

уменьшить в отношении $1 + \frac{N_e}{N_\gamma}$, где N_e — число конверсионных электронов, а N_γ — число γ -квантов, испускаемых в единицу времени [63]. Так, например, если энергия возбуждения равняется 25 keV и $l=5$, то время жизни, вычисленное по (15.3) и равное $\sim 2 \cdot 10^8$ лет, уменьшается до $\sim 10^4$ лет.

Заметим, что метастабильное состояние, в котором находится изомер, не обязательно должно отличаться от основного состояния значением углового момента. Вполне вероятно, что некоторые случаи ядерной изомерии можно объяснить, если предположить, что основное и метастабильное состояния отличаются различной чётностью, угловые же моменты обоих состояний равны нулю [64]. Если эти условия выполнены, то переход из метастабильного в основное состояние с излучением дипольного и квадрупольного γ -квантов становится невозможным. Кроме того, в первом приближении невозможны вылет атомного электрона и образование пар. Переходы из метастабильного в основное состояние могут происходить только благодаря процессам второго приближения (эмиссия двух γ -квантов, вылет двух атомных электронов и т. д.). Вероятность этих процессов в случае малой разности энергий метастабильного и основного состояния крайне мала, благодаря чему время жизни метастабильного состояния оказывается достаточно большим.

ГЛАВА III

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 16. Дисперсионная формула. В предыдущих параграфах было показано, что при достаточно больших энергиях возбуждения составного ядра, образующегося в результате слияния исходного ядра с быстрой частицей, расстояния между соседними уровнями составного ядра и их ширины имеют один и тот же порядок величины, так что по существу в этом случае мы имеем дело с непрерывным энергетическим спектром.

Если энергия возбуждения составного ядра невелика, что имеет место, когда это ядро образуется в результате реакции с медленной частицей, то ширины уровней меньше расстояний между ними.

В этих случаях особенно резко проявляется роль отдельных уровней составного ядра. Вероятность образования составного ядра и выход ядерных реакций в этом случае чрезвычайно сильно зависят от энергии падающей частицы, причём эта зависимость носит резонансный, а не монотонный характер. Можно указать, что сечение поглощения нейтронов, обладающих определёнными значениями энергии (эти значения энергии называются резонансными), может в несколько тысяч раз превосходить простое поперечное сечение ядра, равное πR^2 .

Мы перейдём теперь к рассмотрению резонансных явлений, наблюдающихся при ядерных реакциях. Заметим предварительно, что существует определённая аналогия между процессами, происходящими при ядерных реакциях, и рассеянием света атомными системами [65]. Действительно, как мы видели выше, столкновение ядра A с частицей a приводит сначала к поглощению послед-

ней, т. е. к образованию составного ядра C , которое испускает затем частицу b . Формально эта схема аналогична следующему описанию процесса рассеяния света атомом: световой квант, частота и волновой вектор которого равны ω и k , поглощается атомом, который затем испускает квант с частотой ω' и волновым вектором k' .

При рассмотрении рассеяния света атомом пользуются теорией возмущений. Что касается процессов ядерной динамики, то, строго говоря, теория возмущений к описанию этих процессов неприменима, так как в отличие от задачи о рассеянии света, где взаимодействие между атомом и светом мало (ввиду малости постоянной тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{hc}$), взаимодействие

между ядром и падающей на него частицей очень велико при малой энергии относительного движения, т. е. именно в тех случаях, когда наблюдаются резонансные явления.

Тем не менее представляет интерес выяснить, к каким результатам приводит теория возмущений, если её применить к описанию ядерной реакции $A+a \rightarrow C \rightarrow B+b$. Мы покажем далее, что результаты, к которым приводит теория возмущений, не зависят от сделанного в теории возмущений предположения о малости энергии взаимодействия и являются поэтому правильными.

Итак, мы будем пока пользоваться теорией возмущений [65], [66].

Нас интересует вероятность процесса $A+a \rightarrow C \rightarrow B+b$. Рассматриваемый процесс относится к эффектам второго приближения теории возмущений. Пренебрегая высшими приближениями, мы получим во втором приближении теории возмущений следующую формулу для эффективного сечения процесса $A+a \rightarrow C \rightarrow B+b$:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = 4\pi^2 k^2 \left| \sum_r \frac{H_r^{Aa} H_r^{Bb}}{E^A + E^a - E_r^C + \frac{i}{2} \gamma_r} \right|^2, \quad (16.1)$$

где суммирование производится по всем «промежуточным» состояниям, т. е. по всем уровням составного ядра E_r^C ; E^A и E^a обозначают энергии исходного ядра A и частицы a ; H_r^{Aa} — матричный элемент, отвечающий пе-

реходу из начального состояния, в котором имеется частица a и исходное ядро A , в состояние r составного ядра C ; H_{Bb}^r — матричный элемент перехода из состояния r в конечное состояние (частица b и ядро B)^{*}. Индексы A и B служат здесь как для обозначения ядер, так и для обозначения состояний, в которых эти ядра находятся.

Наконец, γ_r представляет собой полную ширину уровня r , которая, с точностью до множителя \hbar , совпадает с отнесённой к единице времени вероятностью распада ядра C , находящегося в состоянии r :

$$\gamma_r = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{B'b'} |H_{B'b'}^r|^2, \quad (16.2)$$

где суммирование производится по всем видам частиц b' , могущих вылететь из ядра C , и по всем состояниям ядра B' , остающегося после вылета b' .

Частичная ширина уровня r , отвечающая вылету частицы b , равняется:

$$\gamma_b^r = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_B |H_{Bb}^r|^2 \quad (16.2')$$

(суммирование производится по всем состояниям остающегося ядра B).

Эта формула не учитывает вырождения ядерных уровней. Если учесть вырождение, связанное с существованием углового момента, то мы получим формулу^[66]:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \frac{\pi k^2}{(2s+1)(2l+1)} \sum_{l'l''j} (2J+1) \times \\ \times \left| \sum_r \frac{u_r^{Aa} u_r^{Bb}}{E^A + E^a - E_r^C + \frac{i}{2} \gamma_r} \right|^2. \quad (16.3)$$

^{*}) Входящая в матричные элементы волновая функция частицы a предполагается нормированной на энергию. Плоская волна, нормированная на энергию, имеет вид

$$\psi_E = \left(\frac{4\pi k^3 dk}{(2\pi)^3 dE} \right)^{1/2} e^{ikr},$$

где k — волновой вектор частицы.

Здесь i, J, i' — моменты количества движения ядер A, C и B ; s и s' — значения спина частиц a и b , l и l' — орбитальные и j и j' — полные моменты этих частиц. Величины u представляют собой матричные элементы, пропорциональные H и нормированные таким образом, что соответствующие частичные ширины равны

$$\gamma_{Aa i j}^{r J} \equiv \gamma_{Aa}^r = |u_{Aa}^r|^2$$

(в числе индексов, определяющих γ , отмечены моменты ядра C и частицы a). В формуле (16.3) в сумме, модуль которой возводится в квадрат, суммирование производится по всей совокупности квантовых чисел r , характеризующих составное ядро, за вычетом углового момента C . Суммирование по $l j l' j' J$ производится по всем возможным значениям моментов (угловых и полных) падающей и вылетающей частиц, а также по моменту количества движения промежуточного ядра C .

Формула (16.3) показывает, что состояния составного ядра, характеризующиеся различными значениями момента количества движения J , не интерферируют друг с другом. Формула (16.3) известна под названием дисперсионной.

Как явствует из этой формулы, сечение для процесса $A + a \rightarrow B + b$ достигает максимума, если энергия падающей частицы E^a становится равной одному из значений $E_r = E_r^C - E^A$. Эти значения энергии называются резонансными.

Если энергия падающей частицы близка к одной из резонансных энергий E_r , то в (16.3) главную роль играет только один член. При этом формула (16.3) приобретает вид

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2l+1)(2s+1)} \frac{\gamma_{Aa}^{rJ} \gamma_{Bb}^{rJ}}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{rJ}^2}. \quad (16.4)$$

Эта формула называется формулой Брейта-Вигнера^[65]. Входящая сюда величина γ_{Aa}^{rJ} представляет собой частичную ширину уровня rJ составного ядра по отношению к вылету частицы a (состояние остающегося

ядра обозначено символом A). Аналогичный смысл имеет величина γ_{Bb}^{rJ} ; наконец, γ^{rJ} представляет собой полную ширину уровня rJ , равную

$$\gamma^{rJ} = \sum_{bB} \gamma_{Bb}^{rJ}$$

(суммирование производится по всем видам вылетающей частицы b и по всем состояниям остающегося ядра B).

Частичные ширины, а также полная ширина уровня rJ зависят от энергии падающей частицы E . Выясним, какова эта зависимость. Заметим предварительно, что волновая функция падающей частицы с моментом l , нормированная на энергию, имеет вид^[11]

$$\psi_a = \left(\frac{2}{\pi} \frac{dk}{dE} \right)^{1/2} \frac{\chi_l(kr)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где k — волновой вектор, Y_{lm} — шаровая функция, а χ_l — решение уравнения

$$\frac{d^2 \chi_l(kr)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l = 0,$$

ведущее себя при больших r как $\sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right)$; при малых r ($kr \ll 1$), $\chi_l(kr) \sim (kr)^{l+1}$.

Рассмотрим случай малых энергий падающей частицы, когда $kR \ll 1$. В этом случае в матричный элемент, определяющий величины γ , входят малые значения аргумента волновой функции падающей частицы. Ясно, что энергия падающей частицы может входить только через посредство ψ_a . Таким образом матричный элемент, определяющий γ_{Aa}^{rJ} , содержит в качестве множителя $\left(\frac{dk}{dE} \right)^{1/2} k^{l+1}$, т. е. $k^{l+1/2}$. Отсюда вытекает, что

$$\gamma_{Aa}^{rJ} \sim k^{2l+1} \sim \lambda^{-(2l+1)}.$$

Мы можем поэтому представить γ_{Aa}^{rJ} в виде

$$\gamma_{Aa}^{rJ} = \Gamma_{Aa}^{rJ} \left(\frac{\lambda_r^a}{\lambda} \right)^{2l+1} = \Gamma_{Aa}^{rJ} \left(\frac{E^a}{E_r^a} \right)^{l+\frac{1}{2}}, \quad (16.5)$$

где E_r^a и λ_r^a — резонансная энергия и соответствующая ей длина волны частицы a , Γ_{Aa}^{rJ} — значение рассматриваемой частичной ширины при резонансе. (В числе индексов, определяющих ширины, отмечены моменты ядра C и частицы a .)

Заметим, что эта формула годится также и в том случае, если частицей a является γ -квант; для дипольного кванта следует в формуле (16.5) положить $l=1$, для квадрупольного кванта $l=2$ и т. д.

Пользуясь (16.5), можно представить дисперсионную формулу (16.4), справедливую в том случае, когда существенную роль играет только один уровень, в следующем виде:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \left(\frac{\lambda_r^a}{\lambda}\right)^{2i+1} \left(\frac{\lambda_r^b}{\lambda}\right)^{2i+1} \times \\ \times \frac{\Gamma_{Aa}^{rJ} \Gamma_{Bb}^{rJ}}{(E - E_r^a)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{rJ}^2}, \quad (16.6)$$

где λ' — длина волны вылетающей частицы b .

Заметим, что зависимость от энергии, даваемая формулой (16.5), справедлива, строго говоря, только для достаточно медленных частиц, так как мы предполагали при выводе этой формулы, что $kR \ll 1$.

Поскольку в этом случае волновая функция частицы с моментом l пропорциональна $(kr)^{l+1}$, наиболее важную роль играет волна с наименьшим l , т. е. с $l=0$. (В случае света нет волны с $l=0$, и наименьшее l равно 1^[67].) Пользуясь (16.5), отсюда можно заключить, что частичная ширина по отношению к вылету медленной частицы пропорциональна \sqrt{E} , где E — энергия частицы, покидающей составное ядро. Заметим, что этот результат мы имели уже раньше (см. (13.7)).

Для быстрых частиц ($kR \gg 1$) формула (16.5) неприменима. Практически, однако, в этом случае часто знание точной зависимости γ_{Aa}^{rJ} от E не является необходимым ввиду энергетической монохроматичности падающих частиц.

Если энергия падающей частицы велика, то для резонанса существенны высоко расположенные уровни составного ядра, расстояние между которыми мало по сравнению с энергией частицы. Обычно интервал энергии, в котором находятся падающие частицы, также гораздо больше этого расстояния. Поэтому необходимо усреднить значение ширины по интервалу монохроматичности частиц. Усреднённую ширину можно считать не зависящей от энергии частицы. Иными словами, мы можем заменить величину γ_{Aa}^{rJ} её значением при резонансе, т. е. считать, что $\gamma_{Aa}^{rJ} \approx \Gamma_{Aa}^{rJ}$.

Пользуясь этим выводом, представим ширину γ_{rJ} в виде

$$\gamma_{rJ} = \sum \Gamma_{Bb}^{rJ} + \sum \sqrt{\frac{E^b}{E_r^b}} \Gamma_{Bb}^{rJ}, \quad (16.7)$$

(быстрые частицы) (медленные частицы)

где E^b означает энергию вылетающей частицы b ; первая сумма распространяется на быстрые, а вторая — на медленные частицы, могущие покинуть составное ядро, находящееся в состоянии rJ . Энергия вылетающей частицы E^b зависит от энергии падающей частицы E и от энергии возбуждения E^B ядра B , остающегося после её вылета:

$$E^b = E^A + E - E^B.$$

Отметим несколько случаев применения формулы (16.6).

Если и падающая и вылетающая частицы являются быстрыми, то

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (16.8)$$

Если падающая частица — медленная, а вылетающая — быстрая, то, положив в (16.5) $l=0$, получим:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda \lambda_r^a \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (16.9)$$

Заметим, что, помимо резонансного множителя, сюда входит ещё множитель $\lambda \sim \frac{1}{v}$ (v — скорость падающей частицы).

Если и падающая и вылетающая частицы — медленные, то

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \frac{\lambda}{\lambda'} \lambda_r^a \lambda_r^b \frac{2J+1}{(2s+1)(2l+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4}\gamma_r^2}. \quad (16.10)$$

Заметим, что если в реакции участвуют медленные частицы, то действуют строгие правила отбора, касающиеся углового момента. Действительно, так как мы рассматриваем случай медленных частиц, то для них $l=0$ и поэтому момент частицы совпадает с её спиновым моментом s .

Момент количества движения составного ядра J равен векторной сумме s и i , где i — момент количества движения исходного ядра. Величина J заключена, как известно, в пределах

$$|i-s| \leq J \leq i+s. \quad (16.11)$$

Отсюда следует, что если падающей частицей является медленный нейтрон или протон, то $J = i \pm \frac{1}{2}$.

Если падающей частицей является медленная α -частица ($s=0$), то $J = i$.

При поглощении дипольного γ -кванта $J = i$, $i = \pm 1$ (переход $0 \rightarrow 0$ запрещён); при поглощении квадрупольного кванта $J = i$, $i \pm 1$, $i \pm 2$ (при этом запрещены переходы $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$, $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$).

Остановимся ещё на правилах отбора, касающихся чётности волновой функции. Напомним, что волновая функция системы называется чётной, если она не меняет своего знака при изменении знака координат всех частиц, входящих в систему, и называется нечётной, если её знак при этом меняется. Мы называем характером чётности волновой функции число w , равное ± 1 , в зависимости от того, является ли волновая функция чётной или нечётной.

