\text{z}}}{\partial z^2}\right) - -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right). \qquad \textbf{(14)}$$

На поверхности раздела справедливо также соотношение

$$divi + I_{qx_1} - I_{qx_2} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}. \qquad \textbf{(15)}$$

Условия (7)–(10) запишем в декартовой системе координат

$$D_{x_1} - D_{x_2} = \sigma, \qquad \textbf{(16)}$$

$$E_{y_1} - E_{y_2} = 0, \qquad \textbf{(17)}$$

$$E_{z_1} - E_{z_2} = 0, \qquad \textbf{(18)}$$

$$E_{z_1} - E_{z_2} = 0, \qquad \textbf{(19)}$$

$$H_{y_1} - H_{y_2} = i_z, \;\; H_{z_1} - H_{z_2} = i_y, \qquad \textbf{(20)}$$

(21)

i_τ = j + k – плотность поверхностного тока, при этом координата *x* направлена по нормали к границе раздела. Под плотностью i_y, i_z поверхностных токов понимаем количество электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности, по которой течет ток, и перпендикулярного направлению тока.

Порядок системы дифференциальных уравнений (12)–(14) равен 18. Поэтому на границе раздела *S* необходимо, вообще говоря, задать 9 граничных условий. Кроме того, на этой границе должны выполняться еще три условия (16), (20), (21), содержащие неизвестные (до решения) величины. Следовательно, общее число условий сопряжения на границе *S* должно равняться 12 для корректного решения задачи.

Дифференцируя выражение (16) по времени и учитывая соотношение (15), на границе раздела сред получаем условие для нормальных составляющих полного тока

$$div\mathbf{i}_{\tau} + \mathbf{j}_{\text{полн.}x_1} = \mathbf{j}_{\text{полн.}x_2}, \qquad \textbf{(22)}$$

которое позволяет исключить из рассмотрения поверхностную плотность заряда σ. Для произвольной функции *f* введем обозначение $[f]|_{x=\xi} = f_1|_{x=\xi+0} - f_2|_{x=\xi-0}$.

Тогда выражение (22) примет вид

$$div\mathbf{i}_{\tau} + [\mathbf{j}_{\text{полн.}x}]|_{x=\xi} = 0. \qquad \textbf{(23)}$$

Полагаем, что на границе раздела сред E_x является непрерывной функцией y и z. Тогда после дифференцирования (22) по y и z имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}_{\text{полн.}x}\right]\Bigg|_{x=\xi} = -\frac{\partial\left(div\mathbf{i}_{\tau}\right)}{\partial y}, \qquad \textbf{(24)}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{j}_{\text{полн.}x}\right]\Bigg|_{x=\xi} = -\frac{\partial\left(div\mathbf{i}_{\tau}\right)}{\partial z}. \qquad \textbf{(25)}$$

Продифференцируем условия (19)–(21) для магнитной индукции и напряженности магнитного поля по времени. Принимая $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, получаем

$$\left[\frac{\partial B_x}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0, \quad \left[\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\xi} = \frac{\partial i_z}{\partial t}, \quad \left[\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\xi} = \frac{\partial i_y}{\partial t}. \qquad \textbf{(26)}$$

С учетом уравнения (6) выразим (26) через проекции вихря электрического поля

$$\left[rot_x E\right]\Big|_{x=\xi} = 0 \qquad \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0, \tag{27}$$

$$\left[\frac{1}{\mu\mu_0} rot_y E\right]\Bigg|_{x=\xi} = \frac{\partial i_z}{\partial t} \qquad \left[\frac{1}{\mu\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{x=\xi} = \frac{\partial i_z}{\partial t}, \tag{28}$$

$$\left[\frac{1}{\mu\mu_0} rot_z E\right]\Bigg|_{x=\xi} = \frac{\partial i_z}{\partial t} \qquad \left[\frac{1}{\mu\mu_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{x=\xi} = \frac{\partial i_z}{\partial t}. \tag{29}$$

Здесь (27) – нормальная проекция вихря, (28) – тангенциальная проекция вихря электрического поля по *y* и (29) – проекция вихря по *z*.

В предположении, что E_y и E_z – непрерывные дифференцируемые функции координат y и z, из условий (17), (18) найдем

$$\left[\frac{\partial E_y}{\partial y}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0, \qquad \left[\frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0, \tag{30}$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0, \qquad \left[\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0. \tag{31}$$

Вследствие равенства тангенциальных проекций электрического поля по z и y, согласно условиям (17), (18) выражения для плотностей поверхностного тока i_z и i_y имеют вид

(32)

где

$$i_z = \overline{\lambda} E_z\big|_{x=\xi}, \qquad i_y = \overline{\lambda} E_y\big|_{x=\xi}, \quad \overline{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\Big|_{x=\xi} \tag{33}$$

– среднее значение электропроводности на границах раздела смежных сред в соответствии с теоремой Дирихле для кусочно-гладкой кусочно-дифференцируемой функции.

С учетом изложенного выше имеем двенадцать условий на границе раздела смежных сред, необходимых для решения полной системы уравнений (12) – (14):

***а*) функции E_y , E_z определяются уравнениями (17), (18);**

***б*) E_x определяется из условия (23);**

***в*) величины $\partial E_x/\partial y$, $\partial E_x/\partial z$ и $\partial E_x/\partial x$ рассчитываются из соотношений (24), (25), а также непрерывности на границе раздела нормальной составляющей полного тока (23) и непрерывности производной полного тока по координате *x*;**

***г*) значения $\partial E_y/\partial y$, $\partial E_y/\partial z$, $\partial E_z/\partial y$, $\partial E_z/\partial z$ определяются условиями (30), (31) как следствие непрерывности тангенциальных компонент электрического поля по *y* и *z*;**

***д*) производные $\partial E_y/\partial x$, $\partial E_z/\partial x$ находятся из условий (28), (29) как следствие равенства тангенциальных компонент вихря электрического поля по *y* и *z*.**

Отметим, что условие (22) использовалось нами при численном моделировании импульсных электрохимических процессов для одномерного случая. Условие (27) для нормальной составляющей вихря электрического поля есть линейная комбинация условий (30), (31), поэтому $rot_x E = 0$ и в его дальнейшем использовании нет необходимости. Специфика выражения общего закона сохранения электрического заряда на границе раздела заключается в том, что компоненты $\partial E_y/\partial y$, $\partial E_z/\partial z$, находятся из условий (30), (31), которые выводятся из равенства и непрерывности тангенциальных компонент E_y и E_z на границе S.

Особенности вычисления распространения электромагнитных волн в слоистых средах.

В связи с тем, что в каждом сечении слоистой среды справедливы условия (22)–(31), используем схемы сквозного счета без явного выделения границы раздела смежных сред. При этом вычисление E_{x_i} на границе раздела предлагается осуществлять следующим образом.

Согласно (16) $E_{x_1} \neq E_{x_2}$, **т. е. $E_x(x)$ испытывает разрыв функции первого рода. Определим значение напряженности электрического поля в точке разрыва при x = ξ при условии, что $E_x(x)$ является кусочно-гладкой, кусочно-дифференцируемой функцией, т. е. имеет конечные односторонние производные** $E'_{x^+}(x)$ **и** $E'_{x^-}(x)$**. При этом в точках разрыва x_i**

$$E'_+(x_i) = \lim_{\Delta x_i \to +0} \frac{E(x_i + \Delta x_i) - E(x_i + 0)}{\Delta x_i}, \qquad \textbf{(34)}$$

$$E'_-(x_i) = \lim_{\Delta x_i \to -0} \frac{E(x_i + \Delta x_i) - E(x_i - 0)}{\Delta x_i}. \qquad \textbf{(35)}$$

$$E_{x=\xi} = \frac{1}{2}\left[E(\xi - 0) + E(\xi + 0)\right]. \qquad \textbf{(36)}$$