Характер чётности системы не меняется при её самопроизвольном распаде. Отсюда следует, что характер чётности составного ядра C , распадающегося на ядра B и Q , равняется

$$w_C = w_B w_Q w_{BQ},$$

где w_B и w_Q — характеры чётности ядер B и Q , а w_{BQ} — характер чётности волновой функции, описывающей относительное движение ядер B и Q . Если Q — элементарная частица, то $w_Q = 1$. Известно, что

$$w_{BQ} = (-1)^{l'},$$

где hl' — момент количества движения частицы Q относительно B . Поэтому

$$w_C = w_B w_Q (-1)^{l'}. \quad (16.12)$$

Аналогично мы можем написать

$$w_C = (-1)^{l'} w_A w_P, \quad (16.12')$$

где A и P обозначают частицы, в результате столкновения которых образовалось ядро C , и hl — момент частицы P относительно A .

Из приведённых формул следует, что при поглощении медленной частицы чётность не меняется. При поглощении дипольного γ -кванта чётность меняется, а при поглощении квадрупольного кванта не меняется.

§ 17. Теория резонансного рассеяния. Покажем теперь, что дисперсионная формула может быть получена из очень общих предположений, не основывающихся на малости каких-либо членов в гамильтониане ядерной системы и не связанных поэтому с обычной теорией возмущений *).

Рассмотрим сначала задачу о резонансном рассеянии частиц, отличающуюся особенной простотой математической трактовки. Предположим, что длина волны частицы значительно больше радиуса действия сил, так что главную роль играет орбитальный момент относи-

*) Выводу дисперсионной формулы, не основывающемуся на теории возмущений, посвящён целый ряд работ (см. [68], [69], [70], [71], [72]).

тельного движения частиц, равный нулю. В этих условиях рассеяние будет сферически симметричным.

Если расстояние r между частицами велико, то волновая функция частиц имеет следующий асимптотический вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi vr}} (e^{-ikr} - \beta_E e^{ikr}) \psi(i), \quad (17.1)$$

где k — волновой вектор, равный $\sqrt{2ME}$ (M — приведённая масса частиц, E — кинетическая энергия относительного движения, v — относительная скорость частиц); $\psi(i)$ — волновая функция, описывающая внутреннее состояние частиц.

Первое слагаемое в скобках представляет собой падающую, а второе — расходящуюся волну, причём обе они нормированы на единичный поток.

Величина β_E , зависящая от энергии, в рассматриваемом случае упругого рассеяния, равна по модулю единице, т. е.

$$\beta_E = e^{i\delta}, \quad (17.1')$$

где δ — вещественная величина, называемая «фазой на бесконечности». Сечение рассеяния $\sigma(E)$ связано с соотношением

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2. \quad (17.2)$$

Нас интересует ход зависимости сечения (17.2) от энергии. С этой целью важно выяснить вопрос об особых точках функции $\sigma(E)$. Из физических соображений ясно, что при положительных вещественных значениях E функции $\sigma(E)$ и $\beta(E)$ особых точек не имеют. Поэтому мы расширим область переменной E и будем рассматривать также комплексные значения энергии, которые в дальнейшем обозначаются через W . В комплексной области функция $\sigma(W)$ имеет особые точки. Мы увидим, что существование особых точек, лежащих достаточно близко от вещественной оси, вызывает острые максимумы в ходе сечения с энергией (вдоль вещественной положительной полуоси).

Введение комплексных значений энергии является, как известно [143], очень полезным при изучении свойств распадающихся систем, так как мнимая часть энергии непосредственно связана со временем жизни системы. Итак, мы введём комплексные значения энергии W и, предполагая функцию $\sigma(W)$ аналитической, исследуем поведение функции $\sigma(W)$ в окрестности особой точки. Будем предполагать, что при конечных значениях W функция $\sigma(W)$ имеет только простые полюсы.

В дальнейшем мы будем исходить из двух основных свойств функции β_E . Первое свойство состоит в том, что на положительной вещественной полуоси, т. е. при $W = E$, функция β_E по модулю равна единице. Это свойство означает, что отсутствует поглощение частиц, в силу чего интенсивность расходящейся волны должна быть равна интенсивности падающей волны.

Чтобы разъяснить второе свойство, заметим, что, если в выражении (17.1) заменить k на $-k$, то член e^{-ikr} , описывающий падающую волну, будет представлять расходящуюся волну, и наоборот. Так как мы рассматриваем чисто упругое рассеяние, то безразлично, что называть падающей и что расходящейся волной. Поэтому замена $k \rightarrow -k$ не может привести к существенному изменению волновой функции (17.1). Ясно, что квадрат модуля (17.1), имеющий непосредственный физический смысл плотности вероятности, должен оставаться при такой замене неизменным.

Отсюда легко убедиться, что при замене k на $-k$ величина β_E должна перейти в комплексно сопряжённую ей величину β_E^* . Это свойство функции β_E можно сформулировать ещё следующим образом. Представим себе, что мы совершаем обход в плоскости комплексного переменного W вокруг точки $W = 0$. Такой обход эквивалентен замене k на $-k$, так как в результате обхода величина \sqrt{E} , пропорциональная k , меняет свой знак. Поэтому можно сказать, что после обхода вокруг точки $W = 0$ величина β_E переходит в комплексно сопряжённую ей величину β_E^* .

Введём в рассмотрение новую переменную $z = \sqrt{W}$; мы можем тогда рассматривать β_W как однозначную функцию от z :

$$\beta_W = \beta(z),$$

которая равна по модулю единице на вещественной оси и которая принимает комплексно сопряжённые значения в точках $z = \sqrt{E}$ и $z = -\sqrt{E}$ ($E > 0$):

$$\beta(-\sqrt{E}) = \beta(\sqrt{E})^* = \frac{1}{\beta(\sqrt{E})}.$$

В силу аналитичности $\beta(z)$ отсюда следует, что

$$\beta(-z) = \frac{1}{\beta(z)}. \quad (17.3)$$

Пусть точка $z = z_0$ есть полюс функции $\beta(z)$. Так как на вещественной оси $|\beta(z)| = 1$, то отсюда следует, что точка $z = z_0^*$ будет нулём $\beta(z)$ (*). Поэтому $\beta(z)$ можно представить в виде

$$\beta(z) = \frac{z - z_0^*}{z - z_0} \beta_1(z), \quad (17.4)$$

где $\beta_1(z)$ в точке $z = z_0$ регулярна и подобно $\beta(z)$ равна по модулю единице на вещественной оси.

Используя (17.3), мы получим из (17.4):

$$\frac{1}{\beta(z)} = \frac{-z - z_0^*}{-z - z_0} \beta_1(-z),$$

т. е.

$$\beta(z) = \frac{z + z_0}{z + z_0^*} \beta_2(z), \quad (17.4')$$

где $\beta_2(z)$ регулярна в точке $z = -z_0^*$.

*) В этом легко убедиться следующим образом. Введём в рассмотрение функцию

$$\gamma(z) = i \frac{1 + \beta(z)}{1 - \beta(z)}.$$

Когда z принимает вещественные значения, то, как показывает непосредственная проверка, функция $\gamma(z)$ также принимает веще-

Таким образом точка $z = -z_0^*$ является полюсом $\beta(z)$, а точка $z = -z_0$ — нулём $\beta(z)$.

Из (17.4) и (17.4') следует, что если полюс z_0 не чисто мнимый, то

$$\beta_E = \beta(\sqrt{E}) = \frac{\sqrt{E} - z_0^*}{\sqrt{E} - z_0} \frac{\sqrt{E} + z_0}{\sqrt{E} + z_0^*} \chi(\sqrt{E}), \quad (17.5)$$

где $\chi(z)$ регулярна в точках z_0 и $-z_0^*$, равна по модулю единице на вещественной оси и так же как и $\beta(z)$ удовлетворяет условию (17.3).

Если точка z_0 лежит на мнимой оси, то вместо (17.5) мы получаем более простое представление β_E :

$$\beta_E = \frac{\sqrt{E} + iz}{\sqrt{E} - iz} \chi(\sqrt{E}). \quad (17.6)$$

Рассмотрим функцию $\frac{\ln \chi(z)}{z}$. В окрестности точки $W = 0$ плоскости W эта функция однозначна, так как при обходе вокруг нуля и числитель и знаменатель меняют свой знак. Отсюда следует, что

$$\gamma(z) = \pm e^{i\varphi(W)}, \quad (17.6')$$

где $\varphi(W)$ — аналитическая функция от W , регулярная в точке $W = 0$, а также в точках $W = z_0^2$, z_0^{*2} и принимающая вещественные значения на положительной половине вещественной оси W .

ственные значения. Поэтому, согласно принципу зеркального отображения, имеет место соотношение

$$\gamma(z^*) = \gamma(z)^*.$$

Переписав это соотношение в виде

$$i \frac{1 + \beta(z^*)}{1 - \beta(z^*)} = -i \frac{1 + \beta(z)^*}{1 - \beta(z)^*},$$

мы получим:

$$\beta(z^*) \beta(z)^* = 1.$$

Последнее соотношение показывает, что если точка $z = z_0$ является нулём функции $\beta(z)$, то точка $z = z_0^*$ является её полюсом.

Таким образом, если точка z_0 не лежит на мнимой оси, то мы получаем следующее представление для β_E :

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b}, \quad (17.7')$$

где

$$E_0 = z_0 z_0^*, \quad b = \frac{1}{2} \text{Im} z_0.$$

В том случае, если точка z_0 лежит на мнимой оси, представление β_E имеет вид

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{\sqrt{E} + iz}{\sqrt{E} - iz}. \quad (17.8')$$

Выбор знака в формулах (17.7'), (17.8') может быть произведён, исходя из условия конечности сечения рассеяния при $E \rightarrow 0$. Так как $\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2$, то отсюда следует, что

$$\lim_{E \rightarrow 0} \beta_E = 1.$$

Поэтому в формуле (17.7') следует взять верхний, а в формуле (17.8') нижний знак:

$$\beta_E = e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b}, \quad (17.7)$$

$$\beta_E = e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{iz + \sqrt{E}}{iz - \sqrt{E}}. \quad (17.8)$$

Определим теперь сечение упругого рассеяния. Подставляя (17.7) в (17.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b} - 1 \right|^2 = \\ &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} - 1 \right|^2 + \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \\ &+ 2 \frac{\pi}{k^2} \text{Re} \frac{i\gamma [1 - e^{-i\sqrt{E}\varphi(E)}]}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}}, \quad (17.9) \end{aligned}$$

где

$$\gamma = 2b\sqrt{E}. \quad (17.9')$$

Это выражение полезно при исследовании поведения сечения вблизи точки $E = E_0$, так как при этом $\varphi(E)$ не имеет особенностей.

Если $\varphi(E) = 0$, то (17.9) переходит в известную уже нам резонансную формулу

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (17.10)$$

определяющую сечение резонансного рассеяния вблизи уровня E_0 . Ширина уровня, согласно (17.9'), пропорциональна \sqrt{E} .

Этот результат нам уже известен (см. предыдущий параграф) и находится в соответствии с тем, что мы рассматриваем случай малых энергий, когда длина волны частицы велика по сравнению с радиусом действия сил, т. е. размерами ядра.

В общем случае, когда $\varphi(E) \neq 0$, сечение рассеяния (17.9) состоит из трёх слагаемых.

Первое слагаемое, не содержащее резонансного знаменателя, представляет собой так называемое потенциальное рассеяние, аналогичное рассеянию, происходящему в потенциальном поле.

Второе слагаемое описывает резонансное рассеяние и третьё — интерференцию обоих видов рассеяния.

Если энергия стремится к нулю, то потенциальное рассеяние стремится к пределу:

$$\sigma_{\text{pot}} = \frac{\pi \hbar^2}{M} |\varphi(0)|^2 \quad (17.11)$$

(мы считаем, что $E = \frac{k^2 \hbar^2}{M}$).

Экспериментально определяемое сечение рассеяния σ_s для медленных нейтронов имеет порядок величины πR^2 , где R — радиус ядра ($R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см).

Резонансное рассеяние (17.10) мало по сравнению с πR^2 , исключая случай близкого резонанса, поэтому σ_s обязано, главным образом, потенциальному рассеянию.

Заметим, однако, что σ_s изменяется немонотонно с ростом атомного номера. Это обстоятельство указы-

вает, повидимому, на то, что потенциальное рассеяние скорее соответствует рассеянию от потенциальной ямы, нежели рассеянию от барьера, так как в последнем случае рассеяние менялось бы монотонно с ростом атомного номера (оно равнялось бы $4\pi R^2$).

Определим теперь сечение рассеяния в том случае, когда величина β_E выражается формулой (17.8).

Подставляя (17.8) в (17.2), получим:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{iV\bar{E}\varphi(E)} \frac{\sqrt{E+iz}}{\sqrt{E-iz}} + 1 \right|^2.$$

Для достаточно малых энергий мы заменим $e^{iV\bar{E}\varphi(E)}$ на $1 + iV\bar{E}\varphi(0)$. В результате простых выкладок получим:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi E 1 - \alpha\varphi(0)}{k^2 E + z^2} = \frac{4\pi\hbar^2 1 - \alpha\varphi(0)}{M E + \alpha^2}. \quad (17.12)$$

Мы получили формулу, которая совпадает с формулой (1.7'), определяющей сечение рассеяния нейтронов протонами. При этом, если $\varphi(0) = 0$, то формула (17.12) соответствует тому случаю, когда радиус действия ядерных сил считается равным нулю. При $\varphi(0) \neq 0$ формула учитывает конечность радиуса ядра [см. (1.7')].

То обстоятельство, что при $\varphi(0) \neq 0$ учитывается конечность радиуса ядра, находится в соответствии с выражением (17.11), определяющем потенциальное рассеяние.

Итак, мы видим, что самые общие предположения о величине β_E приводят только к двум возможным выражениям для сечения рассеяния (17.9), (17.12).

Перейдём теперь, после рассмотрения резонансного рассеяния, к изучению общего случая распада составного ядра.

Будем попрежнему считать, что относительный момент количества движения частиц, образующих составное ядро, а также частиц, возникающих при его распаде, равняется нулю (это означает, что мы ограничиваемся рассмотрением достаточно медленных частиц). Для простоты мы не будем сначала учитывать спин ядер.

Начнём с определения общего сечения всех неупругих процессов σ_u .

Согласно формуле (12.6) σ_u связано с отношением амплитуд расходящейся и сходящейся волн β_E следующим соотношением:

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\beta_E|^2). \quad (17.13)$$

(Напомним, что если возможно поглощение частиц, то $|\beta| < 1$.)

Сечение упругого рассеяния равняется при этом:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} |1 - \beta_E|^2. \quad (17.14)$$

Выясним, какой вид имеет теперь β_E .

В случае чисто упругого рассеяния β_E вблизи уровня E_0 определяется формулой (17.7). Если возможно поглощение частиц, то формулу (17.7) следует заменить следующей:

$$\beta_E = e^{i\omega(E)} \frac{E - E_0 - i \left(\frac{\gamma}{2} - \gamma_e \right)}{E - E_0 - i \frac{\gamma}{2}}, \quad (17.15)$$

где $\omega(E)$ — вещественная функция, не имеющая особенностей при $E > 0$.

Величина γ_e удовлетворяет условию

$$\gamma_e < \gamma,$$

которое необходимо для того, чтобы модуль β_E был меньше единицы. Если $\gamma_e = \gamma$, то формула (17.15) переходит в (17.7).

Подставляя выражение (17.15) в (17.13), мы получим следующую формулу для общего сечения неупругих столкновений:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\pi}{k^2} \left(1 - \left| \frac{E - E_0 - i \left(\frac{\gamma}{2} - \gamma_e \right)}{E - E_0 - i \frac{\gamma}{2}} \right|^2 \right) = \\ &= \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e (\gamma - \gamma_e)}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Сечение упругого столкновения, согласно (17.14), имеет вид

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\omega(E)} + 1 - e^{i\omega(E)} \frac{i\gamma_e}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}} \right|^2. \quad (17.17)$$

Последняя формула отличается от формулы (17.9) только тем, что в числитель амплитуды резонансного рассеяния вместо полной ширины γ входит теперь величина γ_e . Если не учитывать потенциальное рассеяние, то формула (17.17) даёт:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (17.17')$$

откуда следует, что γ_e представляет собой частичную ширину по отношению к упругому рассеянию.