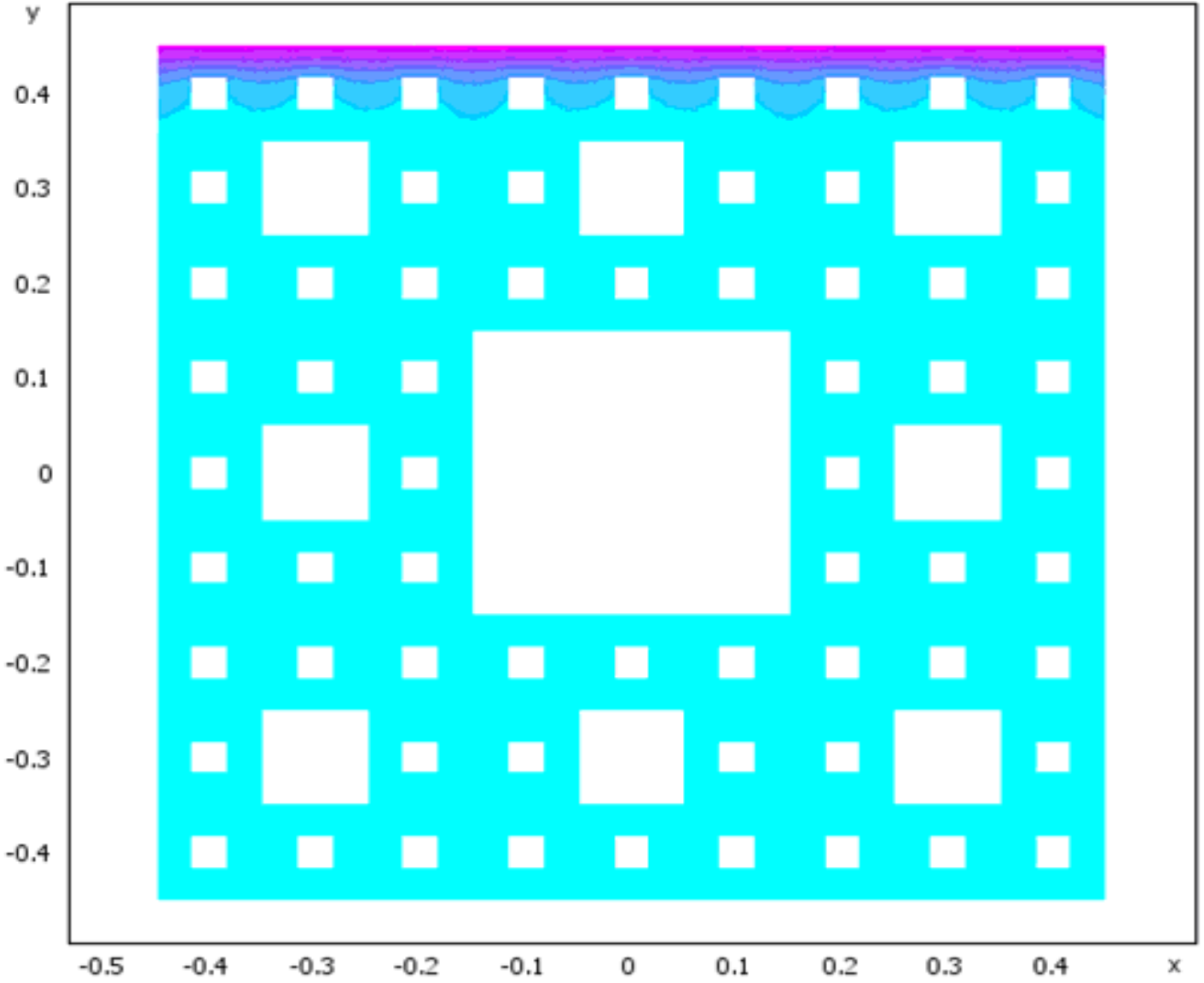


Рис. 6. Распределение амплитуды напряженности электрического поля в двумерной среде (закрашенный фон – среда 1, прозрачный – 2)

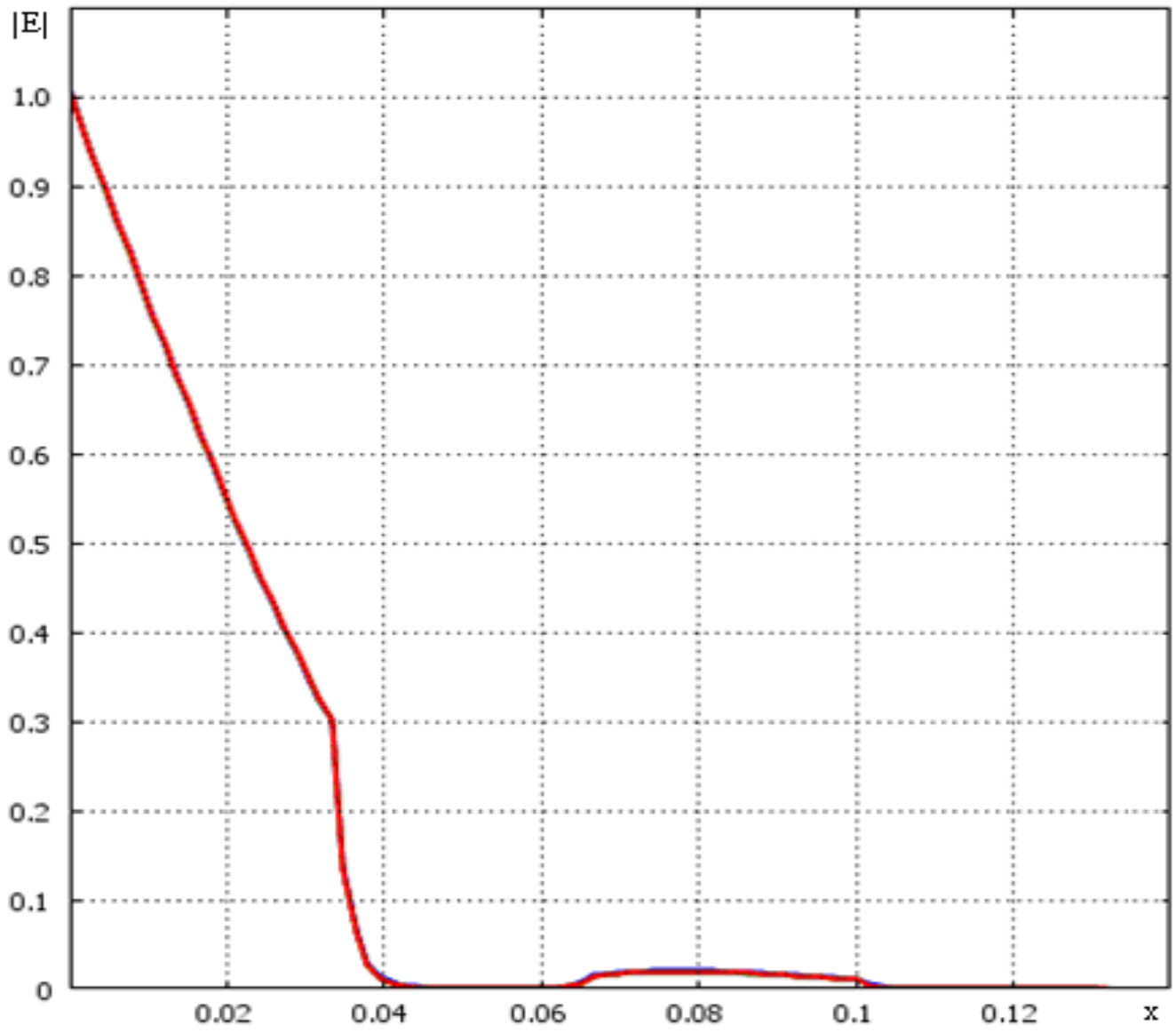
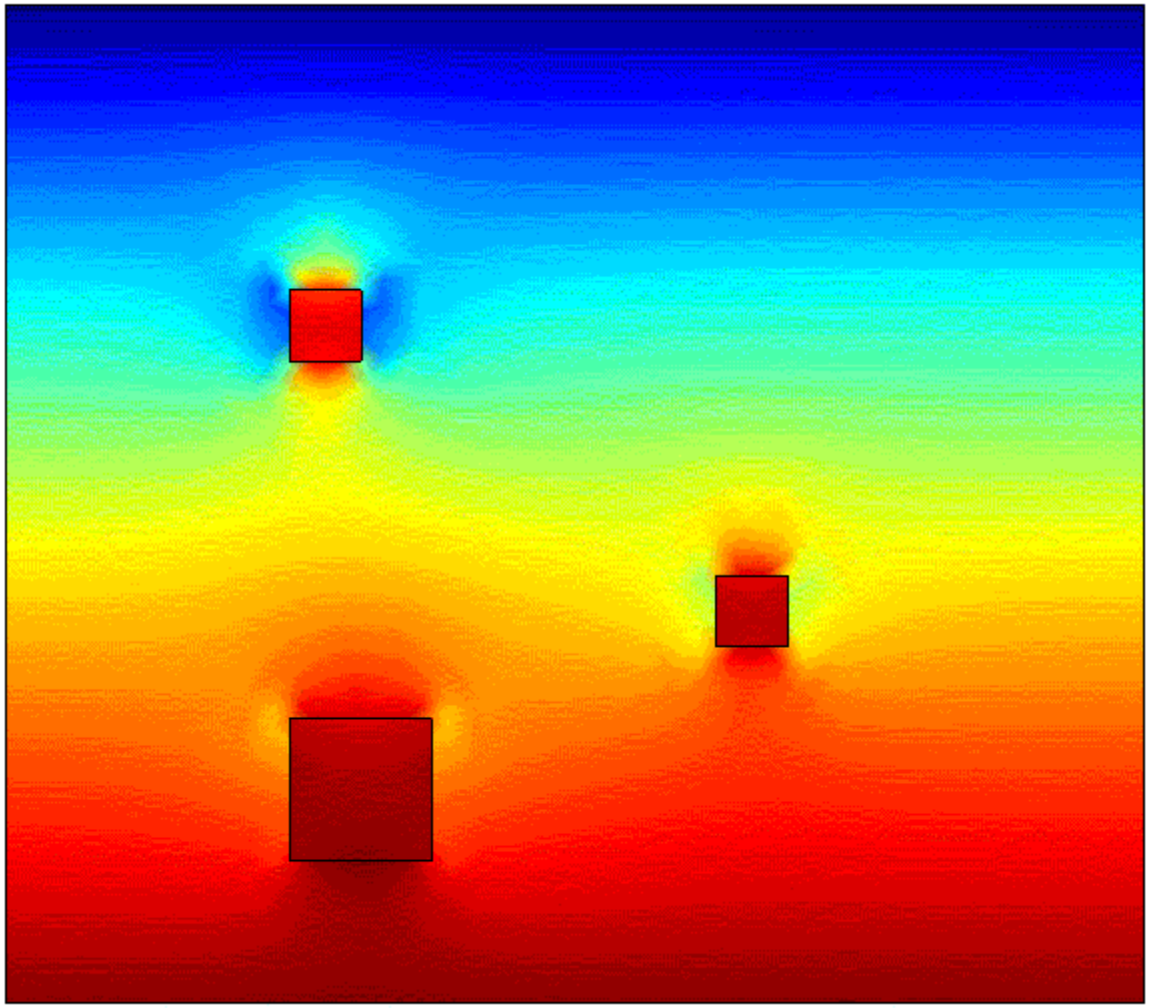
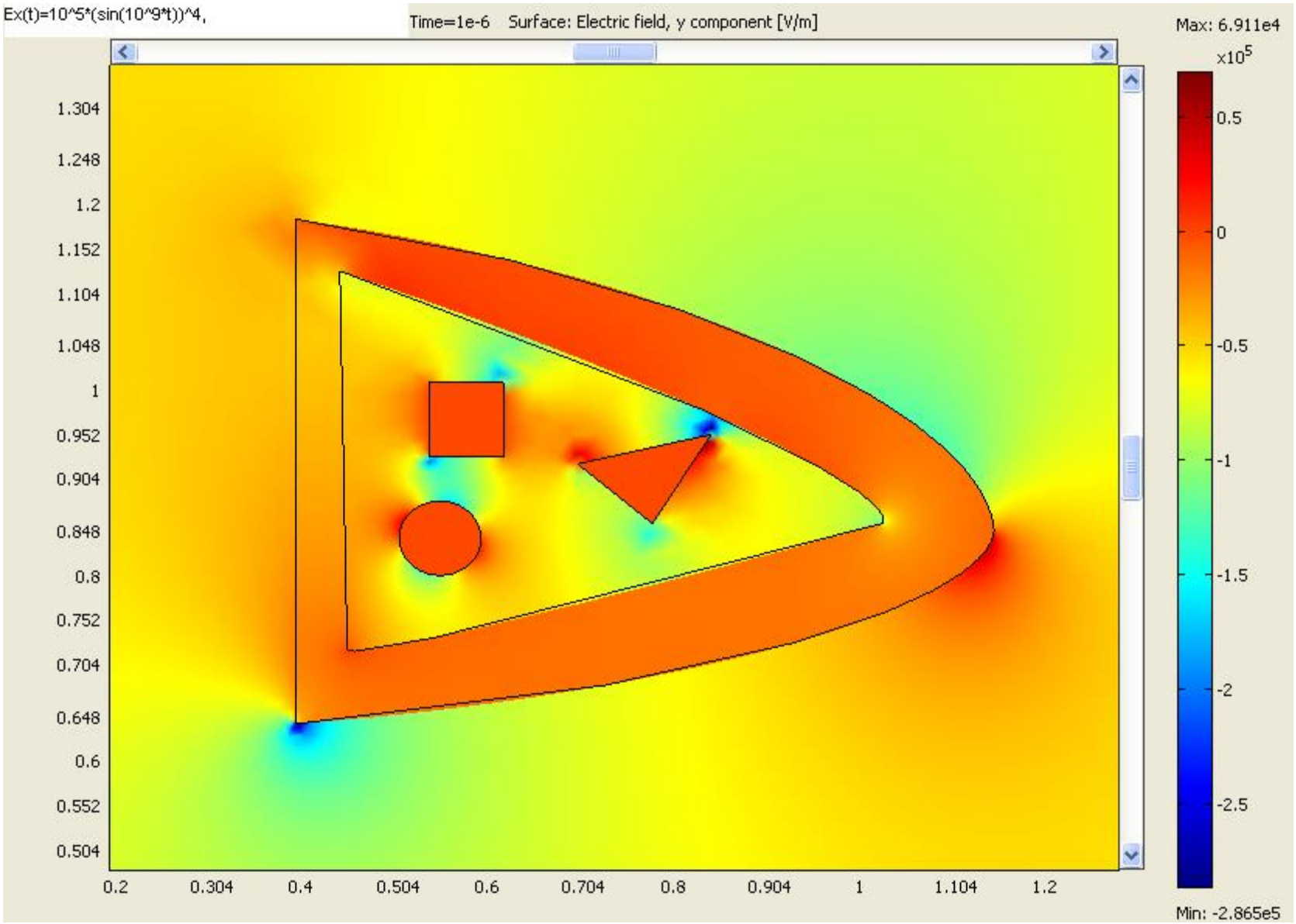
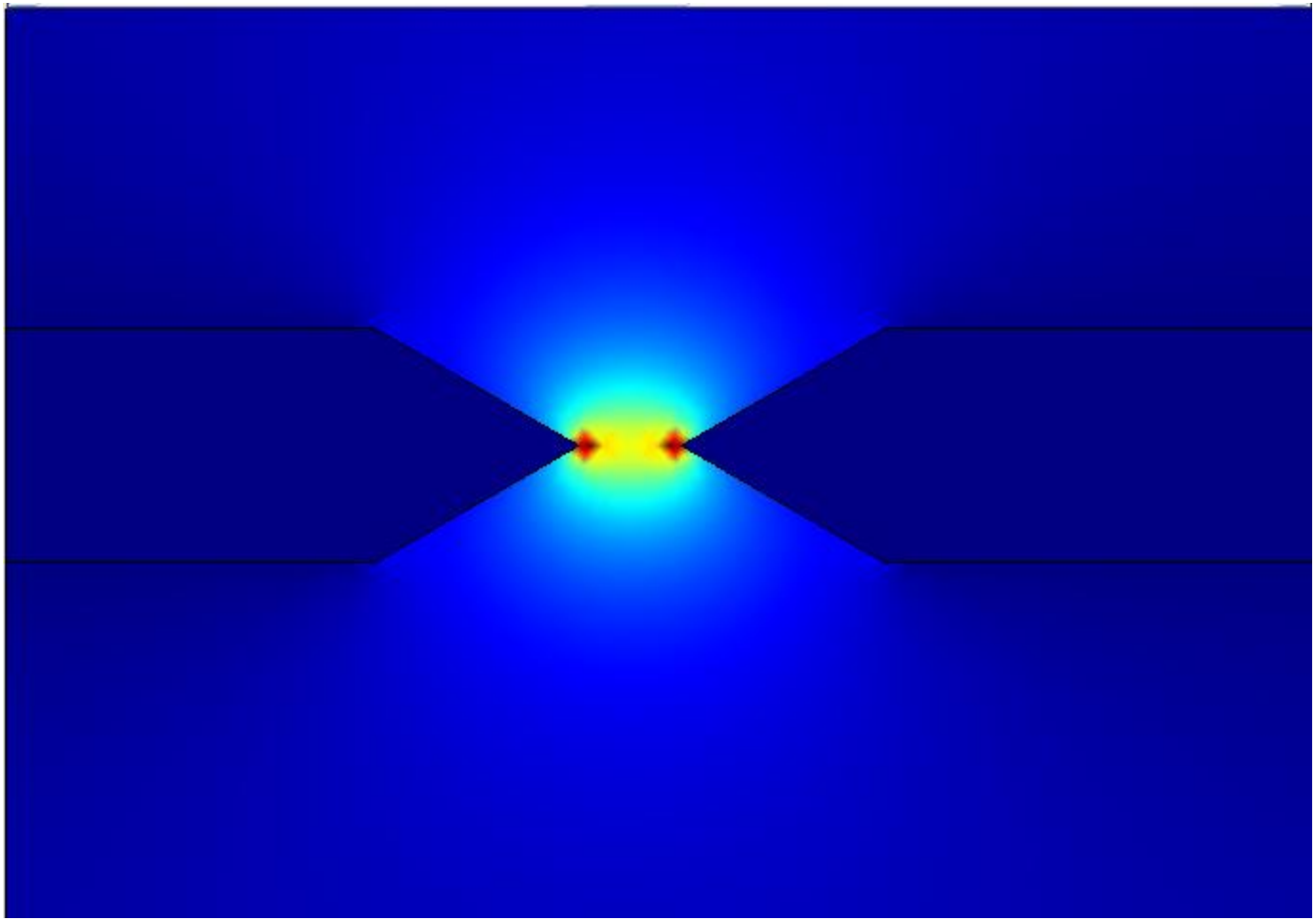


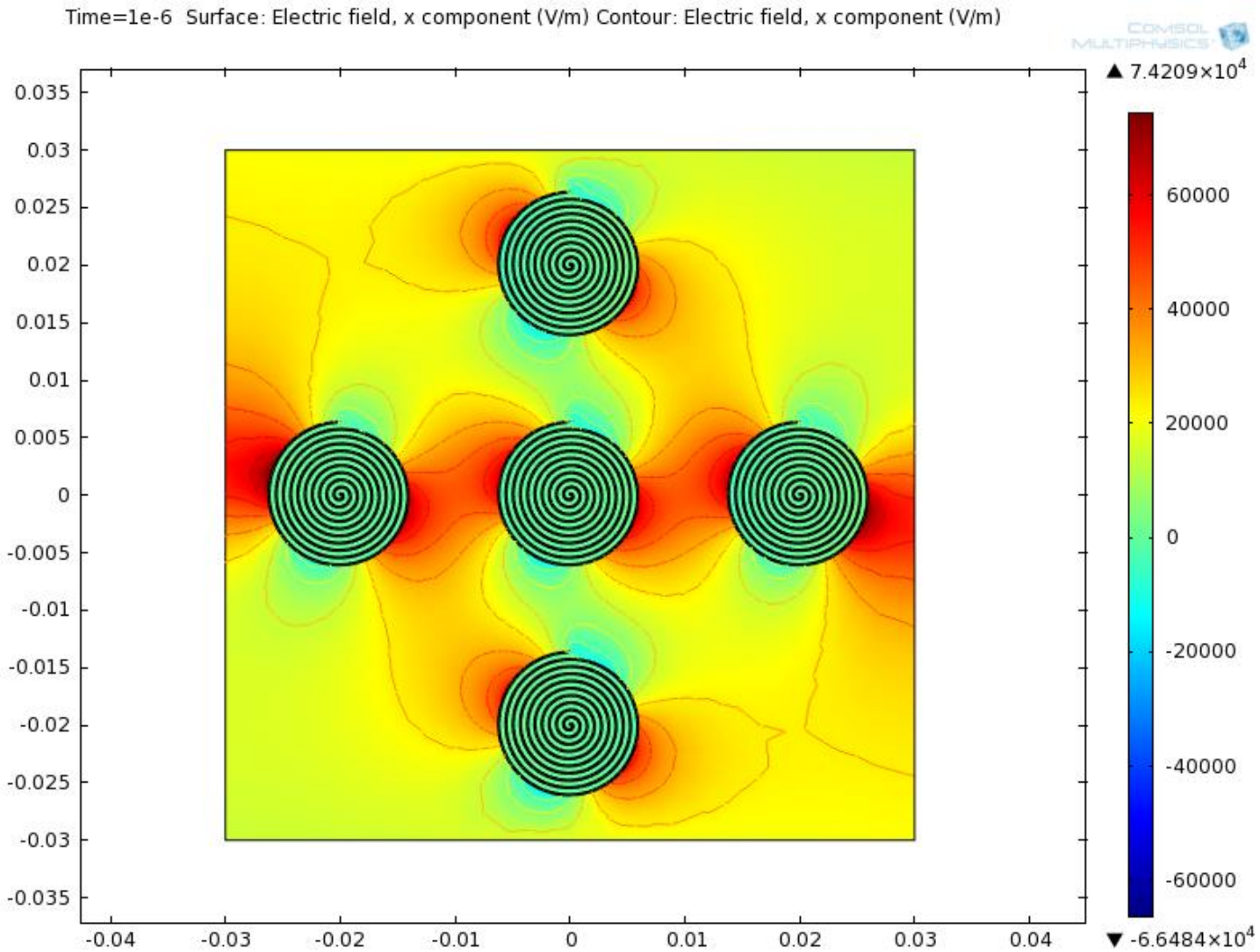
Рис. 7. Распределение амплитуды напряженности электрического поля по глубине