Вводя обозначение

$$\gamma_u = \gamma - \gamma_e,$$

перепишем формулу (17.16) для σ_u в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e \gamma_u}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (17.16')$$

Величина γ_u представляет собой суммарную ширину уровня для всех неупругих процессов.

Чтобы получить сечение σ_α для какого-либо определённого процесса α , необходимо лишь в формуле (17.16') заменить γ_u на соответствующую частичную ширину γ_α . Мы получим, таким образом, общую дисперсионную формулу

$$\sigma_\alpha = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e \gamma_\alpha}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (17.18)$$

В приведённых выше формулах мы считали спин ядра равным нулю. Покажем теперь, как учесть спин ядра.

Так как мы рассматриваем случай медленных частиц, то для них $l = 0$, и поэтому значения момента количества движения составного ядра J заключены в пределах

$$|i - s| \leq J \leq i + s,$$

где i — момент количества движения исходного ядра, s — спин падающей частицы.

Вероятность данного значения J равна:

$$\frac{2J + 1}{(2s + 1)(2i + 1)}, \quad (17.19)$$

так как общее число возможных ориентаций векторов i и s равно $(2s + 1)(2i + 1)$, а число ориентаций вектора J равно $2J + 1$.

Чтобы учесть спин ядра, нужно приведённые выше формулы для σ_s и σ_u умножить на фактор (17.19). Мы получим при этом формулу (16.4).

Дисперсионная формула (17.16') может быть получена ещё иным способом, который мы сейчас изложим [72].

Волновая функция падающей частицы, которая предполагается в дальнейшем медленной, вне ядра определяется формулой (17.1).

Определим радиус ядра R как наименьшее расстояние от центра ядра, на котором падающая частица уже не находится в сфере действия ядерных сил.

Величину β_E , входящую в (17.1'), можно выразить через логарифмическую производную волновой функции на поверхности ядра. Введём в рассмотрение функцию

$$f(E) = R \left(\frac{d}{dr} (r\psi) \right)_{r=R}, \quad (17.20)$$

тогда

$$\beta_E = -e^{-2ix} \frac{x - if}{x + if}, \quad (17.21)$$

где

$$x = kR.$$

Заметим, что хотя в действительности положение поверхности ядра не является резко очерченным, введение функции $f(E)$ имеет полный смысл, так как мы предполагаем, что длина волны частицы значительно больше радиуса действия ядерных сил R . В силу этого условия значение логарифмической производной волновой функции вне ядра не испытывает большого изменения на расстояниях порядка области диффузности ядерной поверхности.

Функцию $f(E)$ мы представим в виде

$$f(E) = f_0(E) - ih(E), \quad (17.21')$$

где f_0 и h — вещественные функции. Так как $|\beta_E| \ll 1$, то $h(E)$ должна удовлетворять условию

$$h \geq 0.$$

Используя выражение (17.21) для β_E , мы получим на основании (17.13), (17.14) следующие формулы для σ_u и σ_s :

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\pi}{k^2} (1 - |\beta_E|^2) = \frac{\pi}{k^2} \left(1 - \frac{(x-h)^2 + f_0^2}{(x+h)^2 + f_0^2} \right) = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \frac{xh}{(x+h)^2 + f_0^2}, \end{aligned} \quad (17.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\pi}{k^2} |1 - \beta_E|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{2ix} + \frac{x-ij}{x+ij} \right|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{x}{i(x+h) - f_0} + e^{ix} \sin x \right|^2. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Резонанс наступает в том случае, когда $f_0 = 0$. Значения энергии E , для которых f_0 обращается в нуль, мы называем резонансными уровнями.

Для значений энергии, близких к резонансному уровню E_0 , функцию $f_0(E)$ можно представить в виде

$$f_0(E) = (E - E_0) f'_0(E_0).$$

Пользуясь этим разложением и вводя обозначения

$$\gamma_e = -\frac{2x}{f'_0(E)}, \quad \gamma_u = -\frac{2h}{f'_0(E_0)},$$

представим σ_u и σ_s в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_u \gamma_e}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma_e^2}{4}}, \quad (17.24)$$

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{\frac{1}{2} \gamma_e}{E - E_0 + \frac{1}{2} \gamma_e} + e^{ix} \sin x \right|^2, \quad (17.25)$$

где

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_u.$$

Мы получили знакомые уже нам формулы.

Для того чтобы можно было интерпретировать γ_e и γ_u как частичные ширины по отношению к упругому и неупругому рассеянию, нужно показать, что

$$f'_0(E_0) < 0, \quad (17.26)$$

так как только при выполнении этого условия величины γ_e и γ_u будут положительными. (Напомним, что $h \geq 0$.) Неравенство (17.26) вытекает из следующих соображений.

Величина f , входящая в граничное условие (17.20), является функцией энергии возбуждения ядра $W = E + B$, где B — энергия связи частицы в ядре.

Функция $f(W)$ определяется логарифмической производной от волновой функции составного ядра.

Если исходить из уравнения Шредингера

$$H_0 \Psi_0 = W \Psi_0,$$

где H_0 — гамильтониан составного ядра, то с помощью волновой функции Ψ_0 мы не получим функции $f(W)$, так как мы не учитываем конечной величины времени

жизни составного ядра. С помощью функции Ψ_0 мы найдём лишь $f_0(W)$. Чтобы учесть конечность времени жизни состояний составного ядра, мы добавим к гамильтониану H_0 мнимый член $-i\gamma_u/2$, $\gamma_u > 0$. (Комплексное значение энергии $W - i\gamma_u/2$ приводит к характерному затухающему множителю в волновой функции $e^{-\gamma_u t/\hbar}$.)

Поэтому мы исходим из уравнения

$$\left(H_0 - \frac{1}{2}\gamma_u\right)\Psi = W\Psi$$

(W в обоих уравнениях имеет одно и то же значение.)

Знание Ψ даёт нам возможность определить $f(W)$. Переписав последнее уравнение в виде

$$H_0\Psi = \left(W + \frac{i\gamma_u}{2}\right)\Psi,$$

мы видим, что Ψ получается из Ψ_0 , если заменить в Ψ_0 величину W на $W + \frac{1}{2}\gamma_u$. По этой причине $f(W)$ совпадает с $f_0(W + i\gamma_u/2)$. Если $\gamma_u/2 \ll W$, то

$$f(W) \approx f_0(W) + \frac{i\gamma_u}{2} f'_0(W).$$

Сравнение с (17.21') показывает, что

$$h = -\frac{1}{2}\gamma_u f'_0(W).$$

Так как $h > 0$, то $f'_0(W) < 0$, что и утверждалось выше.

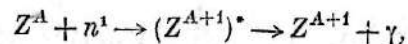
§ 18. Захват медленных нейтронов свободными ядрами. Возможны следующие процессы взаимодействия нейтронов с ядрами: упругое и неупругое рассеяние нейтронов, захват нейтронов с излучением γ -квантов (радиационный захват), захват нейтронов с испусканием заряженных частиц и, наконец, деление ядер под действием нейтронов.

Об упругом рассеянии мы говорили уже выше. Неупругое рассеяние возможно лишь в том случае,

когда энергии нейтрона достаточно для возбуждения ядра. В случае взаимодействия медленных *) нейтронов с лёгкими ядрами этот процесс энергетически невозможен, так как расстояние между наиболее низкими уровнями лёгких ядер по порядку величины составляет около 1 MeV. Делению ядер под действием нейтронов посвящён § 21.

В этом параграфе мы рассмотрим захват медленных нейтронов, сопровождаемый испусканием быстрых частиц (γ -кванта или заряженной частицы). Изучение этого процесса имеет важное значение, так как даёт возможность экспериментально определять параметры, входящие в дисперсионную формулу.

Радиационный захват нейтронов, происходящий по схеме**)



представляет собой очень распространённый тип реакции. Получающееся ядро Z^{A+1} может быть как стабильным, так и радиоактивным (искусственно радиоактивным ядром).

Эффективные сечения реакции такого типа в случае захвата медленных нейтронов могут достигать чрезвычайно больших значений, в тысячи раз превосходящих геометрические размеры захватывающих ядер. (Сечение захвата медленных нейтронов для ^{49}In превышает $20\,000 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, для ^{46}Rh составляет около $6\,100 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ и т. д. [74].)

Укажем примеры реакций, при которых захват медленных нейтронов сопровождается испусканием заряженных частиц — α -частиц и протонов. (Испускание дейтронов при захвате медленных нейтронов не наблюдается, так как энергетически оно невозможно ввиду большой внутренней энергии дейтрона.)

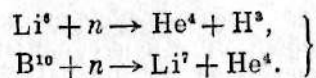
*) Под медленными понимаются нейтроны в энергетическом интервале от нескольких тысяч вольт до тепловых энергий.

**) Z^A обозначает ядро с зарядом Z и массовым числом A ; $(Z^{A+1})^*$ обозначает составное ядро, находящееся в возбуждённом состоянии.

Захват нейтрона с испусканием α -частицы происходит по схеме

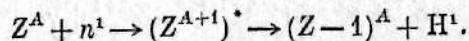


Можно указать следующие примеры таких реакций (происходящих с медленными нейтронами):



Для тепловых нейтронов эффективные сечения этих реакций очень велики: для первой $900 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, для второй — $3000 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ [75].

Захват нейтрона с испусканием протона происходит по схеме



Можно указать следующий пример такой реакции:



Заметим, что в случае захвата не очень быстрых нейтронов тяжёлыми ядрами испускание заряженных частиц становится крайне мало вероятным ввиду большой высоты потенциального барьера, который необходимо пройти частице; поэтому в этом случае происходит, главным образом, радиационный захват нейтронов.

Перейдём к рассмотрению эффективного сечения для захвата медленных нейтронов. Будем считать, что захват нейтрона обусловлен наличием одного резонансного уровня, энергию которого обозначим через E_r .

Общая дисперсионная формула даёт в этом случае следующее выражение для сечения захвата нейтрона, сопровождающегося испусканием частицы Q , которую мы считаем быстрой:

$$\sigma_Q^n(E) = \pi \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \lambda \lambda_r \frac{\Gamma_n \Gamma_Q}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (18.1)$$

Здесь Γ_n — частичная нейтронная ширина уровня при резонансе; Γ_Q — частичная ширина по отношению к вы-

лету быстрой частицы (в случае радиационного захвата вместо Γ_Q мы пишем Γ_r); γ_r — полная ширина уровня r ; λ — длина волны падающего нейтрона; λ_r — значение λ при резонансе; J и i — угловые моменты составного и исходного ядер; $s = \frac{1}{2}$ — спин нейтрона.

Полная ширина γ_r может быть представлена в виде

$$\gamma_r = \Gamma_n \left(\frac{E}{E_r} \right)^{1/2} + \sum_Q \Gamma_Q,$$

где первое слагаемое представляет собой нейтронную ширину по отношению к процессу реэмиссии медленного нейтрона, а второе слагаемое — сумму частичных ширин по отношению к вылету быстрых частиц Q . Ввиду фактора \sqrt{E} первое слагаемое мало по сравнению со вторым. Обычно возможно испускание только одного сорта частиц, поэтому сумма $\sum \Gamma_Q$ содержит только одно слагаемое.

Итак, мы можем считать γ_r равным

$$\gamma_r \approx \Gamma_r \approx \Gamma_Q.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае захвата медленного нейтрона имеют место правила отбора

$$J = i \pm \frac{1}{2}, \quad \text{если } i \neq 0,$$

$$J = \frac{1}{2}, \quad \text{если } i = 0.$$

Поэтому выражение (18.1) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_Q^n(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1} \right) \lambda \lambda_r \frac{\Gamma_n \Gamma_Q}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (18.2)$$

Если измерять энергии и ширины в вольтах, то мы получим:

$$\sigma_Q^n(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_r}{E}} \frac{1}{1+x^2}, \quad x = \frac{E - E_r}{\Gamma/2}, \quad (18.2')$$

где σ_0 — значение сечения при резонансе, равное

$$\sigma_0 = 1,3 \cdot 10^{-28} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \frac{1}{E_r} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \text{ см}^2.$$

причём мы положили здесь $\Gamma_Q \sim \Gamma_r \equiv \Gamma$.

Заметим, что сечение упругого резонансного рассеяния нейтронов при наличии только одного уровня равняется:

$$\sigma_n^n(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \lambda_r^2 \frac{\Gamma_n^2}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (18.3)$$

Отношение сечений рассеяния и захвата равно:

$$\frac{\sigma_n^n}{\sigma_Q} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_Q} \left(\frac{E}{E_r}\right)^{1/2}. \quad (18.3')$$

Для ядер, сильно поглощающих нейтроны (Cd, Ag, Rh и т. д.), это отношение очень мало. (В случае ^{109}Ag сечение захвата составляет $\sim 3560 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, а сечение рассеяния $\sim 9 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, для ^{115}Cd сечение захвата — $4500 \div 3300 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, сечение рассеяния $\sim 3,7 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ [74].)

Отсюда следует, что, как правило, для составных ядер среднего атомного веса, возникающих в результате захвата медленных нейтронов, нейтронная ширина значительно меньше радиационной ширины, что находится в согласии с формулами (13.7) и (15.1'). Радиационная ширина составляет для таких ядер около 1eV (возможны вариации в 10 раз в ту и другую сторону). Нейтронная ширина при резонансной энергии $\sim 1 \text{ eV}$ находится обычно в пределах $10^{-4} - 10^{-2} \text{ eV}$. Малая величина нейтронной ширины (этим обстоятельством мы уже пользовались выше, пренебрегая величиной γ_n в общем выражении для ширины γ), допускает простую физическую интерпретацию.

Если составное ядро образуется в результате захвата медленного нейтрона, то имеется лишь одно конечное состояние, в котором может находиться ядро после испускания нейтрона, а именно — основное состояние исходного ядра. Если же происходит излучение γ -кванта,

то число конечных состояний может быть достаточно большим, так как энергетически возможно любое состояние конечного ядра с энергией возбуждения, не превышающей примерно 8 MeV (энергия связи нейтрона). Иными словами, после излучения γ -кванта ядро может ещё находиться в возбуждённом состоянии, переход из которого в основное состояние будет сопровождаться излучением новых γ -квантов. И, действительно, экспериментально было показано [76], что число γ -квантов, излучаемых ядрами кадмия в результате захвата нейтронов, в несколько раз превосходит число поглощённых нейтронов. Таким образом излучение γ -кванта связано с меньшей концентрацией энергии составного ядра на одной степени свободы, чем в случае испускания медленного нейтрона, которое в рассматриваемых условиях требует почти полного сосредоточения всей энергии возбуждения на одной ядерной частице.

Очевидно, что почти полная концентрация энергии на одной ядерной частице статистически очень мало вероятна. Это обстоятельство сильно уменьшает нейтронную ширину, которая при $E < 10^4 \text{ eV}$ ($A \sim 100$) становится меньше радиационной ширины, хотя взаимодействие ядерных частиц друг с другом велико по сравнению с их взаимодействием с электромагнитным полем. Если бы только что указанные статистические соображения не имели места, то корпускулярные ширины (нейтронная, протонная и др.) были бы гораздо больше радиационной ширины (такие соотношения имеют место в случае лёгких ядер; например, для Co и Mn в области энергий 100—1000 eV нейтронная ширина значительно больше радиационной ширины [118]).

Подчеркнём ещё раз, что нейтронная ширина мала по сравнению с радиационной шириной только в рассмотренном выше специальном случае, когда составное ядро образуется в результате захвата медленного нейтрона, причём ядро не является лёгким.