Ex(t)=10^5*(sin(10^9*t))^4,
Time=1e-6 Surface: Electric field, y component [V/m]
Max: 6.911e4
x10^5
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
Min: -2.865e5
1.304
1.248
1.2
1.152
1.104
1.048
1
0.952
0.904
0.848
0.8
0.752
0.704
0.648
0.6
0.552
0.504
0.2
0.304
0.4
0.504
0.6
0.704
0.8
0.904
1
1.104
1.2



Размеры области: 0.06X0.06 метра, диаметры спиралек ≈0.012
Параметры волны: $E_x=10^4\sin(10^{11}t)$, $E_y=10^4\cos(10^{11}t)$
Время счета: 10^{-6}с, шаг:10^{-7}с, спираль выполнена из алюминия (ε=1,σ=3.774e7[S/m])

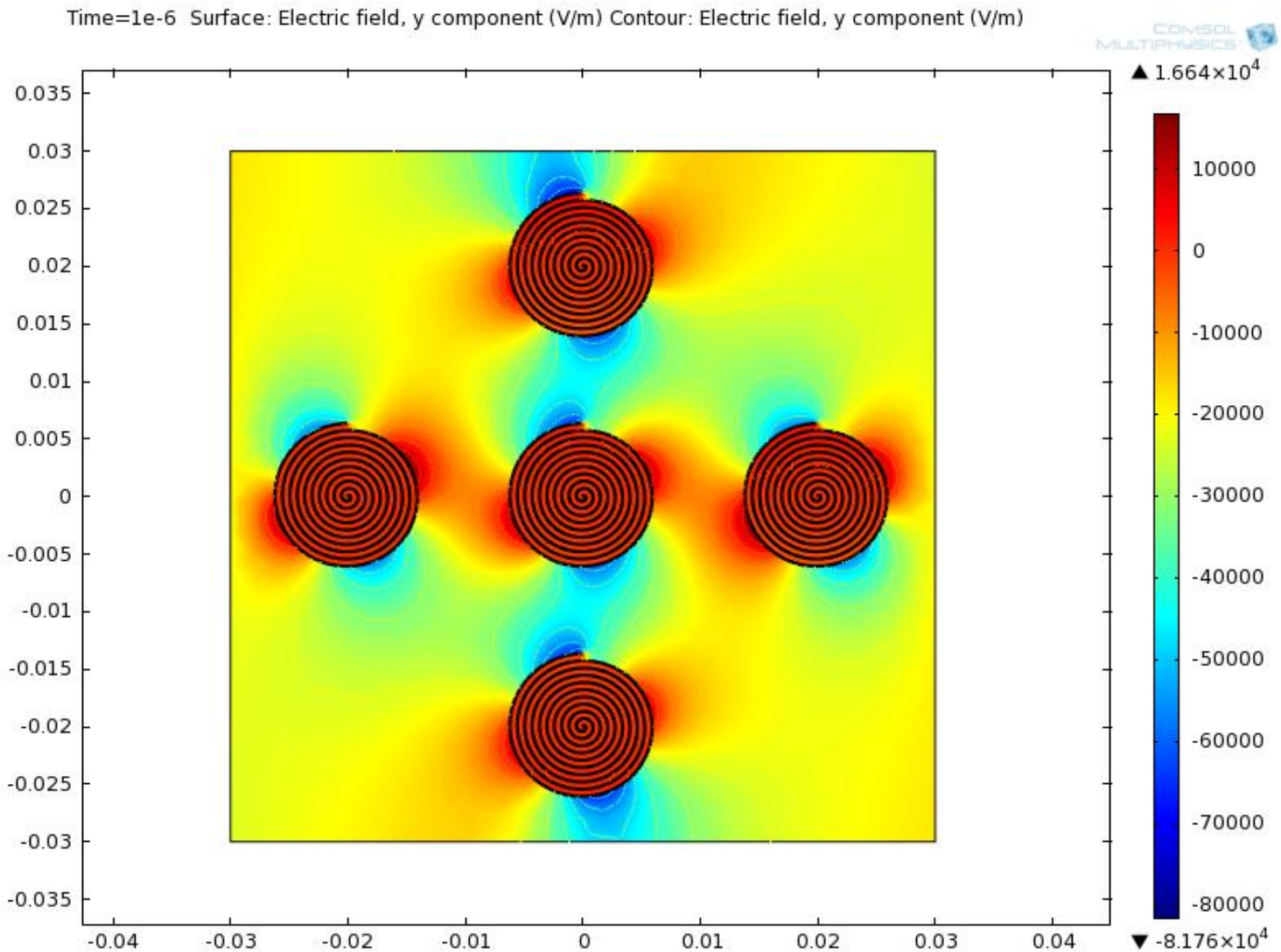


Проекция на ось Ox напряженности электромагнитного поля для опыта со спиралью

Размеры области: 0.06X0.06 метра, диаметры спиралек ≈0.012

Параметры волны: $E_x=10^4\sin(10^{11}t)$, $E_y=10^4\cos(10^{11}t)$

Время счета: 10^{-6}с, шаг:10^{-7}с, спираль выполнена из алюминия (ε=1,σ=3.774e7[S/m])



Проекция на ось Оу напряженности электромагнитного поля для опыта со спиралью

Diffusion Electric Phenomena in Electrolytes

$$u = \gamma_i^* z_i e \mathbf{E} \tag{1}$$

$$\gamma_i^* = \frac{D_i F}{RT} \tag{2}$$

$$q_i = n_i v - D_i \nabla n_i + \frac{D_i z_i F \mathbf{E}}{RT} n_i \tag{3}$$

$$q_i = n_i v - D_i \nabla n_i + \frac{D_i z_i F \mathbf{E}}{RT} n_i - D z_i \nabla n_A \tag{4}$$

$$\beta = \frac{\left(n^-\right)^{z^+} \left(n^+\right)^{z^-}}{n_A} \tag{5}$$

$$\beta = \frac{\alpha^2 n}{1-\alpha} \tag{6}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} + \mathbf{v}\, grad n_i = D_i \Delta n_i + \frac{z_i F D_i}{RT} div\left(n_i \mathbf{E}\right) \quad \textbf{(7)}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial \tau} + \mathbf{v}\, grad n_e = D_e \Delta n_e + \frac{z_e F D_e}{RT} div\left(n_e \mathbf{E}\right) \quad \textbf{(8)}$$

$$z_e n_e - z_i n_i = 0 \quad \textbf{(9)}$$

$$C = \frac{n_e}{z_i} = \frac{n_i}{z_e} \quad \textbf{(10)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + v \nabla C = D_{ef} \Delta C \quad \textbf{(11)}$$

$$D_{ef} = \frac{D_e D_i \left(z_e + z_i \right)}{z_e D_e + z_i D_i} \tag{12}$$

$$\mathbf{J} = \left(D_i - D_e \right) F z_i z_e \nabla C + \frac{F^2 z_i z_e}{RT} \left(z_i D_i + z_e D_e \right) CE \tag{13}$$

$$\nabla \left(\rho_R \nabla \varphi \right) = -F \sum_i z \nabla \left(D_i \nabla C_i \right) \tag{14}$$

Landau Model

$$\mathbf{J}_q = \lambda\left(\mathbf{E} - \beta gradn\right) - \lambda\alpha\left(T\right)gradT$$
$$\mathbf{J}_m = -D_m gradn - D_A^* \lambda \mathbf{E} - D_T gradT \qquad \textbf{(15)}$$
$$\mathbf{J}_T = -k gradT - I_q\left(\Pi + \varphi\right) - \lambda D_T^* gradn$$

$$\mathbf{I}_q = -\lambda\left(\alpha\left(T\right)gradT + grad\varphi\right), \mathbf{I}_T = -k\left(T\right)gradT + \mathbf{I}_q\left(\ddot{I} \ + \varphi\right) \qquad \textbf{(16)}$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\nabla^2 \mathbf{E} \tag{17}$$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = div\left(k(T)\, gradT\right) + \mathbf{I}_q \cdot \left(\mathbf{E} - \left(\alpha(T) + T\beta(T)\right) gradT\right) \tag{18}$$

$$div\mathbf{i} + I_{qn1} - I_{qn2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{19}$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\lambda\left(\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial x} - E\right)\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{20}$$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \lambda\left(\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial x} - E\right)\left(E - \left(\alpha(T) + T\beta(T)\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{21}$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1\big|_{x=\xi-0} - \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2\big|_{x=\xi+0} = \sigma\big|_{x=\xi} \tag{22}$$

$$\lambda_1\left(E_1-\alpha_1(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=\xi-0}-\lambda_2\left(E_2-\alpha_2(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=\xi+0}=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Bigg|_{x=\xi} \tag{23}$$

$$\left[\lambda\left(E-\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\xi}=0 \tag{24}$$

$$[f]\Big|_{x=\xi}=f\Big|_{x=\xi+0}-f\Big|_{x=\xi-0} \tag{25}$$

$$\left[\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\xi}=0 \tag{26}$$

$$[T]\Big|_{x=\xi}=0 \tag{27}$$

$$\left[k(T)\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda\left(\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial x}-E\right)\left(\alpha(T)T+\varphi\right)\right]\Bigg|_{x=\xi}=0 \tag{28}$$

$$T(x,0)=T_0(x),\ E(x,0)=f_1(x),\ \frac{\partial E(x,0)}{\partial t}=f_2(x) \qquad \textbf{(29)}$$

$$\left.\left(\lambda\left(\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial x}-E\right)-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)\right|_{x=0}=j_1(t) \qquad \textbf{(30)}$$

$$\left.\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda\left(\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial x}-E\right)\alpha(T)T+\varphi\right)\right|_{x=0}=\gamma_1\left(T-T^*\right)\Big|_{x=0} \qquad \textbf{(31)}$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial\mathbf{I}_q}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{E},\ \frac{\partial n}{\partial t}=-div\left(\mathbf{I}_m\right),\ c_0\rho_0\frac{\partial T}{\partial t}=-div\left(\mathbf{I}_T\right) \qquad \textbf{(32)}$$

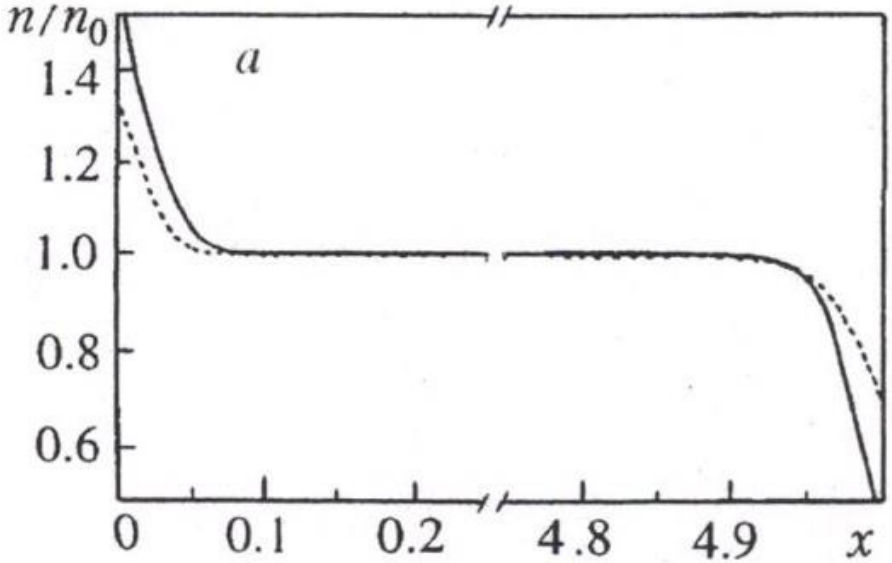
Часть рисунка с идентификатором отношения R12.7 не найдена в файле.

(33)

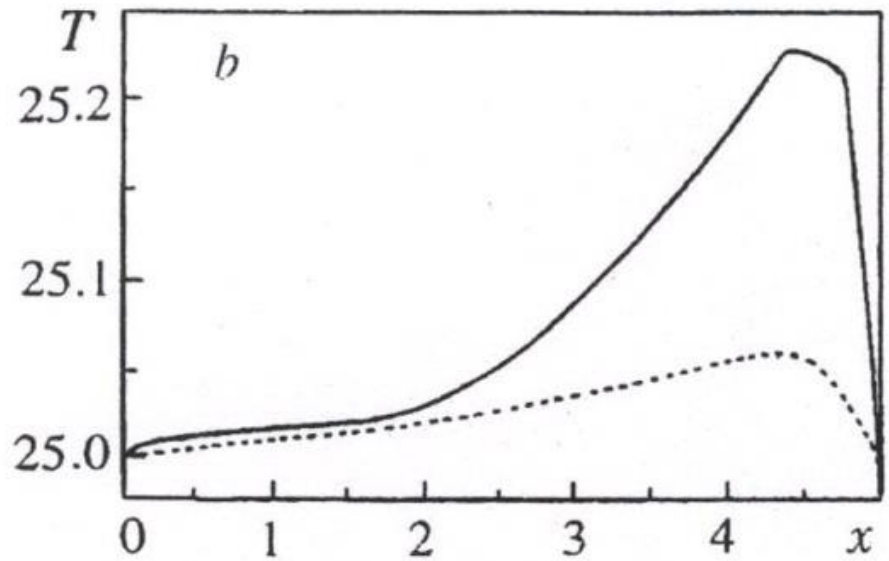
$$\mathbf{I}_q = \lambda\left(\lambda_A^* \frac{\partial n}{\partial x} - E\right) + \lambda\alpha\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x} - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{34}$$

$$\gamma_1\left(T - T^*\right) = k\frac{\partial T}{\partial x} - I_q\left(\Pi + \varphi\right) + D_T^* \frac{\partial n}{\partial x} \tag{35}$$

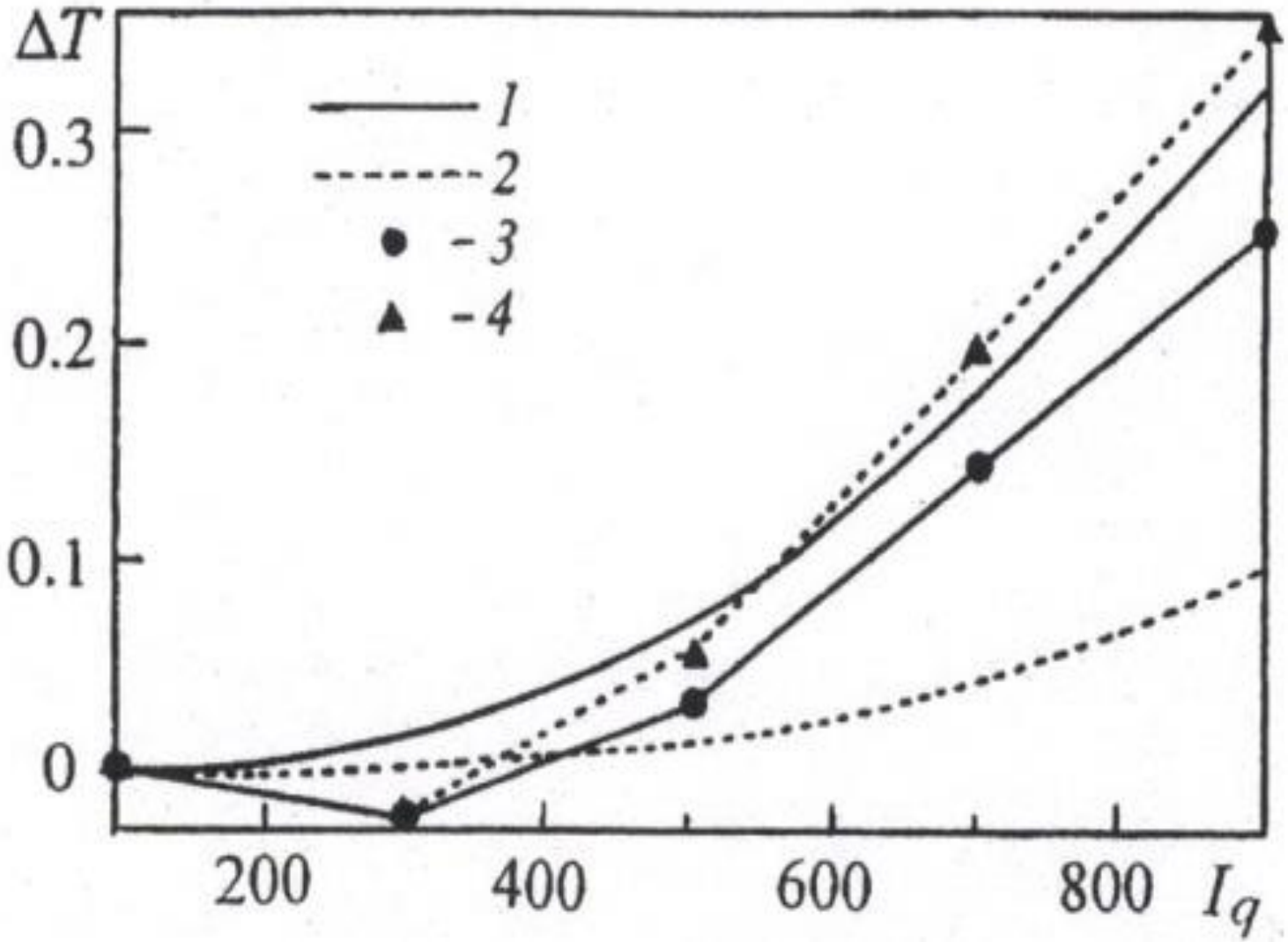
$$k_a I_q\left(t\right) = D_M \frac{\partial n}{\partial x} - D_A^* \lambda E + D_T \frac{\partial T}{\partial x} \tag{36}$$



(a) Distribution of the normalized concentration of $CuSO_4$



(b) Distribution of the temperature



Heating of the electrolyte in the cathode region as a function of the value and kind of polarizing current

$$\mathbf{E}(t)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_0^*(t)e^{i\omega t}\right] \tag{37}$$

$$\mathbf{H}(t)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega t}+\mathbf{H}_0^*(t)e^{i\omega t}\right] \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}E(t)=&\frac{1}{4}\frac{d\left(\omega\varepsilon'(\omega)\right)}{d(\omega)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{E}_0(t)\mathbf{E}_0^*(t)\right]+\frac{\omega\varepsilon''}{2}\mathbf{E}_0(t)\mathbf{E}_0^*(t)+\\ &i\frac{d\left(\omega\varepsilon''(\omega)\right)}{4d\omega}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0(t)}{\partial t}\mathbf{E}_0^*(t)-\frac{\mathbf{E}_0^*(t)}{\partial t}\mathbf{E}_0(t)\right)\end{aligned} \tag{39}$$

$$E(t)=a(t)\cos\varphi(t) \tag{40}$$

Problem using of complex variable

$$w(t) = a(t)e^{i\varphi(t)},$$

$$a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}, \qquad \varphi(t) = \arccos\frac{u(t)}{a(t)} = \arcsin\frac{v(t)}{a(t)},$$

$$\omega(t) = \frac{v(t)u(t) - u(t)v(t)}{a^2(t)}.$$

$$u(t) = a(t)\cos[\omega t + \phi(t)]$$

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\omega_0} = \alpha(t)\cos[\omega t + \phi(t)]$$

$$u(t) = (1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t, \qquad \frac{\Omega}{\omega_0} = \varepsilon \ll 1,$$

$$a(t) = 1 + m\cos\Omega t + \frac{\varepsilon m\sin\Omega t\sin 2\omega_0 t}{2},$$

$$\phi(t) = \frac{\frac{\varepsilon}{2}m\sin\Omega t}{1+m\cos\Omega t}(1 + \cos 2\omega_0 t).$$

$$\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}$$

$$(x, t) = 2A\cos(kx - \omega t)\cos\left(\frac{\Delta K}{2}x - \frac{\Delta W}{2}t\right)$$