Если энергия падающего нейтрона возрастает, то нейтронная ширина образующегося составного ядра увеличивается, в то время как радиационная ширина почти не меняется. При энергиях нейтрона $\sim 1 \text{ MeV}$ нейтронная

ширина уже значительно больше радиационной ширины (малая величина радиационной ширины связана с тем обстоятельством, что взаимодействие между излучением и материей вообще не велико).

Сечение радиационного захвата быстрых нейтронов ($E > 1 \text{ MeV}$) можно оценить по формуле (см. § 12)

$$\sigma_r^n \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}, \quad (18.4)$$

где R —радиус ядра, а Γ —полная ширина уровня. Поскольку в случае быстрых частиц $\Gamma_\gamma \ll \Gamma$, это сечение значительно меньше геометрического сечения ядра, которым определяется полное сечение для всех неупругих процессов. (Для тяжёлых ядер $\sigma_r^n \approx 0,1 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$). В области больших энергий главную роль играют процессы упругого и неупругого рассеяния нейтронов (реэмиссия нейтронов). Мы уже говорили раньше (§ 14), что средняя энергия нейтронов, покидающих составное ядро, будет при этом $\sim 2T$ (T —температура ядра).

Возвратимся к рассмотрению радиационного захвата медленных нейтронов.

Зная из эксперимента сечение радиационного захвата $\sigma_r^n(E)$ как функцию энергии нейтрона, мы можем найти, пользуясь формулой (18.2) Γ_n , Γ_γ и $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$. Отсюда можно определить Γ_n и Γ_γ .

Сечение захвата нейтронов содержит в качестве множителя λ . Поэтому для достаточно малых значений E , меньших энергии первого резонансного уровня, существует область энергии, где сечение захвата обратно пропорционально скорости нейтрона (закон $1/v$).

Относительное изменение резонансного множителя $\frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}$ меньше относительного изменения $1/v$,

если

$$4E |E_r - E| \ll (E_r - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2.$$

Отсюда следует, что для выполнения закона $1/v$ энер-

гия нейтрона должна быть меньше большей из величин E_r и Γ^* .

Учитывая особенности в расположении уровней тяжёлых и лёгких ядер, можно заключить, что в последнем случае интервал энергии, в котором действует закон $1/v$, будет гораздо больше, чем в случае тяжёлых ядер. Для последних известны уровни, близко примыкающие или даже лежащие в тепловой области ($kT \sim 1/40 \text{ eV}$ при комнатной температуре). Например, для Gd обнаружено сильное резонансное поглощение нейтронов с энергией $0,03 \text{ eV}$; для Cd найден резонансный уровень при $0,082 \text{ eV}$, для Eu — при $0,465 \text{ eV}$, для Ir — при $0,635 \text{ eV}$, для Rh — при $1,28 \text{ eV}$, для Sm — при $0,096 \text{ eV}$; Dy обладает отрицательным уровнем^[77]. Ясно, что в таких случаях закон $1/v$ имеет малую область применимости. Можно думать, что в случае лёгких ядер [Li, B, N и т. д.] первый уровень находится на высоте, по порядку величины равной расстоянию между наиболее низкими уровнями, что составляет около 10^5 eV . При этом закон $1/v$ может оказаться справедливым вплоть до энергий порядка нескольких десятков тысяч eV.

Заметим, что если сечение захвата нейтрона обратно пропорционально его скорости, то вероятность захвата, отнесённая к единице времени, не зависит от энергии нейтрона.

В формуле (18.2) мы предполагали захватывающее ядро свободным и неподвижным.

Это значит, что формула (18.2) относится, строго говоря, к поглощению нейтронов в газе, причём атомы газа предполагаются неподвижными.

Если поглощение нейтронов происходит в твёрдом теле, то ядра нельзя уже считать свободными. Учёту связи ядер в твёрдом теле посвящён § 25. В настоящем параграфе мы подробно рассмотрим вопрос о поглощении нейтронов в газе^[66].

Предположение о неподвижности ядер газа является законным, если составное ядро образуется в результате

* Если E_r —отрицательная величина, то E должно быть меньше $|E_r|$.

захвата быстрой частицы. В случае захвата медленного нейтрона скорость последнего может быть того же порядка величины, что и скорость захватываемого ядра. Поэтому пренебрегать ею в этом случае нельзя.

Мы должны, очевидно, учесть энергию отдачи ядра, т. е. энергию, которая передаётся ядру в результате упругого столкновения с нейтроном (по закону сталкивающихся шаров), и, кроме того, принять во внимание тот факт, что поглощающие ядра участвуют в тепловом движении.

Чтобы учесть эти явления, достаточно заметить, что в формулу (18.2), относящуюся к поглощению нейтронов свободными ядрами, входит, очевидно, энергия относительного движения нейтрона и поглощающего ядра. Если v — скорость нейтрона и u — тепловая скорость ядра, то под E в (18.2) следует понимать величину

$$E = \frac{m'}{2} (v - u)^2, \quad (18.5')$$

где m' — приведённая масса нейтрона, равная $mM/m + M$ (m и M — массы нейтрона и ядра).

Пренебрегая квадратом скорости теплового движения, перепишем (18.5') в виде

$$E = \frac{m'v^2}{2} - m'vu. \quad (18.5)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой энергию относительного движения нейтрона и неподвижного ядра. Эта энергия, которую мы обозначим через E_0 , множителем $M/(M + m)$ отличается от абсолютной энергии нейтрона, равной $mv^2/2$.

В случае тяжёлых ядер ($M \gg m$) энергию E_0 можно представить в виде

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - R,$$

где

$$R = \frac{m}{M} \frac{mv^2}{2}$$

представляет собой энергию отдачи ядра.

Мы видим, таким образом, что если не учитывать теплового движения и понимать в формуле (18.2) под энергией нейтрона его абсолютную энергию, равную $mv^2/2$, то величину E_r следует заменить на $E_{r_0} + R$, где E_{r_0} — резонансная энергия, отвечающая бесконечно тяжёлому ядру.

Возвращаясь к формуле (18.5), перепишем её в виде

$$E = E_0 - \sqrt{2m'E_0}u_x,$$

где u_x — проекция u на направление скорости нейтрона v .

Предполагая, что распределение скоростей u подчиняется закону Максвелла, будем исходить из следующей формулы для вероятности того, что u_x лежит в интервале от u_x до $u_x + du_x$:

$$w(u_x) du_x = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{Mu_x^2}{2kT}} du_x,$$

где T — температура, k — постоянная Больцмана. Пользуясь (18.5), можно выразить u_x через E ; мы получим, таким образом, распределение по энергиям относительного движения E при заданном E_0 :

$$w(E) dE = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(E-E_0)^2}{\Delta^2}} \frac{dE}{\Delta}, \quad (18.6)$$

где

$$\Delta = 2 \sqrt{\frac{mE_0 kT}{M}} \quad (18.7)$$

($w(E) dE$ — вероятность, нормированная на единицу).

Величина Δ называется обычно доплеровской шириной, так как влияние движения ядра на захват нейтронов можно по аналогии с известными оптическими и акустическими явлениями назвать эффектом Доплера.

Заметим, что при $\frac{m}{M} \ll 1$ доплеровская ширина может быть представлена в виде

$$\Delta \cong 2 \sqrt{R \cdot kT}, \quad (18.7')$$

где R — энергия отдачи ядра.

Имея выражение для вероятности различных значений относительной энергии, легко учесть влияние тепловых движений ядер на захват нейтронов.

Мы должны, очевидно, усреднить сечение захвата (18.2) по всем возможным значениям относительной энергии E . Для этого следует умножить сечение (18.2) на $\omega(E) dE$ и проинтегрировать по E .

Заметим, что множитель λ , т. е. $1/v$, стоящий перед резонансным членом, усреднять не нужно, так как этот множитель связан с определением понятия эффективного сечения и происходит от нормировки нейтронной волновой функции на единичный поток.

Усреднённое сечение захвата σ_c имеет следующий вид:

$$\sigma_c = \sigma_0 \psi(\xi, x) = \int \sigma_0^*(E) \omega(E) dE, \quad (18.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= 2\pi \left(1 \pm \frac{1}{2k+1} \right) \lambda_r^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma_r}, \\ \psi(\xi, x) &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2}}{1+y^2} dy, \\ x &= \frac{2(E_0 - E_r)}{\Gamma_r}, \quad \xi = \frac{\Gamma_r}{\Delta}, \\ \Delta &= 2\sqrt{\frac{mE_r kT}{M}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

Мы предполагаем, что энергия нейтрона близка к резонансной, поэтому в выражении для доплеровской ширины энергия E_0 заменена на E_r . На том же основании λ заменено на λ_r в выражении для σ_0 .

Заметим, что функция $\psi(\xi, x)$ может быть представлена ещё в следующем виде:

$$\psi(\xi, x) = \int_0^{\infty} \cos xy e^{-\frac{y^2}{\xi^2}} dy. \quad (18.10)$$

Действительно, применим к $\psi(\xi, x)$ преобразование Фурье. Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, x) e^{ikx} dx = \\ &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2}}{1+y^2} e^{ikx} dx dy, \end{aligned}$$

получим:

$$\psi_k(\xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2 z^2} e^{ikz} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iky}}{1+y^2} dy.$$

Первый из этих интегралов равен $e^{-\frac{k^2}{\xi^2}}$, а второй $\pi e^{-|k|}$. Поэтому

$$\psi_k(\xi) = \pi e^{-\frac{k^2}{\xi^2} - |k|}.$$

Воспользовавшись формулой обращения, найдём $\psi(\xi, x)$:

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\xi) e^{-ikx} dk = \int_0^{\infty} \cos kx e^{-k - \frac{k^2}{\xi^2}} dk,$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к исследованию общей формулы (18.8) для сечения захвата нейтрона свободным ядром с учётом эффекта Доплера.

Условимся, рассматривая поглощение нейтронов, обусловленное уровнем E_r , говорить, по аналогии с оптикой, о линии поглощения E_r . Согласно этой терминологии, зависимость сечения захвата от энергии определяет форму контура линии поглощения. Формулы (18.2) и (18.8) определяют естественную форму линии поглощения и форму линии с учётом эффекта Доплера.

Легко показать, что площадь, ограниченная контуром линии поглощения при наличии эффекта Доплера.

будет такой же, как и для естественной формы линии. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \sigma_0^*(E) dE = \pi \sigma_0 \frac{\Gamma}{2};$$

такой же результат мы получим, если будем исходить из формулы (18.8), так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Рассмотрим несколько предельных случаев формулы (18.8).

Пусть сперва $\xi \gg 1$, т. е. пусть естественная ширина значительно превосходит доплеровскую ширину. В формуле (18.9), определяющей функцию $\psi(\xi, x)$, основную роль играют в этом случае значения $y \sim x$. Вынося $\frac{1}{1+y^2}$ в точке $y=x$ за знак интеграла, мы получим:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, x) &= \frac{1}{1+x^2} \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2} dy = \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \quad \xi \gg 1. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Иными словами, в случае $\xi \gg 1$ линия поглощения, как и следовало ожидать, имеет естественную форму, так как эффект Доплера не может играть роли при $\Gamma \gg \Delta$.

Рассмотрим теперь предельный случай малых ξ , $\xi \ll 1$. Пусть, кроме того, выполняется ещё условие $\xi^2 x \ll 1$.

Представив $\psi(\xi, x)$ в виде

$$\psi(\xi, x) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\xi^2 xy - \frac{1}{4}\xi^2 y^2}}{1+y^2} dy,$$

получим следующую приближённую формулу:

$$\psi(\xi, x) \approx e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2} \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2}, \quad (18.12)$$

$$\xi \ll 1, \quad \xi^2 x \ll 1.$$

Формулой (18.12) определяется доплеровская форма линии поглощения. При резонансе, согласно (18.12), ψ равняется $\psi(\xi, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \ll 1$, в то время как для естественной формы линии поглощения ψ при резонансе равняется 1.

Таким образом благодаря эффекту Доплера контур линии поглощения в центре линии понижается; так как площадь, ограниченная контуром линии, не меняется, то это значит, что линия расширяется.

При условии $\xi \ll 1$ ($\Gamma \ll \Delta$) ширина линии поглощения определяется, главным образом, доплеровской шириной.

Перейдём теперь к рассмотрению формы далёких крыльев контура линии поглощения, т. е. области энергии, где x велико, именно, пусть $x \gg \xi^{-2}$ (ξ произвольно). Обозначая xy через z , перепишем (18.10) в виде

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos z e^{-\frac{1}{x}\left(z + \frac{z^2}{x\xi^2}\right)} dz.$$

Если $x\xi^2 \gg 1$, то в показателе подинтегральной функции можно вычеркнуть $\frac{z^2}{x\xi^2}$, поэтому

$$\psi(\xi, x) \cong \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos z \cdot e^{-\frac{z}{x}} dz = \frac{1}{1+x^2}, \quad x\xi^2 \gg 1. \quad (18.13)$$

Итак, мы видим, что при $x\xi^2 \gg 1$ линия поглощения имеет естественную форму.

Таким образом эффект Доплера оказывает влияние на форму линии поглощения только в том случае,

если $\xi = \frac{\Gamma}{\Delta} \ll 1$ и $x\xi \ll 1$. Последнее условие означает, что величина $|E - E_r|$, т. е. расстояние от центра линии, должно быть малым по сравнению с $\frac{\Delta^2}{2\Gamma}$. Далекие крылья контура линии поглощения ($x\xi^2 \gg 1$) не подвергаются действию эффекта Доплера ни при каких значениях ξ .

Заметим, что при $x=0$, т. е. при резонансе,

$$\psi(\xi, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \xi e^{\frac{1}{4}\xi^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\xi\right) \right] \quad (18.14)$$

где $\Phi(z)$ — функция ошибок

$$\Phi(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

§ 19. Усреднённые эффективные сечения. В этом параграфе мы рассмотрим зависимость эффективных сечений различных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами от энергии нейтрона, считая, что последняя не превышает 1–2 MeV.

Если энергия нейтрона меньше 1–2 MeV, то наиболее важную роль играют процессы радиационного захвата, упругого и неупругого рассеяния нейтронов, а также деление ядер, вызываемое нейтронами.

Мы будем в дальнейшем интересоваться средними значениями эффективных сечений, понимая под последними сечения, усреднённые по интервалу энергий, содержащему большое число уровней составного ядра. Такие усреднённые сечения могут служить для описания ядерных процессов в тех случаях, когда нейтроны или другие частицы, взаимодействующие с ядрами, не имеют строго одинаковой энергии, причём интервал размытости энергии велик по сравнению с расстоянием между соседними уровнями составного ядра.

Усреднённые сечения в области больших энергий возбуждения мы уже ввели в § 11 при рассмотрении статистических свойств ядра. При этом ширины уровней

были того же порядка величин, что и расстояния между соседними уровнями.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда ширины уровней значительно меньше расстояния между ними, так что статистические соображения § 11 уже не применимы.

Эффективное сечение определяется теперь общей дисперсионной формулой, которую и надлежит усреднить по большому числу уровней.

Среднее сечение $\bar{\sigma}_\alpha(E)$ для какого-либо процесса α связано с усредняемым сечением $\sigma_\alpha(E)$ соотношением

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\frac{\Delta E}{2}}^{E+\frac{\Delta E}{2}} \sigma_\alpha(E) dE, \quad (19.1)$$

где E — энергия падающей частицы (в рассматриваемых ниже случаях — нейтрона), ΔE — интервал энергии, по которому производится усреднение. Последний должен быть значительно больше среднего расстояния между соседними уровнями D и значительно меньше того интервала энергии, на протяжении которого заметно меняется само усреднённое сечение.