Одномерное волновое уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \text{ в области } \bar{D} ,$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l ,$$

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u\big|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \ge 0 .$$

Условия согласования к волновому уравнению

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0), \quad \mu_1'(0) = \psi(0), \quad \mu_2'(0) = \psi(l) .$$

$$\mu_1''(0) - a^2\varphi''(0) = f(0, 0), \quad \mu_2''(0) - a^2\varphi''(l) = f(l, 0) .$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\substack{x=0\\t=0}} = \mu_1''(0), \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\substack{x=l\\t=0}} = \mu_2''(0), \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\t=0}} = \varphi''(0), \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=l\\t=0}} = \varphi''(l) .$$

Построение волн

$$S = A\cos wt \pm \frac{mA}{2}\cos w_1 t \pm \frac{mA}{2}\cos w_2 t\ , \qquad \textbf{(1)}$$

Выражение (1) легко преобразуется в следующее

$$S = A\left[1 \pm m\cos\left(\Omega t - Kx\right)\right]\cos\left(wt - Kx\right) \qquad \textbf{(2)}$$

или

$$S = A\left[1 \pm m\cos\left(\Omega t - Kx\right)\right]\sin\left(wt - Kx\right)\ , \qquad \textbf{(3)}$$

Построение волн

Как известно, общим решением волнового уравнения является решение Даламбера – сумма прямой и обратной волн, при этом волна должна иметь уширение ±2Δ.

$$E_x(t) = A\left[1 + m\cos\Omega t\right]\left[2\sin wt - \left[\sin\left(w - 2\Delta\right)\right]t + \sin\left(w + 2\Delta\right)t\right] = \quad \textbf{(4)}$$

$$= 4A\left[1 \pm m\cos\Omega t\right]\sin^2\Delta t\,\sin wt\,,$$

$$E_y(t) = A\left[1 \pm m\cos\Omega t\right]\left[2\cos wt - \left[\cos\left(w - 2\Delta\right)\right]t + \cos\left(w + 2\Delta\right)t\right] = \quad \textbf{(5)}$$

$$= 4A\left[1 \pm m\cos\Omega t\right]\sin^2\Delta t\,\cos wt\,,$$

Построение волн

Уширение спектральных линий обусловлено взаимодействием излучающего атома с окружающими его частицами — другими атомами и молекулами, ионами и электронами.

$$E_x(0,\,t) = A\left[\int\limits_{w-2\Delta}^{w+2\Delta}\left(1-\frac{2}{e^{\lambda\,\sin^2\,wt}+e^{-\lambda\,\sin^2\,wt}}\right)\sin^2\,wt\;dw\right]\frac{\left(1-m\,\cos\,\sigma t\right)\sin\,wt}{4\Delta} = \qquad \textbf{(6)}$$

$$= A\left[\int\limits_{w-2\Delta}^{w+2\Delta}\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda\,\sin^2\,wt)}\right)\sin^2\,wt\;\;dw\right]\frac{(1-m\,\cos\,\sigma t)\,\sin\,wt}{4\Delta}\,,$$

$$E_y(0,\,t) = A\left[\int\limits_{w-2\Delta}^{w+2\Delta}\left(1-\frac{2}{e^{\lambda\,\sin^2\,wt}+e^{-\lambda\,\sin^2\,wt}}\right)\sin^2\,wt\;dw\right]\frac{\left(1-m\,\cos\,\sigma t\right)\cos\,wt}{4\Delta} = \qquad \textbf{(7)}$$

$$== A\left[\int\limits_{w-2\Delta}^{w+2\Delta}\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda\,\sin^2\,wt)}\right)\sin^2\,wt\;\;dw\right]\frac{(1-m\,\cos\,\sigma t)\,\cos\,wt}{4\Delta}\,.$$

Анализ построенных волн

Нами были рассмотрены волны следующего вида, которые в дальнейшем будем называть проинтегрированные

$$E_x\left(t\right) = \left[\int\limits_{\omega-2\Delta}^{\omega+2\Delta}\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda\,\sin^2\,\varphi t)}\right)\sin^2\,\varphi t d\varphi\right]\frac{\left(1-m\,\cos\,\theta t\right)\sin\,\omega t}{4\Delta}\,, \qquad \textbf{(6)}$$

$$E_y\left(t\right) = \left[\int\limits_{\omega-2\Delta}^{\omega+2\Delta}\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda\,\sin^2\,\varphi t)}\right)\sin^2\,\varphi t d\varphi\right]\frac{\left(1-m\,\cos\,\theta t\right)\cos\,\omega t}{4\Delta}\,. \qquad \textbf{(7)}$$

Анализ построенных волн

А также волны, которые будем называть обычными:

$$E_x\left(t\right) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda \sin^2 \varphi t)}\right) \sin^2 \varphi t \left(1 - m \cos \theta t\right) \sin \omega t, \qquad \textbf{(8)}$$

$$E_y\left(t\right) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda \sin^2 \varphi t)}\right) \sin^2 \varphi t \left(1 - m \cos \theta t\right) \cos \omega t, \qquad \textbf{(9)}$$

Визуализация построенных волн

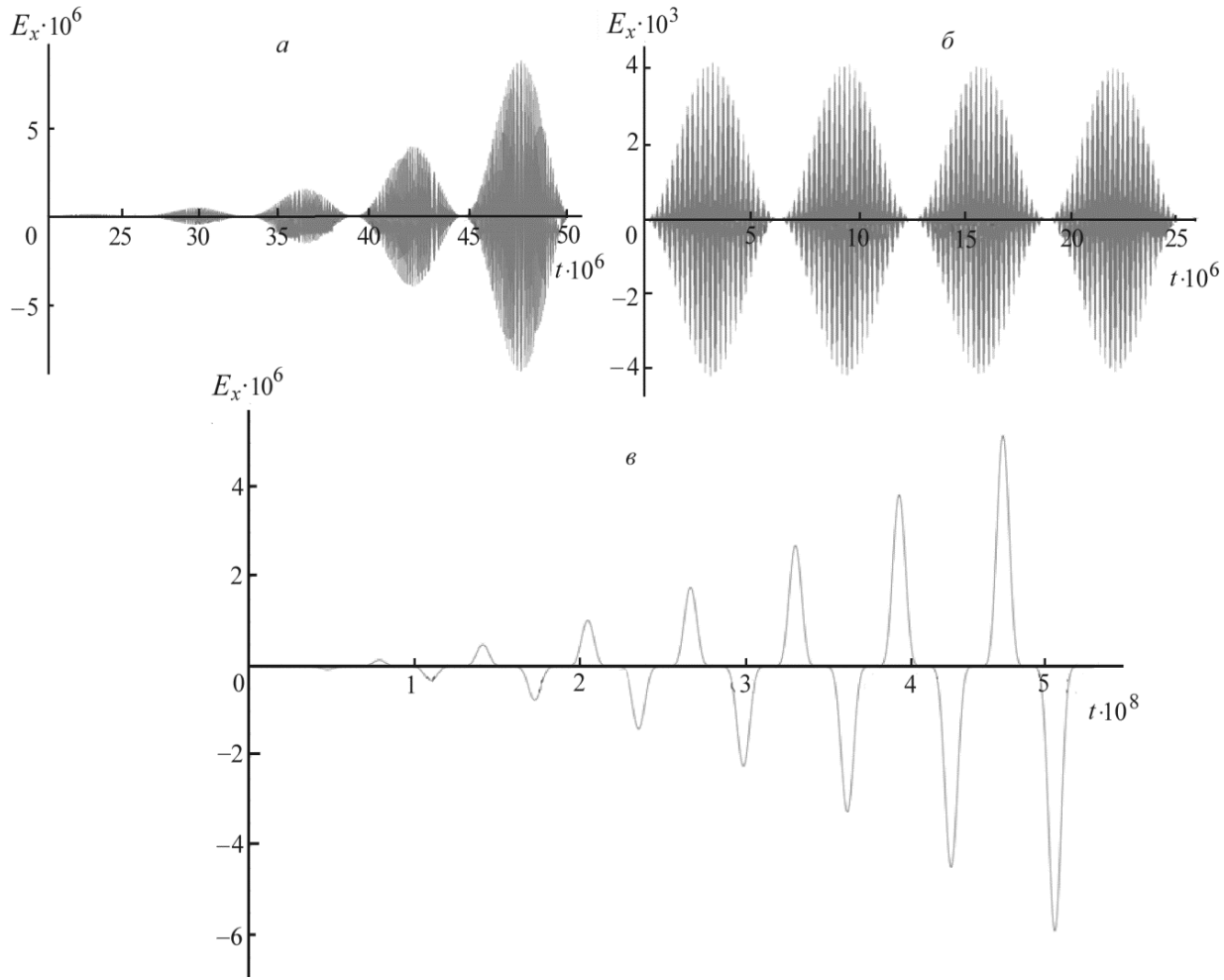


Рис. 1. График обычных волн (компонента по синусу) (а) и графики проинтегрированных волн (компоненты по синусу, m = 1, разные масштабы времени) (б, в)