Мы знаем, что эффективное сечение для различных процессов (исключая потенциальное рассеяние) имеет резкие максимумы вблизи резонансных уровней. Поэтому в интеграле (19.1) главную роль играют области энергии, лежащие вблизи этих резонансных уровней.

Эффективное сечение для какого-либо процесса α при значениях энергии E , близких к резонансной энергии E_r , имеет, как мы знаем, следующий вид:

$$\sigma_\alpha(E) = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\gamma_\alpha^{(r)} \gamma_{r0}^{(r)}}{(E - E_r)^2 + \frac{\gamma_r^2}{4}}, \quad (19.2)$$

где $\gamma_\alpha^{(r)}$ — ширина, соответствующая процессу α , $\gamma_{r0}^{(r)}$ — нейтронная ширина, соответствующая упругому рассеянию нейтронов, γ_r — полная ширина уровня E_r , λ — длина

волны нейтрона, J и i — моменты количества движения составного и исходного ядер, s — спин нейтрона.

Пользуясь формулой (19.2), можно представить усреднённое сечение $\bar{\sigma}_\alpha(E)$ в виде

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \sum_r \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \int \frac{\gamma_\alpha^{(r)} \gamma_{n0}^{(r)}}{(E-E_r)^2 + \frac{\Gamma_r^2}{4}} \pi \lambda^2 \frac{dE}{\Delta E},$$

где суммирование производится по всем уровням, лежащим в интервале ΔE .

Величины γ и λ являются медленно меняющимися функциями энергии. Мы можем поэтому вынести их значения при резонансе за знак интеграла.

Так как ширины γ предполагаются малыми, то пределы интегрирования можно расширить от $-\infty$ до $+\infty$. В результате мы получим:

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \frac{N}{\Delta E} \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\alpha}{\Gamma} 2\pi^2 \lambda^2, \quad (19.3)$$

где N — общее число уровней в интервале ΔE , а Γ_{n0} , Γ_α , Γ — значения величин γ_{n0} , γ_α , γ_r при резонансе (черта сверху означает, что берётся среднее значение величины).

Замечая, что $N = \Delta E/D$, перепишем (19.3) в виде

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = 2\pi^2 \lambda^2 \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\alpha}{\Gamma D}. \quad (19.4)$$

Ради простоты мы не пишем над правой частью (19.4) черты, однако следует иметь в виду, что сюда входят средние значения величин λ , $2J+1$, $\Gamma_{n0}^{(r)}$, $\Gamma_\alpha^{(r)}$, $\Gamma^{(r)}$ и D по всем уровням, лежащим в интервале ΔE . Эти средние значения следует считать функциями E .

Заметим, что формула (19.4) совпадает с формулой (11.7) для усреднённого сечения, полученной в § 11. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь ввести в (11.7) среднее расстояние между уровнями D (эта величина отличается от входящей в (11.7) величины D_J — среднего расстояния между уровнями с определённым значением J). Заменяв в (11.7) сумму $\sum_J (2J+1) \frac{1}{D_J}$ на $\frac{2J+1}{D}$, мы получим формулу (19.4).

Определим, пользуясь формулой (19.4), усреднённое сечение радиационного захвата.

Заменяя Γ_α радиационной шириной Γ_γ , перепишем формулу (19.4) в виде

$$\bar{\sigma}_r(E) = \frac{2J+1}{2i+1} \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma D} \quad (19.5)$$

(s для нейтрона равно $1/2$). Здесь $\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n$, Γ_n — полная нейтронная ширина (средняя), отвечающая процессам как упругого, так и неупругого рассеяния нейтронов.

Заметим, что $\frac{\Gamma_{n0}}{D}$ представляет собой вероятность прилипания нейтрона.

Обозначим через E_0 энергию, при которой радиационная ширина становится равной нейтронной ширине. Эта энергия по порядку величины равна $E_0 \approx 10^4$ eV.

В интервале энергии $0 < E < E_0$ полная нейтронная ширина Γ_n не отличается от нейтронной ширины, отвечающей упругому рассеянию Γ_{n0} . Средняя ширина уровня Γ практически совпадает с радиационной шириной. Поэтому в интервале $0 < E < E_0$ формула (19.5) принимает вид

$$\bar{\sigma}_r = \frac{2J+1}{2i+1} \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (19.5')$$

Средняя нейтронная ширина при малых энергиях, согласно результатам § 13 (см. 13.7^а), может быть представлена в виде

$$\Gamma_n = 1,9 \cdot 10^{-4} DE^{1/2} \text{ eV} \quad (E \text{ выражается в eV}).$$

Подставляя это значение Γ_n в (19.5'), получим:

$$\bar{\sigma}_r \approx \frac{3,8}{\sqrt{E}} 10^{-22} \text{ см}^2 \quad (19.6)$$

(E — в eV; в этой формуле не вписан множитель, содержащий угловые моменты, так как (19.6) определяет σ_r только по порядку величины).

Формула (19.6) выражает известный уже нам закон $1/v$.

В интервале энергий $E_1 > E > E_0$, где E_1 — энергия возбуждения первого резонансного уровня, равная по

порядку величины $10^5 - 10^6$ eV, неупругое рассеяние нейтронов подрежнему отсутствует.

Нейтронная ширина (для упругого рассеяния) превосходит радиационную ширину и практически совпадает с полной шириной:

$$\Gamma_{n0} \approx \Gamma_n, \quad \Gamma_{n0} > \Gamma_\gamma, \quad \Gamma_{n0} \approx \Gamma.$$

Формула (19.5) даёт в этом интервале энергии

$$\sigma_r = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_\gamma}{D} = \frac{\text{const.}}{v^2} \quad (19.7)$$

(v — скорость нейтрона).

Так как и Γ_γ и D не зависят от энергии, то из формулы (19.7) следует, что в интервале энергии $E_0 < E < E_1$ среднее сечение радиационного захвата падает с ростом энергии обратно пропорционально последней, т. е. быстрее, чем по закону $1/v$.

У тяжёлых элементов

$$\sigma_r \approx 10^{-25} - 10^{-26} \text{ см}^2 \quad (E_1 \approx 10^5 \text{ eV}).$$

В области энергий $E > E_1$ главную роль играют процессы неупругого рассеяния нейтронов.

При этом радиационная ширина и ширина, отвечающая упругому рассеянию нейтронов, становится значительно меньше общей нейтронной ширины, которая практически совпадает с полной шириной уровня:

$$\Gamma_{n0} \ll \Gamma_n, \quad \Gamma_\gamma \ll \Gamma_n, \quad \Gamma \approx \Gamma_n.$$

Согласно формуле (19.5) мы получаем в этом случае:

$$\bar{\sigma}_r = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{D \Gamma_n}. \quad (19.8)$$

С ростом энергии величина Γ_{n0}/D , представляющая собой коэффициент прилипания, стремится к единице, а Γ_γ/Γ_n стремится к нулю ввиду быстрого роста нейтронной ширины, отвечающей процессам неупругого рассеяния. Поэтому при $E > E_1$ сечение $\bar{\sigma}_r$ быстро убывает с ростом энергии, повидимому, быстрее, чем $1/E$.

Следует заметить, что при $E > E_1$ необходимо учитывать значения орбитального момента нейтрона, отличные от нуля, так как при $E \sim E_1$ длина волны нейтрона оказывается по порядку величины равной радиусу ядра.

Это обстоятельство не меняет, однако, вывода о быстром падении сечения радиационного захвата с ростом энергии, так как соотношения, имеющие место при $l=0$, сохраняются и при значениях $l \neq 0$.

Перейдём теперь к рассмотрению среднего эффективного сечения упругого рассеяния нейтронов. Мы должны при этом учитывать как резонансное, так и потенциальное рассеяние, амплитуды которых складываются. При усреднении по энергии интерференционный член, возникающий от наложения обеих амплитуд, исчезает, поэтому среднее сечение упругого рассеяния выражается в виде суммы сечений, соответствующих потенциальному и резонансному рассеянию.

Обозначая среднее сечение упругого рассеяния через $\bar{\sigma}_s$, будем иметь:

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p + \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}^2}{D}, \quad (19.9)$$

где $\bar{\sigma}_p$ — среднее сечение потенциального рассеяния; второе слагаемое представляет собой усреднённое сечение резонансного рассеяния, которое получается согласно общей формуле (19.4), если положить в ней $\Gamma_a = \Gamma_{n0}$.

В области энергий $E < E_0$ полная ширина, как мы видели выше, практически совпадает с радиационной шириной; нейтронная ширина определяется согласно формуле (13.7"). Усреднённое сечение резонансного рассеяния в этих условиях не зависит от энергии. Сечение потенциального рассеяния также не зависит от энергии (см. § 17). Поэтому и общее сечение упругого рассеяния в интервале энергии $E < E_0$ также не зависит от энергии нейтрона.

Сечение потенциального рассеяния $\bar{\sigma}_p$ по порядку величины равно πR^2 (R — радиус ядра) и составляет около $2 - 3 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Сечение резонансного рассеяния

может составлять около 10^{-23} см², поэтому при $E < E_0$ потенциальное и резонансное рассеяния играют примерно одинаковую роль.

Заметим, что могут быть ядра, у которых $\bar{\sigma}_p$ в несколько раз меньше среднего сечения резонансного рассеяния.

В области энергии $E_0 < E < E_1$ полная ширина совпадает с нейтронной, поэтому формула (19.9) принимает вид

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p + \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{D} = \bar{\sigma}_p + \frac{\text{const.}}{v}. \quad (19.10)$$

Не исключена возможность существования таких ядер, для которых первое слагаемое в (19.10) меньше второго. В этом случае в интервале энергии $E_0 < E < E_1$ сечение упругого рассеяния будет обратно пропорционально скорости нейтрона (закон $1/v$ для рассеяния).

В области энергии $E > E_1$ быстрый рост нейтронной ширины, отвечающей неупругому рассеянию, приводит к падению сечения упругого резонансного рассеяния. Что касается потенциального рассеяния, то оно постепенно с ростом энергии переходит в рассмотренное ранее диффракционное рассеяние (§ 12), аналогичное диффракции света от абсолютно чёрного шарика (с ростом энергии нейтрона постепенно «включаются» более высокие значения орбитального момента нейтрона l вплоть до значения $l_{\text{max}} \sim R/\lambda$).

Неупругое резонансное рассеяние нейтронов начинает играть роль при энергии нейтронов, равной $E = E_1$, и быстро растёт с ростом энергии. При $\lambda \ll R$ полное сечение для всех неупругих процессов, совпадающее с сечением образования составного ядра, становится равным πR^2 (см. § 12). При этом сечение упругого рассеяния (потенциального) также равно πR^2 , т. е. общее сечение равняется $2\pi R^2$.

Мы рассмотрели случай, когда ширины уровней меньше расстояний между ними. Если ширина уровней одного порядка или больше, чем расстояние между уровнями, то, как мы уже говорили выше, усреднённое сечение определяется формулой (11.7).

Сечение деления ядер нейтронами мы рассмотрим в § 22.

§ 20. Замечания о ядерных реакциях, происходящих с участием заряженных частиц. Рассматривая столкновение положительно заряженной частицы с ядром, необходимо учитывать потенциальный барьер, окружающий ядро. Последний образуется благодаря комбинарованному действию специфических ядерных сил, действующих на малых расстояниях между частицами, и кулоновских сил отталкивания вне ядра.

Высота барьера B для частиц с зарядом Ze равна

$$B = \frac{Zze^2}{R},$$

где R — радиус ядра и Ze — его заряд. Считая, что $R = r_0 A^{1/3}$, A — массовое число, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$, получим для B выражение

$$B = 0,96 zZA^{-1/3} \text{ MeV.}$$

Заметим, что для прохождения барьера существенна лишь относительная кинетическая энергия, равная $\frac{M_1}{M_1 + M_2} E$, где E — абсолютная кинетическая энергия падающей частицы, M_1 и M_2 — массы частицы и ядра. Барьер не играет роли, если энергия частицы $E > B_{\text{eff}}$, где B_{eff} — эффективная высота барьера, равная

$$B_{\text{eff}} = \frac{M_1 + M_2}{M_1} B = 0,96 zZ(A + a) A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (20.1)$$

($a = \frac{M_1}{M_0}$, M_0 — масса протона). В приводимой ниже таблице, даны значения B_{eff} в MeV для различных ядер (см. стр. 184).

Перейдём к определению так называемой прозрачности барьера.

Как известно [78], прозрачность барьера P для частицы с массой M и энергией E определяется формулой

$$P = e^{-2C}, \quad C = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2M[V(r) - E]} dr, \quad (20.2)$$

Значения V_{eff} и g для различных ядер

Ядро	He	Be	Ne	Ca	Zn	Sn	Yb	U
Z	2	4	10	20	30	50	70	92
A	4	9	20	40	66	112	174	238
V_{eff}	p	1,5	2,1	3,7	5,7	10,0	12,0	14,2
	d	1,8	2,2	3,8	5,9	7,4	10,1	14,4
	α	4,8	5,3	8,5	12,2	15,0	24,6	28,6
g	p	0,5	0,86	1,6	2,7	3,5	5,0	6,4
	d	0,7	1, 2	2,2	3,7	5,0	7,1	9,1
	α	1,1	2, 1	4,3	7,2	10,0	14,0	18,0

где r_0 — прицельное расстояние сталкивающихся частиц, R — внутренний радиус барьера, который считают равным радиусу ядра, $V(r)$ — потенциальная энергия частицы с учётом центробежной энергии, равной $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}$ ($\hbar l$ — момент частицы).

Прозрачность барьера при лобовых столкновениях ($l=0$) равна P^*

$$P = e^{-2\sigma\gamma\left(\frac{E}{B}\right)}, \quad (20.3)$$

где

$$g = \sqrt{2MzZe^2 \frac{R}{\hbar^2}} = \frac{R}{\lambda_b}, \quad \gamma(x) = x^{-1/2} \arccos x^{1/2} - (1-x)^{1/2}$$

(λ_b — длина волны частицы, соответствующая энергии, равной B). Значения g даны в приведённой выше таблице.

Прозрачность барьера для частицы, обладающей моментом l , равна:

$$P_l = e^{-2C_l},$$

$$C_l = \frac{g}{2} x^{-1/2} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-2x}{(1+4xy)^{1/2}} \right) - (y+1-x)^{1/2} +$$

$$+ y^{1/2} \ln \frac{1+2y^{1/2}[y^{1/2}+(y+1-x)^{1/2}]}{(1+4xy)^{1/2}}, \quad (20.4)$$

где $x = E/B$ и $y = l(l+1)/g^2$.

Если $y \ll 1$, т. е. $l \ll g$ и $x < 1$, то

$$P_l = P e^{-2gy\sqrt{1-x^2}}. \quad (20.5)$$

С увеличением l величина P_l уменьшается и становится равной $\frac{1}{e} P$ при $y = \frac{1}{2} g^{-1} (1-x)^{-1/2}$, чему соответствует значение l , равное

$$l_c = \left(\frac{1}{2} g \right)^{1/2} (1-x)^{-1/4} - \frac{1}{2}.$$

Рассматривая дезинтеграцию ядра заряженной частицей, мы должны учитывать все значения её момента от $l=0$ до $l \sim l_c$. Для нейтронов роль величины l_c играет $l_0 = R/\lambda$ (см. § 12).

В случае медленных заряженных частиц ($E \ll B$) $l_c \approx \sqrt{\frac{1}{2} g}$. Эта величина отлична от нуля, в то время как для медленных нейтронов $l_0 = 0$. Отсюда вытекает важное следствие. Если под влиянием медленного нейтрона ($\lambda \gg R$) происходит дезинтеграция ядра, момент которого равен нулю, то угловое распределение продуктов дезинтеграции будет сферически симметричным.