Визуализация построенных волн

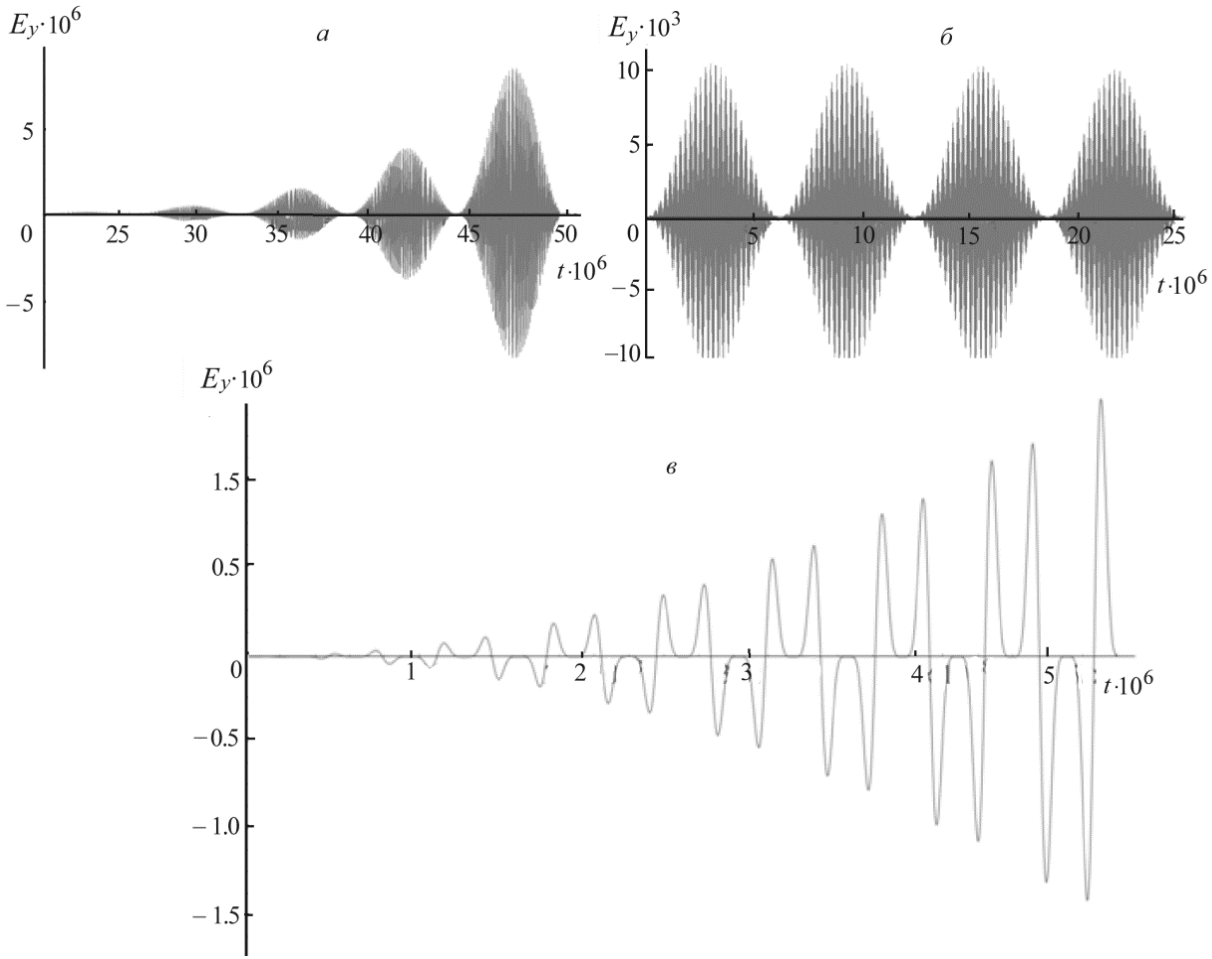


Рис. 2. График обычных волн (компонента по косинусу) (*а*) и графики проинтегрирован-ных волн (компоненты по косинусу, m = 1, разные масштабы времени) (*б*, *в*)

Визуализация построенных волн

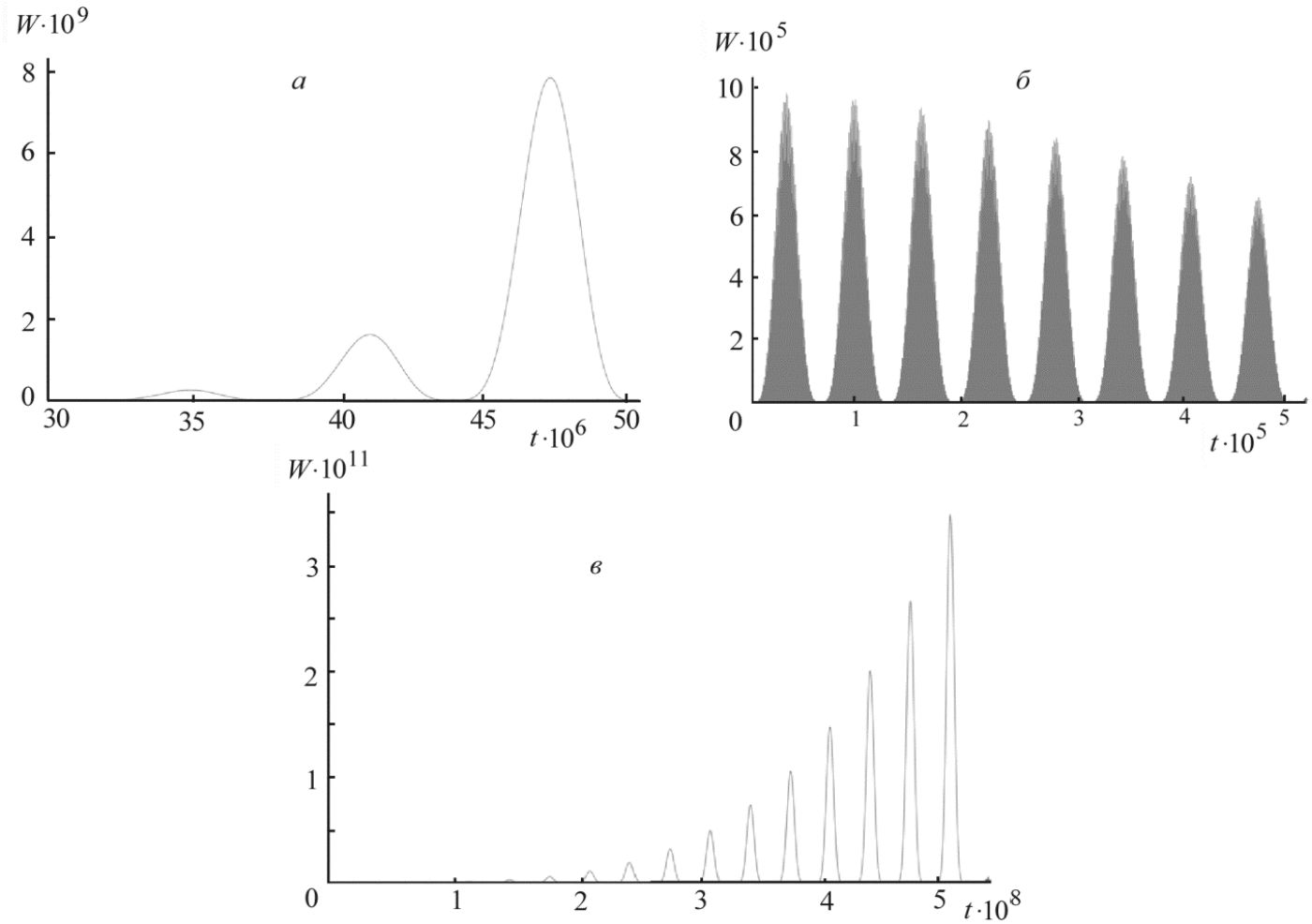


Рис. 3. График энергии обычных волн (а) и графики проинтегрированных волн для разных масштабов времени) (б, в)

Численное моделирование электромагнитного поля в гетерогенной среде

Полученные волны можно использовать для решения задачи распространения их в среде с сильными разрывами поля. Представим, что у нас квадратная область размерами[0;1]×[0;1]. В центре области находится медный брус (параллелепипед)

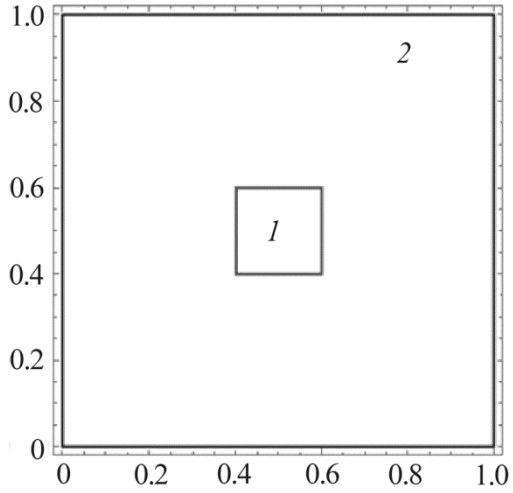


Рис. 4. График области решения задачи: *1* — медный брус; *2* — область с воздухом

Численное моделирование электромагнитного поля в гетерогенной среде

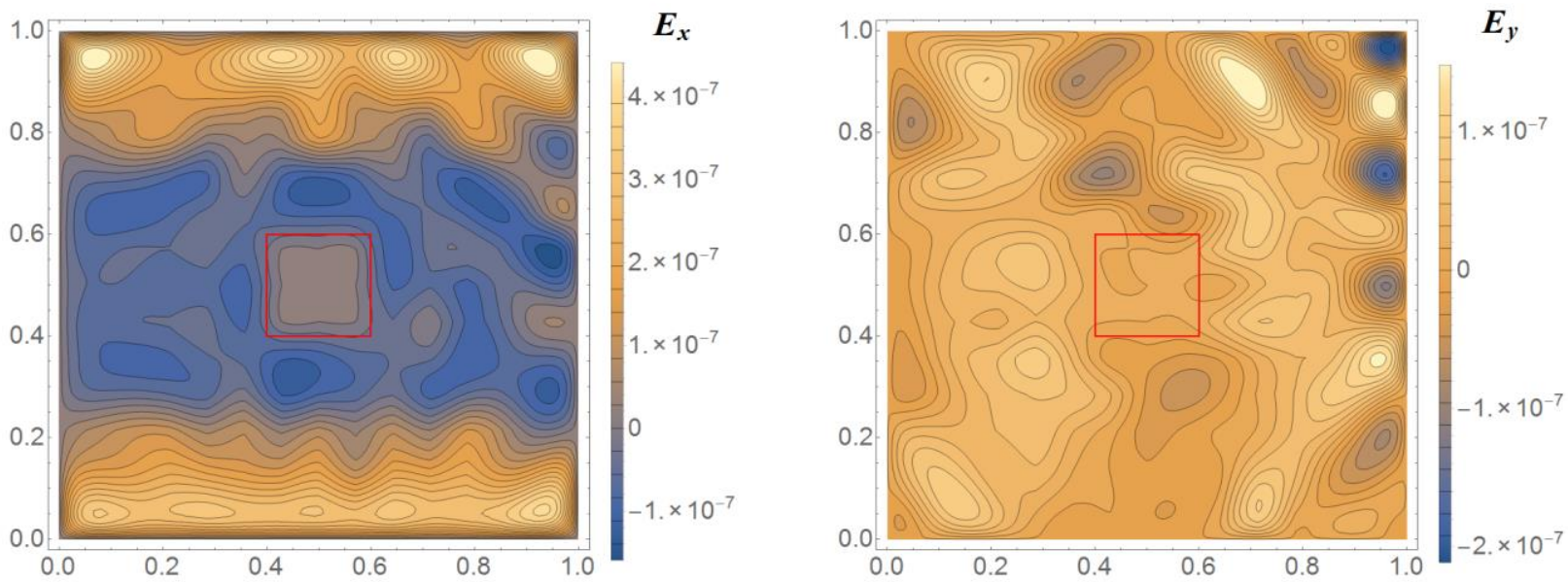


Рис. 5. Распределение напряженности в области при $m = 1$ для множителя $(1 - m\cos\theta t)$ в момент времени $t = 2 \times 10^{-9}$

Численное моделирование электромагнитного поля в гетерогенной среде

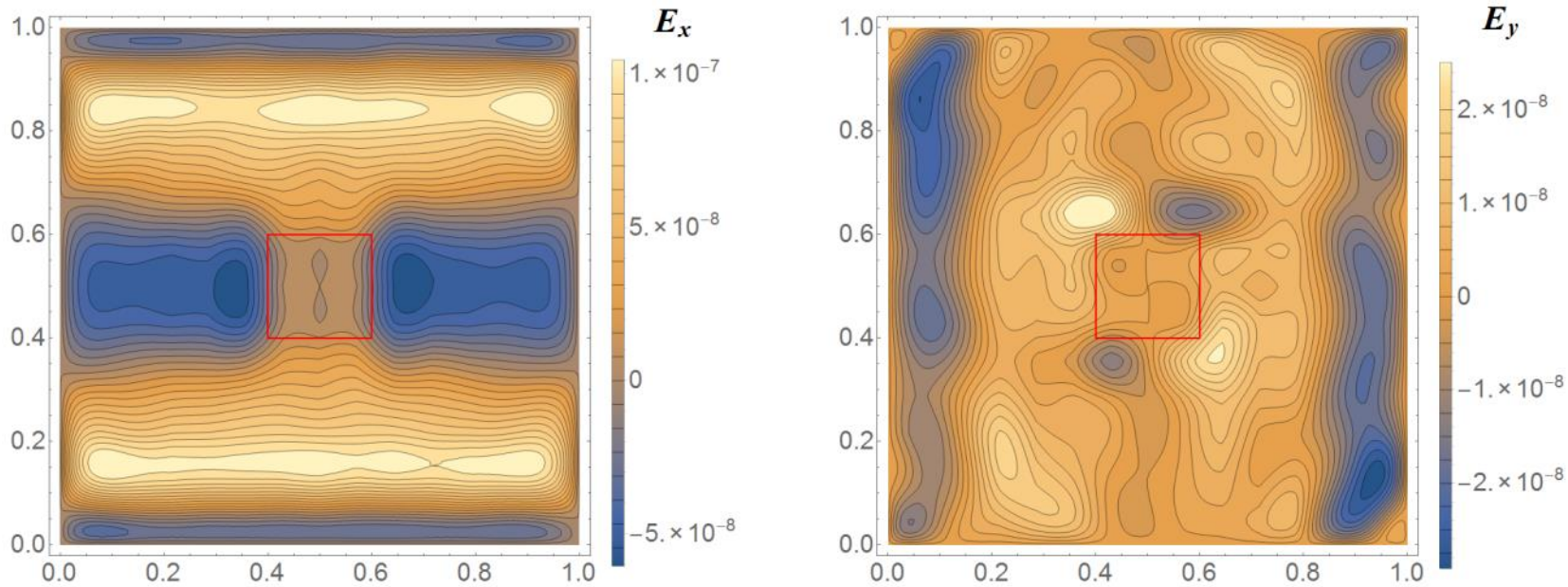


Рис. 5. Распределение напряженности в области при $m = 1$ для множителя $(1 - m\cos\theta t)$ в момент времени $t = 4 \times 10^{-9}$

Численное моделирование электромагнитного поля в гетерогенной среде

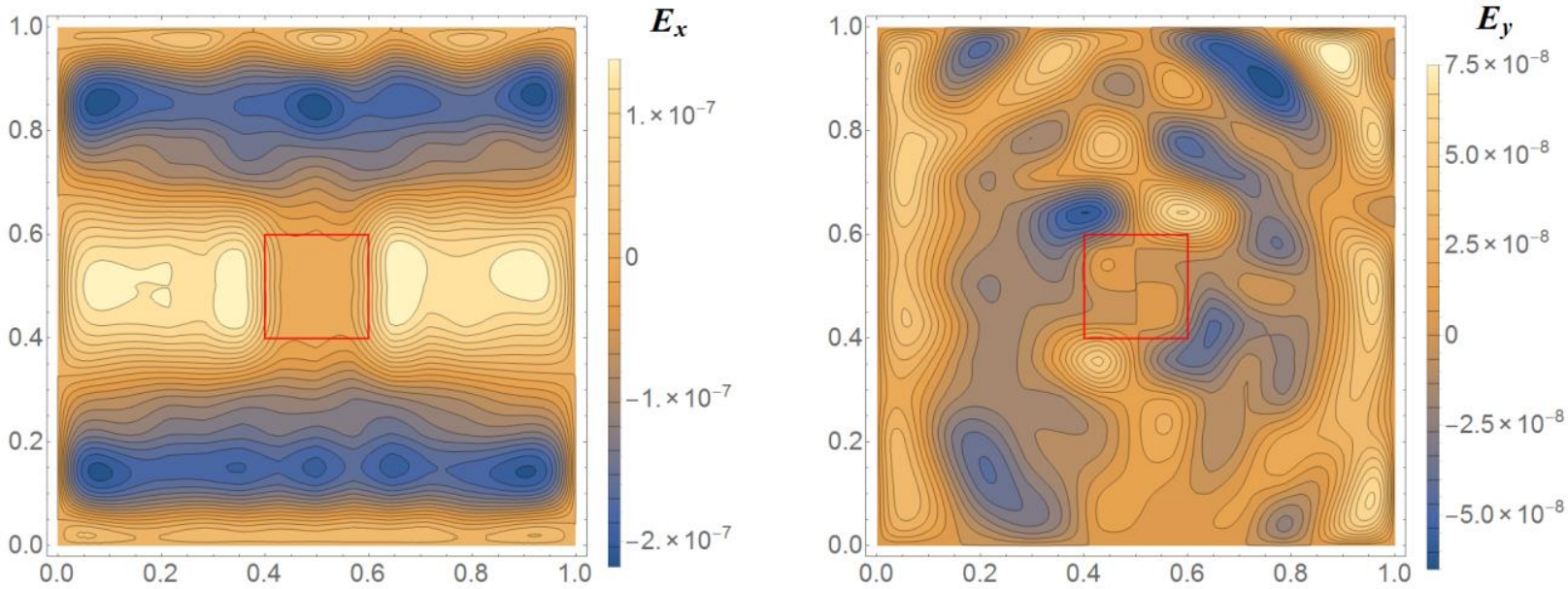


Рис. 6. Распределение напряженности в области при $m = 1$ для множителя $(1 - m\cos\theta t)$ в момент времени $t = 6 \times 10^{-9}$

Спасибо за внимание

- Ответ на вопросы

$$E_x(t) = A\left[1 + m\cos\Omega t\right]\left[2\sin wt - \left[\sin\left(w - 2\Delta\right)\right]t + \sin\left(w + 2\Delta\right)t\right] =$$

$$= 4A\left[1 \pm m\cos\Omega t\right]\sin^2\Delta t\sin wt\ ,$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}\left[\sin\left(\alpha+\beta-\gamma\right) + \sin\left(\beta+\gamma-\alpha\right) + \sin\left(\gamma+\alpha-\beta\right) - \sin\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\left[-\cos\left(\alpha+\beta-\gamma\right) + \cos\left(\beta+\gamma-\alpha\right) + \cos\left(\gamma+\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\right]$$

при условии $\alpha = \beta$

Основные публикации по теме доклада

- Гринчик Н. Н. Моделирование электрофизических и теплофизических процессов в пористых средах. Минск: Белорусская наука, 2008.
- Гринчик Н. Н., Жук В. А., Хмыль А. А. и др. Взаимодействие тепловых и электрических явлений в поляризованных средах // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 11. С. 67–76.
- Гринчик Н. Н., Цурно В. А. К проблеме моделирования взаимодействия нестационарных электрических, тепловых и диффузионных полей в сложных средах // Инженерно-физический журнал. 2002. Т. 75, № 3. С. 215–228.
- Grinchik N. N. et al (2011) Fundament problems of the electrodynamics of heterogeneous media with boundary conditions corresponding to the total-current continuity // Electromagnetic Wave Propagation in Complex Matter. INTECH, Rijeka, ISBN 978-953-307-445-0.
- Grinchik N. N., Grinchik Yu. N. Fundamental problems of the electrodynamics of heterogeneonsmedia // Physics Research International. 2012. Vol. 2012. Article ID 185647.
- Grinchik N. N. Electrodynamics of inhomogeneous (laminated, angular) structures // Journal of Electromagnetic Analysis and Applications. 2014. Vol. 6. Pp. 57–105.