Из сказанного выше о l_c следует, что угловое распределение продуктов дезинтеграции, вызываемой заряженной частицей, может не быть сферически симметричным даже в том случае, когда длина волны частицы значительно превосходит размеры ядра.

Если энергия заряженной частицы превосходит высоту барьера, то в общем имеют место такие же закономерности, что и для нейтрона той же энергии. В частности, полное эффективное сечение для всех неупругих процессов, вызываемых заряженной частицей с энергией $E > B$ при условии, что длина частицы у поверхности ядра значительно меньше радиуса последнего, равняется πR^2 . (Об упругом рассеянии быстрых заряженных частиц мы говорили в § 12.)

Резонансные явления с заряженными частицами наблюдаются только в лёгких ядрах, для которых велико расстояние между первыми уровнями (~ 1 MeV). В случае тяжёлых ядер это расстояние обычно гораздо меньше разброса по энергиям заряженных частиц.

Резонансные эффекты наблюдаются при радиационном захвате протонов, а также при реакциях с α -частицами, сопровождающихся испусканием протона или нейтрона.

При реакциях с дейтронами резонансные явления не наблюдаются. Это объясняется большой энергией возбуждения составного ядра, получающегося в результате захвата дейтрона (ввиду малой энергии связи дейтрона энергия возбуждения составного ядра примерно в два раза превосходит энергию возбуждения, возникающую при захвате нейтрона или протона).

Вероятность вылета заряженной частицы определяется двумя факторами: во-первых, вероятностью концентрации энергии возбуждения составного ядра на данной частице и, во-вторых, вероятностью прохождения частицы через барьер.

Первая из этих вероятностей определяет частичную ширину в отсутствие барьера. Мы обозначим её для частицы a через G_{Aa} , где A обозначает состояние ядра, остающегося после вылета частицы a . Реальная ширина Γ_{Aa} равна:

$$\Gamma_{Aa} = G_{Aa} P_{Aa},$$

где P_{Aa} — прозрачность барьера.

Можно предполагать, что значения G для протона и нейтрона мало отличаются друг от друга.

Общая ширина по отношению к вылету частицы a равна:

$$\Gamma_a = \sum_A G_{Aa} P_{Aa}. \quad (20.6)$$

Ширина Γ_a зависит от числа возможных состояний ядра, остающегося после вылета частицы a . Это число состояний, в свою очередь, зависит от общей энергии, освобождаемой при реакции и равной $E + Q_0$, где E — энергия падающей частицы, а $Q_0 = c^2(M_i + M - M_f - M')$, (M_i и M_f — массы начального и конечного ядер, M и M' — массы падающей и вылетающей частиц, c — скорость света).

Рассмотрим два случая, когда $E + Q_0 > B_a$ и когда $E + Q_0 < B_a$ (B_a — высота барьера для частицы a).

В первом из этих случаев главную роль в сумме (20.6) играют те слагаемые, для которых коэффициент прозрачности P_{Aa} равен единице. Обозначая через $N(U)$ число состояний конечного ядра с энергией возбуждения, меньшей или равной U , подставим сумму (20.6) в виде

$$\Gamma_a = N(E + Q_0 - B_a) \bar{G}_a, \quad (20.7)$$

где \bar{G}_a — некоторое среднее значение G_{Aa} (по состояниям конечного ядра).

Таким образом Γ_a пропорционально числу состояний конечного ядра с энергией $U \leq E + Q_0 - B_a$.

Мы имеем N групп вылетающих частиц, отличающихся своей энергией; наибольшее число частиц имеет энергию, заключённую между B_a и $B_a + T$, где T — температура ядра, соответствующая энергии возбуждения $E + Q_0 - B_a$.

Пусть теперь освобождаяемая энергия $Q_0 + E < B_a$. В этом случае прозрачность барьера P отлична от единицы для всех значений энергии вылетающей частицы.

Наибольшее P_{Aa} отвечает основному состоянию остающегося ядра. Частичная ширина по порядку величины равна в этом случае:

$$\Gamma_a = G_{a0} P_{a0} \quad (20.8)$$

(индекс 0 означает основное состояние остающегося ядра).

Ясно, что частичная ширина в первом из рассмотренных выше случаев больше, чем во втором. Мы видим, что полная ширина $\Gamma = \sum \Gamma_a$ определяется, главным образом, теми вылетающими частицами, для которых разность между освобождаяемой энергией и высотой барьера $E + Q_0 - B_a$, а также вероятность концентрации энергии на частице G имеют наибольшие значения.

Этим условиям лучше всего удовлетворяет нейтрон, испускание которого является весьма вероятным процессом, независимо от вида падающей частицы.

Испускание α -частицы представляет собой довольно распространённый тип реакции, несмотря на большую высоту барьера для α -частиц. Это объясняется тем, что

большая высота барьера для α -частицы компенсируется большим значением освобождаемой энергии *).

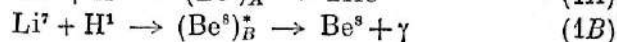
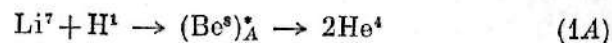
Эмиссия дейтрона крайне мало вероятна вследствие большой внутренней энергии дейтрона (обычно она просто невозможна по энергетическим соображениям).

Радиационная ширина, как правило, очень мала. Только в специальных случаях (например, при захвате медленных нейтронов) полная ширина практически совпадает с радиационной шириной.

Радиационный захват имеет место также в тех случаях, когда вылет частицы невозможен по энергетическим соображениям либо запрещён строгими правилами отбора.

Для разъяснения последних приведём следующий пример.

При столкновениях протонов с Li^7 имеют место реакции



(звёздочка над скобкой обозначает, что ядро находится в возбуждённом состоянии, индексами A и B различаются состояния образующихся составных ядер).

Вторая из этих реакций является резонансной (резонансная энергия протонов ~ 440 keV), в то время как выход α -частиц в реакции (1A) монотонно растёт с увеличением энергии протонов (длина пробега α -частиц ~ 8 см).

Чтобы понять различный характер реакций (1A) и (1B), достаточно сделать предположение о различной чётности волновых функций, описывающих состояния составных ядер $(\text{Be}^8)_A^*$ и $(\text{Be}^8)_B^*$.

Чётность α -частицы $\omega_\alpha = +1$. Так как спин α -частицы равен нулю, то волновая функция, описывающая относительное движение двух α -частиц, может содержать

* Разность освобождаемых энергий при вылете α -частицы и протона равняется $\Delta(H) + \Delta(A-1) - \Delta(\alpha) - \Delta(A-4)$, где $\Delta(A)$ — дефект массы ядра с атомным номером A . Эта величина [78], в случае тяжёлых ядер того же порядка величины, что и разность высот барьеров $V_\alpha - V_H$.

волны только с чётными l . Поэтому распад ядра $(\text{Be}^8)^*$ на две α -частицы будет возможен только в том случае, если характер чётности ядра равен $\omega = +1$. Мы допустим, что характер чётности ядра $(\text{Be}^8)_A^*$ равен $\omega = +1$, а характер чётности ядра $(\text{Be}^8)_B^*$ равен $\omega = -1$. На основании (16.12) отсюда можно заключить, что распад $(\text{Be}^8)_B^*$ на две α -частицы невозможен.

Таким образом в реакции типа (1B) вылет α -частиц строго запрещён. Отсюда следует, что ширина уровня составного ядра $(\text{Be}^8)_B^*$ гораздо меньше ширины уровня ядра $(\text{Be}^8)_A^*$. Поэтому резонанс наблюдается при реакции (1B) и не наблюдается при реакции (1A).

Заметим, что характер чётности ядра Li^7 $\omega = 1$ [78]; поэтому для возможности протекания реакции (1A) необходимо, чтобы момент протона l был нечётным.

Рассмотрим ещё вопрос о характере излучения, испускаемого ядрами $(\text{Be}^8)_B^*$.

Основное состояние ядра Be мы предполагаем чётным моментом $J=0$. Легко показать, что γ -квант, испускаемый согласно реакции (1B), будет дипольным. Действительно, если предположить, что γ -квант — дипольный, то состояние ядра $(\text{Be}^8)_B^*$ будет нечётным с моментом, равным $J=1$. Благодаря нечётности волновой функции, описывающей $(\text{Be}^8)_B^*$, обеспечивается невозможность распада $(\text{Be}^8)_B^*$ на две α -частицы, как это и должно быть.

Если бы мы предположили, что γ -квант является квадрупольным, то состояние $(\text{Be}^8)_B^*$ получилось бы чётным с $J=2$; ядро $(\text{Be}^8)_B^*$ смогло бы распасться на две α -частицы, что по условию невозможно.

Укажем на существенную особенность ядерных реакций, в которых участвуют дейтроны. При столкновении ядра с дейтроном последний не обязательно должен целиком входить в ядро. Благодаря сравнительно малой энергии связи дейтрона может произойти «диссоциация» его ещё вне ядра; при этом нейтрон может быть захвачен ядром, а протон, отталкиваемый от ядра, появится как «вылетающая» частица [79–82].

Таким образом при столкновении ядер с дейтронами составное ядро может не образовываться.

Если энергия дейтрона превосходит высоту барьера, то этот эффект не играет роли. Он приобретает существенное значение при столкновении дейтронов с тяжёлыми ядрами и наиболее отчётливо проявляется в том случае, если энергия дейтрона меньше

$$E_0 = \frac{Ze^2}{R} - \varepsilon,$$

где ε — энергия связи дейтрона, R — радиус ядра, Ze — его заряд.

Заметим, что при ядерных реакциях, которые происходят с участием заряженных частиц очень больших энергий (10^8 eV или больше), распад составного ядра может осуществляться такими способами, которые невозможны в том случае, когда энергия бомбардирующих заряженных частиц мала. Возможен, например, вылет дейтронов. В этом параграфе мы считали энергию возбуждения составного ядра не больше 10^7 eV.

ГЛАВА IV ДЕЛЕНИЕ ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР

§ 21. Механизм деления. Тяжёлые ядра при сравнительно малых энергиях возбуждения способны расщепляться на две или большее число примерно равных частей. Этот вид дезинтеграции называется делением ядер.

Продукты деления (осколки) находятся, как правило, в возбуждённом состоянии и во многих случаях являются β -активными *).

Рассмотрение дефекта массы тяжёлых ядер показывает, что ядра, атомный вес которых превосходит ~ 110 , должны быть неустойчивыми по отношению к делению.

В этом можно убедиться, если сравнить энергию покоящегося исходного ядра, массу которого мы обозначим через M_0 , с энергией дочерних ядер, массы которых в невозбуждённом состоянии обозначим через M_1, M_2, \dots . Разность этих энергий равна:

$$\Delta E = (M_0 - \sum M_i) c^2. \quad (21.1)$$

Эта величина ^[86] оказывается положительной для всех исходных ядер, атомный номер которых превосходит 110, если рассматривается расщепление ядра на два дочерних ядра примерно равной массы. (Во мно-

*) Явление деления ядер было открыто Ганом и Штрассманом ^[83]. Теории деления посвящён ряд работ Н. Бора ^[84], ^[86], Я. Френкеля ^[85] и др. В этом и следующем параграфах излагаются основные результаты работы ^[86].

гих случаях $\Delta E > 0$ при делении ядра на три и даже большее число частей.)

Таким образом тяжёлые ядра оказываются энергетически неустойчивыми.

Несмотря на свою энергетическую неустойчивость, они, однако, не расщепляются самопроизвольно с заметной вероятностью, так как этому препятствует наличие потенциального барьера в пространстве параметров,

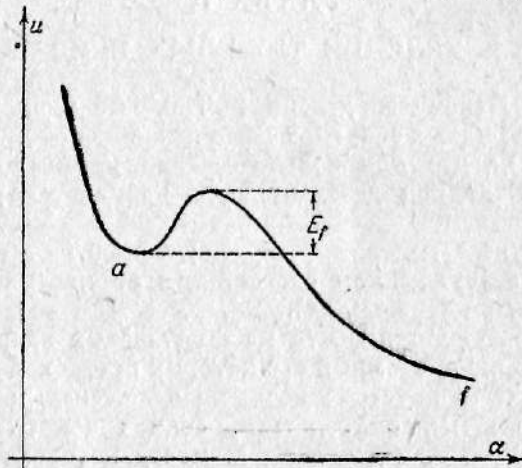


Рис. 5.

характеризующих деформацию ядра; этот барьер осколки должны пройти, прежде чем будет достигнуто их полное отделение.

Если сравнивать ядро с жидкой каплей, что мы будем далее делать, чтобы получить качественную картину процесса деления, то можно сказать, что делению ядра должна предшествовать некоторая его деформация, причём в начале увеличение деформации сопровождается увеличением энергии ядра. Иными словами, если мы будем графически изображать зависимость этой энергии от некоторого параметра α , характеризующего деформацию, которая при своём возрастании приводит в конечном счёте к делению ядра, то мы получим кривую, схематически изображённую на рис. 5.

Здесь точка a изображает состояние исходного маггрина ядра, а точка f соответствует тому состоянию, когда ядро разделилось на две части. Энергия начального состояния a превосходит энергию конечного состояния f на ΔE —энергию, освобождающуюся при делении ядра. (Эта энергия переходит в кинетическую энергию осколков и в энергию β - и γ -излучения.)

Начальное состояние соответствует минимуму энергии, т. е. является устойчивым, но эта устойчивость имеет место только по отношению к деформациям, не превосходящим некоторого предела. Так как $\Delta E > 0$, то состоянию f соответствует более глубокий минимум, однако переходу из a в f препятствует, как видно из рисунка, потенциальный барьер (высота барьера на рисунке обозначена через E_f).

Чтобы деление могло произойти, необходимо предварительно создать такую деформацию ядра, при которой потенциальная энергия деформации, т. е. энергия возбуждения ядра, была бы по крайней мере равна высоте этого барьера. Эта деформация называется критической, а отвечающая ей энергия—критической энергией деления.

Перейдём к определению высоты барьера, препятствующего делению ядра.

Мы будем, согласно Бору, проводить качественную аналогию между ядром и несжимаемой, равномерно заряженной жидкой каплей, обладающей некоторым поверхностным натяжением O . Энергии возбуждения ядра мы приведём в соответствие энергию деформации такой капли, совершающей колебания под действием сил поверхностного натяжения и сил электростатического отталкивания. Благодаря совокупному действию этих сил и создаётся потенциальный барьер, высоту которого мы попытаемся теперь определить.

Рассмотрим сначала малые деформации жидкой капли.

Деформированная поверхность капли, которую ради простоты будем считать телом вращения, определяется уравнением $r(\theta) = R[1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \theta) + \alpha_4 P_4(\cos \theta) + \dots]$, где $r(\theta)$ —радиус-вектор, проведённый из центра капли в точку её поверхности под углом θ к оси вращения, R —начальный радиус ядра, $P_n(\cos \theta)$ —полиномы Ле-

жандра, α_i — малые параметры, характеризующие деформацию. В это выражение не входит член $\alpha_1 P_1(\cos \theta)$, содержащий первый полином Лежандра, так как этот член соответствует смещению шаровой капли как целого без изменения формы *).

Потенциальная энергия капли, которая складывается из поверхностной и электростатической энергии, является функцией параметров α_i . Эта функция в пространстве параметров α_i изображается некоторой поверхностью. На энергетической поверхности состояния исходного ядра и разделившихся осколков изображаются точками, лежащими в потенциальных «долинах» (на рис. 5 — точки a и f). Эти точки разделены потенциальным барьером. Точка перевала на «хребте», разделяющем обе потенциальные долины, определяет критическую деформацию ядра, за которой может последовать его деление.

Выясним прежде всего, каковы условия устойчивости капли по отношению к малым деформациям. Определим для этого потенциальную энергию капли с точностью до членов α_i^2 . Можно показать, что в этом приближении поверхностная и электростатическая энергия деформированной капли равняется [86]:

$$E_{S+E} = 4\pi (r_0 A^{1/3})^2 O \times \\ \times \left[1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \frac{5}{7} \alpha_3^2 + \dots + \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \alpha_n^2 + \dots \right] + \\ + \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \left[1 - \frac{\alpha_2^2}{5} - \frac{10}{49} \alpha_3^2 - \dots - \frac{5(n-1)}{(2n+1)^2} \alpha_n^2 - \dots \right], \quad (21.2)$$

где O — коэффициент поверхностного натяжения капли и Ze — заряд ядра, радиус которого считается равным $R = r_0 A^{1/3}$.

*) Для того чтобы убедиться в этом, напишем полярное уравнение сферы, предполагая, что начало координат смещено относительно центра сферы на малый вектор \mathbf{a} . В векторной форме уравнение имеет вид $r = R + \mathbf{a}$, где R — вектор, проведённый из центра сферы в какую-либо её точку. Так как $a \ll R$, то $r = \sqrt{(R + \mathbf{a})^2} \approx \sqrt{R^2 + 2R\mathbf{a}} \approx R(1 + \mathbf{a} \cos \theta) = R[1 + \alpha_1 P_1(\cos \theta)]$, что и требовалось доказать.

Как и следовало ожидать, деформация приводит к увеличению поверхностной и уменьшению электрической энергии капли. (Отклонение от шарообразности приводит к увеличению поверхности капли, т. е. к увеличению поверхностной энергии и к раздвижению зарядов, т. е. к уменьшению электрической энергии.)

Рассмотрим коэффициент, стоящий в (21.2) перед α_2^2 . Он имеет следующий вид:

$$4\pi r_0^2 O A^{2/3} \frac{2}{5} \left\{ 1 - \frac{Z^2}{A} \frac{e^2}{10 \frac{4\pi}{3} r_0^3 O} \right\}. \quad (21.3)$$

Ясно, что для устойчивости капли необходимо, чтобы выражение, стоящее в фигурных скобках, было положительным. Это значит, что Z^2/A должно быть меньше некоторого предельного значения, равного

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_{\text{пред.}} = 10 \frac{4\pi}{3} \frac{O r_0^3}{e^2}. \quad (21.4)$$

При выполнении этого условия обеспечивается устойчивость также и по отношению к деформациям типа $P_n(\cos \theta)$, где $n=3, 4, \dots$

При $Z^2/A = (Z^2/A)_{\text{пред.}}$ капля является неустойчивой по отношению к бесконечно малым деформациям типа $P_2(\cos \theta)$ (см. рис. 6, на котором изображена форма капли для простейших деформаций типа $\delta r(\theta) = \alpha_n P_n(\cos \theta)$ при $n=2, 3, 4$).

Энергия $4\pi r_0^2 O$ имеет порядок величины ядерных энергий. Полагая, что $4\pi r_0^2 O \approx 1,4 \cdot 10^7$ eV, найдём, что $(Z^2/A)_{\text{пред.}}$ близко к значению Z^2/A для урана [86].

Таким образом тяжёлые ядра, как уран и торий, находятся вблизи предела устойчивости, что связано с почти полной компенсацией действия сил поверхностного натяжения и сил электростатического отталкивания.

Если $Z^2/A < (Z^2/A)_{\text{пред.}}$, то ядро будет устойчивым по отношению к малым деформациям, однако, как уже об этом говорилось выше, достаточно большая деформация приведёт ядро в состояние неустойчивого равно-

веса. Эта критическая деформация будет тем больше, чем меньше Z^2/A . На рис. 6 схематически изображена критическая форма капли в состоянии неустойчивого равновесия для трёх различных значений Z^2/A . Форма *c*) отвечает Z^2/A , близкому к $(Z^2/A)_{\text{пред}}$. Для меньшего значения Z^2/A мы получим форму типа *b*) и, наконец, при $Z=0$ —форму *a*). В последнем случае мы имеем,

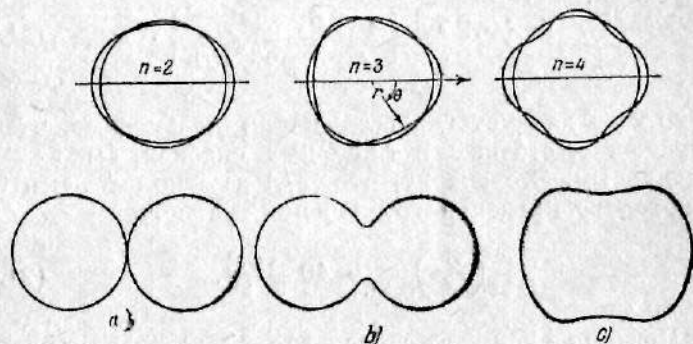


Рис. 6.

очевидно, две соприкасающиеся сферы, массы которых равны половине массы исходного ядра.

Чтобы определить критическую энергию деления, которую мы обозначим через E_f , нужно знать форму капли в состоянии неустойчивого равновесия. Равновесная форма капли должна находиться из условия [87]

$$kO + \varphi = \text{const.},$$

где k —кривизна поверхности капли, O —поверхностное натяжение и φ —потенциал электрических сил.

Точное решение задачи о нахождении равновесной формы капли наталкивается на большие математические трудности и не нужно для полукачественного рассмотрения. Мы поступим поэтому следующим образом.

Из соображений размерности видно, что критическую энергию деления E_f можно представить в виде произ-

ведения поверхностной энергии, равной $4\pi r_0^2 A^{2/3} O$ на некоторую безразмерную функцию от отношения $\frac{Z^2}{A} / \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{пред}}$, т. е.

$$E_f = 4\pi r_0^2 A^{2/3} O f \left[\frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\text{пред}}} \right]. \quad (21.5)$$

Найти общий вид функции $f(x)$ не представляется возможным, однако можно найти $f(x)$ в двух предельных случаях, когда $x \ll 1$ и когда $1-x \ll 1$.

В первом из этих случаев роль электростатических сил очень мала. Мы можем поэтому считать, что в этом случае форма капли в состоянии неустойчивого равновесия мало отличается от той, которая изображена на рис. 6, *a*) (две соприкасающиеся сферы половинной массы).

Если бы заряд капли равнялся нулю, то энергия E_f была бы попросту равна работе, которую необходимо произвести против сил поверхностного натяжения при разделении капли на две равные части, т. е.

$$E_f = 2 \cdot 4\pi r_0^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} O - 4\pi r_0^2 A^{2/3} O, \quad Ze \rightarrow 0. \quad (21.6)$$

При наличии заряда мы должны прибавить сюда разность электрических энергий конечной и начальной конфигураций, которая равна:

$$\frac{2}{r_0} \frac{3}{5} \left(\frac{Ze}{2}\right)^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{Ze}{2}\right)^2 \frac{1}{2r_0} \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3} - \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \quad (21.6')$$

(первый член представляет собой электрическую энергию разделённых сфер радиуса $r_0 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}$, второй член есть взаимная потенциальная энергия обеих сфер и третий член—электрическая энергия исходного ядра).

Из (21.4), (21.6) и (21.6') мы получим при выполнении условия $\frac{Z^2}{A} \ll \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{пред}}$ следующий ре-

зультат:

$$f(x) = 0,260 - 0,215x, \quad x = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{пред}}} \ll 1. \quad (21.7)$$

Определим теперь $f(x)$ для значений x , близких к единице, когда ядро находится вблизи предела устойчивости. В этом случае состояние неустойчивого равновесия достигается при малых деформациях.

Выше мы определили уже полную энергию E_{S+E} в случае малых деформаций с точностью до членов α_i^2 . Для определения E_f этого приближения недостаточно, так как выражение (21.2), рассматриваемое как функция α_i , не имеет максимума. Мы должны, очевидно, учесть ангармоничность колебаний капли, т. е. ввести в выражение для энергии более высокие степени параметров α_i . Введём в рассмотрение члены, пропорциональные α_2^3 и α_2^4 , и, кроме того, член, пропорциональный $\alpha_2^2\alpha_4$, который учитывает связь между колебаниями типов $n=2$ и $n=4$.

С учётом этих членов E_{S+E} имеет следующий вид^[86]:

$$E_{S+E} = 4\pi r_0^2 O A^{2/3} \left[\frac{2}{5} \alpha_2^2 + \frac{116}{105} \alpha_2^3 + \frac{101}{35} \alpha_2^4 + \frac{2}{35} \alpha_2^2 \alpha_4 + \alpha_4^2 \right] - \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \left[\frac{1}{5} \alpha_2^2 + \frac{64}{105} \alpha_2^3 + \frac{58}{35} \alpha_2^4 + \frac{8}{35} \alpha_2^2 \alpha_4 + \frac{5}{27} \alpha_4^2 \right].$$

Искомая энергия E_f определяется, очевидно, точкой перевала на поверхности, изображающей E_{S+E} как функцию $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ в пространстве этих параметров.

Для нахождения E_f следует сначала найти минимум E_{S+E} по отношению к переменной α_4 (при постоянном α_2) и затем максимум полученного выражения, являющегося функцией только α_2 . Можно показать, что E_f выражается следующей формулой^[86]:

$$E_f = 4\pi r_0^2 A^{2/3} O \left\{ \frac{98}{135} (1-x)^3 + \dots \right\} \quad (21.8)$$

[невывисанные члены в фигурных скобках содержат более высокие степени $(1-x)$].

Таким образом, если $1-x \ll 1$, то

$$f(x) \approx \frac{98}{135} (1-x)^3. \quad (21.9)$$

Интерполируя результаты (21.7) и (21.9), Бор и Уилер строят кривую, по которой можно приближённо

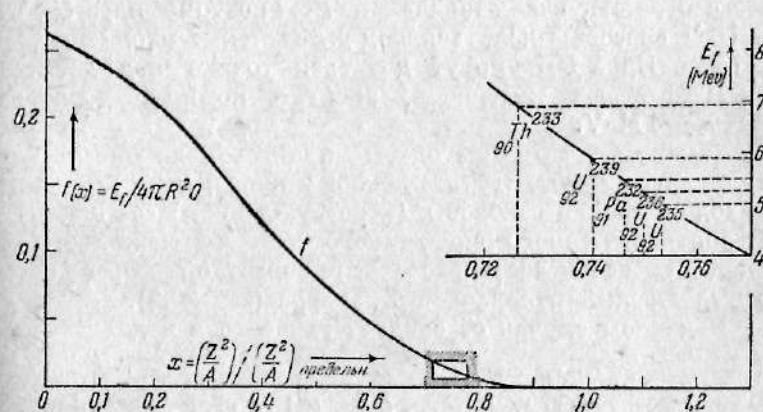


Рис. 7.

находить E_f для промежуточных значений x . Их результаты представлены на рис. 7.

Следует подчеркнуть, что такая интерполяция имеет только качественный характер, так как в действительности величина x для ядер урана и тория не очень близка к единице. (Последнее обстоятельство связано с тем, что критическая деформация, приводящая эти ядра к делению, не является малой.)

Величина энергии E_f для составного ядра U^{236} , получающегося в результате захвата нейтрона ядром U^{235} , равняется примерно $5\frac{1}{4}$ MeV, в то время как для составного ядра U^{239} $E_f \approx 6$ MeV.

Согласно^[86], энергия связи нейтрона E_n для различных ядер, способных делиться, имеет следующие

значения:

$$\begin{aligned}
 E_n(U^{236}) &\approx 6,4 \text{ MeV}; & E_n(U^{235}) &\approx 5,4 \text{ MeV}; \\
 E_n(U^{238}) &\approx 5,2 \text{ MeV}; & E_n(\text{Th}^{233}) &\approx 5,2 \text{ MeV}; \\
 E_n(\text{Pa}^{232}) &\approx 5,4 \text{ MeV}.
 \end{aligned}$$

Высота барьера E_f только для ядер U^{236} , U^{235} меньше соответствующих значений E_n , поэтому ядра U^{234} и U^{235} способны делиться под действием тепловых нейтронов. Ядра U^{238} могут делиться только под действием быстрых нейтронов, энергия которых должна быть $\geq 1 \text{ MeV}$.

Заметим, что благодаря квантовомеханическому туннельному эффекту возможно также деление ядра, находящегося в основном (невозбужденном) состоянии. Вероятность такого спонтанного деления может быть оценена, если воспользоваться известной формулой, определяющей прозрачность барьера (см. 20.2).

В данном случае её следует записать в виде

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{2[E_{S+E}(\alpha) - E_0]} \sum_i m_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha} \right)^2 d\alpha \right\}, \quad (21.10)$$

где $E_{S+E}(\alpha)$ — потенциальная энергия ядра, зависящая от некоторого параметра α , характеризующего деформацию ядра, E_0 — начальная энергия ядра, m_i — массы ядерных частиц, x_i — их координаты.

Интегрирование совершается в пространстве параметров α_i вдоль линии «скорейшего спуска», проходящей через точку перевала, которая, как указывалось выше, отвечает критической деформации. Начальная точка пути интегрирования соответствует равновесному состоянию исходного ядра; конечная точка — разошедшимся осколкам. Вдоль пути интегрирования координаты частиц следует считать функциями параметра α . В том случае, когда имеется только одна частица, эта формула переходит в формулу (20.2) для прозрачности барьера.

Необходимо подчеркнуть, что в качестве E_{S+E} нельзя пользоваться выражением (21.2), справедливым в том случае, когда капля совершает малые колебания, так как в действительности мы имеем дело с большими деформациями ядра (использование выражения (21.2) в качестве $E_{S+E}(\alpha)$ приводит к периоду полураспада ядер урана, равному примерно 1 часу [88]).

Ясно, что вероятность прохождения через барьер будет очень малой из-за большой величины масс осколков. Можно оценить показатель в формуле (21.10) приближённо как $\sqrt{2ME_f \frac{\alpha}{\hbar}}$, где M — масса ядра; полагая $\alpha \approx 10^{-13} \text{ см}$, мы получим время жизни урана по отношению к спонтанному распаду равным $\tau_f \approx 10^{22}$ лет. Согласно экспериментальным данным [89] $\tau_f \approx 10^{16} - 10^{17}$ лет.

Большое значение величины τ_f показывает, что спонтанное деление практически не оказывает никакого влияния на устойчивость существующих ядер. Однако, так как с увеличением Z^2/A величина τ_f быстро падает, спонтанное деление может быть ответственно за отсутствие в природе некоторых трансурановых элементов.

Приведём в заключение этого параграфа значения энергии ΔE , выделяющейся при делении различного рода ядер [86].

Исходное ядро	Продукты деления	Энергия, выделяемая при делении в MeV	Энергия, выделяемая при последующем распаде осколков
${}^{235}\text{Ni}^{61}$	${}^{14}\text{Si}^{30,31}$	—11	2
${}^{50}\text{Sn}^{117}$	${}^{25}\text{Mn}^{58,59}$	10	12
${}^{69}\text{Er}^{167}$	${}^{34}\text{Se}^{83,84}$	94	13
${}^{92}\text{Pb}^{208}$	${}^{41}\text{Ne}^{103,103}$	120	32
${}^{92}\text{U}^{239}$	${}^{46}\text{Pd}^{119,120}$	200	31

В последнем столбце указаны значения энергии, освобождающейся в результате последующих β -распадов осколков деления.

Мы видим, что освобождающаяся при делении ядра урана энергия составляет около 200 MeV (E_f для урана ~ 6 MeV).

Заметим, что, согласно расчётам [86], при расщеплении ядра урана на три примерно равные части должна выделиться энергия около 210 MeV, что несколько превышает энергию, выделяемую при делении на две части.

Разделение урана на четыре части должно приводить к выделению энергии 150 MeV. (Разделение становится эндотермическим, если число дочерних ядер равно 15.)

Деление ядер урана на три и четыре части наблюдалось экспериментально, причём было установлено, в соответствии с теоретическими расчётами, что энергия, выделяющаяся при делении на три части, превышает энергию, выделяющуюся при делении на две части [119].

§ 22. Вероятность деления. Ядро, энергия возбуждения которого превосходит E_f , не обязательно должно подвергнуться делению. Можно лишь сказать, что будет иметь место конкуренция между различными процессами, могущими привести к распаду составного ядра. Наиболее важными из них, помимо деления, являются испускание нейтрона и эмиссия γ -кванта.

Бор [84] отмечает, что в то время, как вылет частицы связан с концентрацией энергии возбуждения ядра, распределённой вначале между многими частицами и имеющей характер тепловой энергии, на одной частице, находящейся у поверхности ядра, деление ядра связано с переходом части этой энергии в потенциальную энергию деформации ядра, достаточной для того, чтобы привести к делению.

Сравним между собой частичные ширины составного ядра по отношению к делению, вылету нейтрона и испусканию γ -кванта.

Покажем прежде всего, каким образом можно оценить частичную ширину по отношению к делению Γ_f . Обозначим число состояний составного ядра с энергией возбуждения между E и $E + dE$ через $\rho(E) dE$.

Рассмотрим совокупность ядер, энергия возбуждения которых лежит между E и $E + dE$. Пусть общее число ядер равняется $\rho(E) dE$, так что в каждом состоянии находится по одному ядру. Из этого числа в единицу времени подвергается делению всего $\rho(E) dE \frac{\Gamma_f}{h}$ ядер.

Рассмотрим слой толщины dx , ориентированный перпендикулярно к направлению, в котором происходит деление, и расположенный в том месте, где в ядре образуется «шейка», предшествующая делению.

Отнесённое к этому слою общее число квантовых состояний составного ядра, находящегося в переходном состоянии, непосредственно предшествующем делению, можно представить в виде

$$\frac{dp dx}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K) dE,$$

где K и p — энергия и импульс, которые приобретают при разлёте осколки деления (величины K и p заключены в интервалах dK и dp), ρ^* — плотность тех уровней составного ядра в переходном состоянии, которые возникают от возбуждения не связанных с делением степеней свободы ядра. (Энергия возбуждения этих степеней свободы в переходном состоянии равна $E - E_f - K$; эта энергия и является аргументом функции ρ^* .) Наконец, $dp dx / 2\pi\hbar$ — число квантовых состояний в интервалах dp и dx переменных p и x . Эти состояния связаны с переменной, которая определяет деформацию, приводящую к делению ядра.

Поскольку вначале в каждом квантовом состоянии находилось по одному ядру, общее число делений в единицу времени равно:

$$dE \int \frac{v dp}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K),$$

где $v = \frac{dx}{dt}$ — относительная скорость осколков. Замечая, что $v dp = dK$, можно переписать это выражение в виде

$$dE \int \frac{v dp}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K) = \frac{dE}{2\pi\hbar} N^*(E - E_f),$$

где $N^*(E - E_f)$ — общее число уровней составного ядра в переходном состоянии с энергией возбуждения, не превосходящей $E - E_f$.

Приравнявая полученное выражение найденному ранее числу делений в единицу времени $\frac{\rho(E)dE}{\hbar} \Gamma_f$, получим следующее выражение для ширины деления Γ_f :

$$\Gamma_f = \frac{N^*(E - E_f)}{2\pi\rho(E)} = \frac{1}{2\pi} DN^*(E - E_f), \quad (22.1)$$

где D — среднее расстояние между соседними уровнями составного ядра с энергией возбуждения, равной E .

Если $E < E_f$, то $\Gamma_f \approx 0$. Если $E - E_f \sim \varepsilon$, где ε — расстояние между наименьшими уровнями составного ядра в переходном состоянии, то $N^* \approx 1$, и формула (22.1) даёт:

$$\Gamma_f \sim \frac{D}{2\pi} \sim 1 - 10 \text{ eV}.$$

Выясним, как ведёт себя Γ_f при возрастании энергии возбуждения E .

Напомним для этого, что плотность уровней ядра пропорциональна $e^{S(E)}$ (см. § 10), где $S(E)$ — энтропия составного ядра. Полагая $S = a\sqrt{E}$, где a — некоторая константа, получим:

$$\Gamma_f \sim e^{a(\sqrt{E - E_f} - \sqrt{E})}$$

(преэкспоненциальный множитель здесь не выписан). Таким образом, начиная с $E = E_f$, величина Γ_f сильно, почти экспоненциально, возрастает с увеличением E .

Рассмотрим теперь вероятности испускания γ -кванта и эмиссии нейтрона. Что касается радиационной ширины Γ_γ , то, как мы знаем, у обычных ядер $\Gamma_\gamma \approx 0,1 \text{ eV}$, причём эта ширина почти постоянна в большом интервале энергии.

Можно предполагать, что у ядер, могущих делиться, Γ — того же порядка величины, что и у обычных ядер. Действительно, из всех степеней свободы ядра, способного делиться, только одна степень, отвечающая

колебанию типа $P_2(\cos \theta)$ (см. выше), обладает аномальными свойствами — большой амплитудой колебаний при сравнительно малой энергии возбуждения. Однако излучение, связанное с этой степенью свободы, мало ввиду малости частот колебаний.

Итак, при $E - E_f \gtrsim \varepsilon \Gamma_\gamma \ll \Gamma_f$.

Следует, однако, учитывать, что при $E - E_f \sim \varepsilon \sim 0,5 \text{ MeV}^*$ $\Gamma_\gamma \sim 0,1 \Gamma_f$, т. е. сечение радиационного захвата нейтрона только примерно в 10 раз меньше сечения деления.

Нейтронная ширина Γ_n ничтожно мала при очень малых значениях $E - E_n$ (E_n — энергия связи нейтрона). Для достаточно малых значений $E - E_n$ величина Γ_n практически сводится к Γ_{n0} — частичной ширине по отношению к процессу, при котором вылетает нейтрон, а остающееся ядро находится в основном состоянии. При возрастании энергии возбуждения E , начиная с $E = E_n$, величина Γ_n сильно возрастает и очень скоро становится больше Γ_{n0} . Действительно, если $E > E_n$, то $\Gamma_n = \sum_B \Gamma_{nB}$, где суммирование производится по состояниям B остающегося после вылета нейтрона ядра. Последнюю сумму можно представить в виде

$$\Gamma_n = \int \Gamma_{nB} \tilde{\rho}(E - E_n - K) dK,$$

где $\tilde{\rho}$ — плотность уровней ядра, остающегося после вылета нейтрона, K — кинетическая энергия нейтрона. Вынося за знак интеграла некоторое среднее значение Γ_{nB} , которое мы обозначим через $\bar{\Gamma}_{nB}$, получим:

$$\Gamma_n = \bar{\Gamma}_{nB} \tilde{N}(E - E_n),$$

где \tilde{N} — общее число уровней остающегося ядра с энергией возбуждения, меньшей чем $E - E_n$.

Предполагая, что $E - E_n \gtrsim 1 \text{ MeV}$, можно считать коэффициент прилипания нейтронов ζ равным единице. При этом, как было показано в § 11, среднее значение

* Можно считать, что ε совпадает по порядку величины с соответствующей величиной для обычных ядер.

ширины Γ_{nB} по порядку величины равно $D/2\pi$, где D — среднее расстояние между соседними уровнями составного ядра. Поэтому

$$\Gamma_n \sim \frac{D}{2\pi} \tilde{N}(E - E_n). \quad (22.2)$$

Сравнение этой формулы с формулой (22.1) для Γ_f показывает, что при возрастании E , начиная с $E = E_n$, Γ_n быстро, почти экспоненциально, возрастает с энергией.

Таким образом мы можем сделать следующие выводы. Если энергия возбуждения составного ядра E меньше или того же порядка величины, что и E_f , то $\Gamma_f \sim 0$. Излучение при этом гораздо более вероятно, чем деление. При увеличении энергии возбуждения, начиная с энергии $E = E_f$, частичная ширина по отношению к делению Γ_f быстро возрастает и очень скоро становится больше Γ_γ .

При достаточно больших энергиях возбуждения излучение можно вовсе не учитывать, так что основными процессами, ведущими к распаду составного ядра, будут деление и эмиссия нейтрона. Можно предполагать, что асимптотическое поведение Γ_f и Γ_n при $E \gg E_n$ и $E \gg E_f$ примерно одинаково, так как при больших энергиях возбуждения температура ядра настолько велика, что экспоненциальные факторы в Γ_f и Γ_n по порядку величины равны единице и различие в Γ_n и Γ_f обуславливается различием предэкспоненциальных множителей, которые являются медленно меняющимися функциями энергии возбуждения.

Отсюда видно, что при больших энергиях возбуждения оба процесса могут играть примерно одинаковую роль.

Следует отметить, что если энергия возбуждения превосходит сумму $E_f + E_n$, то сечение деления возрастает благодаря следующему процессу^[90].

Сильно возбуждённое составное ядро, образующееся благодаря слиянию исходного ядра с быстрым нейтроном, может подвергнуться делению либо сразу, либо после вылета нейтрона, если только энергия возбужде-

ния остающегося при этом ядра превосходит характерную для этого ядра энергию деления.

Приведём формулы, определяющие эффективное сечение деления. Пусть возбуждение составного ядра создаётся в результате захвата нейтрона.

Рассмотрим сначала тот случай, когда энергия нейтрона лежит вне тепловой области. (О сечениях в тепловой области см. следующий параграф.)

Если существенную роль играет только один уровень с энергией E_r , то сечение деления σ_f выражается резонансной формулой

$$\sigma_f = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0}\Gamma_f}{(E-E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\lambda \gg R), \quad (22.3)$$

где E — энергия падающего нейтрона, λ — длина волны нейтрона, $\Gamma = \Gamma_f + \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ — полная ширина уровня, s — спин нейтрона, i и J — угловые моменты исходного и составного ядер.

При захвате медленного нейтрона $\Gamma_n \sim \sqrt{E}$, поэтому $\sigma_f \sim \frac{1}{v}$ (v — скорость нейтрона).

Сечение радиационного захвата в этих же условиях имеет вид

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0}\Gamma_\gamma}{(E-E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \lambda \gg R. \quad (22.4)$$

Если захватывается медленный нейтрон и при этом состояние составного ядра попадает в область перекрывающихся уровней ($\Gamma \sim D$), то усреднённое сечение деления определяется общей формулой (11.7)

$$\sigma_f = 2\pi^2 \lambda^2 g \frac{\Gamma_{n0}\Gamma_f}{\Gamma D}, \quad \text{где } g \begin{cases} 1, & \text{если } i=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } i>0. \end{cases} \quad (22.5)$$

(Мы воспользовались при этом тем обстоятельством, что орбитальный момент нейтрона $l=0$, поэтому $J = i \pm \frac{1}{2}$, если $i \neq 0$, и $J = \frac{1}{2}$, если $i=0$.)

Усреднённое сечение радиационного захвата в этих же условиях определяется формулой

$$\sigma_r = 2\pi^2 \lambda^2 g \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma D}, \quad \text{где } g \begin{cases} 1, & \text{если } i=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } i>0. \end{cases} \quad (22.6)$$

Если деление возможно уже под действием тепловых нейтронов, то ширина деления всегда больше радиационной ширины и полная ширина Γ практически совпадает с шириной деления Γ_f .

В том случае, когда ширина деления меньше расстояния между уровнями D , в ходе сечения деления с изменением энергии нейтрона могут наблюдаться резонансные эффекты. Если же $\Gamma_f \gg D$, то сечения деления и радиационного захвата будут монотонными функциями энергии нейтрона.

Среднее сечение деления, определяемое формулой (22.5), будет равно при этом ($\Gamma \approx \Gamma_f$):

$$\sigma_f = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}}{D} = \pi^2 \lambda^2 \zeta, \quad (22.7)$$

где ζ — вероятность прилипания нейтрона. Заметим, что сечение σ_f почти совпадает с сечением образования составного ядра, так как Γ_f близко к Γ . Среднее сечение радиационного захвата для ядер, могущих делиться под действием тепловых нейтронов, определяется формулой

$$\sigma_r = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma D} \approx \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_f} \sigma_f. \quad (22.8)$$

Оба выражения (22.7), (22.8) для σ_f и σ_r справедливы вплоть до таких энергий, при которых начинает играть роль неупругое рассеяние нейтронов (~ 1 MeV). При энергии нейтрона $E \sim 10^6$ eV σ_f оказывается по порядку величины равным 10^{-24} см², если считать, что коэффициент прилипания для энергии $E \sim 10^6$ eV равен примерно 1/3.

В случае захвата быстрого нейтрона ($k \ll R$) сечение деления σ_f определяется формулой

$$\sigma_f \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_f}{\Gamma}. \quad (22.9)$$

Заметим, что, помимо нейтронов, деление могут вызывать также дейтроны, протоны, γ -лучи и другие частицы, если они обладают достаточно большой энергией, чтобы создать нужное возбуждение ядра [91], [92].

Что касается дейтронов, то следует иметь в виду, что они должны иметь возможность целиком проникнуть в ядро. Нейтрон, захватываемый ядром в результате диссоциации медленного дейтрона в поле ядра (процесс Оппенгеймера-Филлипса), оказывается неспособным вызвать деление, так как возникающее при этом возбуждение ядра меньше критической энергии деления E_f [86].

§ 23. Цепная реакция. При делении тяжёлых ядер под действием нейтронов, помимо ядер-осколков, испускаются вторичные быстрые нейтроны, которые, в свою очередь, способны вызывать деление ядер. Эти нейтроны распределены по энергиям непрерывно, причём основная масса нейтронов имеет энергию около 1—2 MeV (максимальная энергия нейтронов составляет около 10 MeV).

Таким образом появляется возможность осуществления цепной ядерной реакции. Для того чтобы такая реакция происходила, необходимо выполнение ряда условий, к рассмотрению которых мы теперь перейдём.

Рассмотрим сначала простейший случай бесконечной мультиплицирующей системы, когда вещество, ядра которого способны делиться, занимает бесконечное пространство. В таких системах можно не интересоваться потерей нейтронов, имеющей место в системах конечных размеров и происходящей из-за диффузии нейтронов в окружающее пространство.

Пусть в состав мультиплицирующей системы входят только ядра тяжёлых элементов, могущих делиться под действием нейтронов. Обозначим через ν среднее число нейтронов, возникающих при одном акте деления ядра. При столкновении таких нейтронов с ядрами наиболее вероятны процессы деления и неупругого рассеяния ней-

тронов (радиационный захват быстрых нейтронов мал, но всё же происходит с заметной вероятностью).

Если неупругое рассеяние мало, то для протекания цепной реакции необходимо, чтобы ν было больше единицы.

Это же условие должно выполняться также и в том случае, когда неупругое рассеяние нейтронов не мало, но неупруго рассеянные нейтроны способны вызывать деление ядер. Для возможности последнего кинетическая энергия почти всех неупруго рассеянных нейтронов должна превосходить разность между критической энергией деления E_f и энергией связи нейтрона E_n , так как только в этом случае вероятность деления под действием неупруго рассеянных нейтронов будет достаточно большой. (Вблизи порога деления сечение деления стремится к нулю, см. § 22.)

Если неупруго рассеянные нейтроны (после одного или нескольких актов рассеяния) не способны вызывать деление, то возможность протекания цепной реакции будет определяться, кроме величины ν , вероятностью неупругого рассеяния и энергетическим спектром неупруго рассеянных нейтронов. Мы не будем, однако, подробно рассматривать этот случай.

Если из-за большого неупругого рассеяния, выходящего нейтроны из области энергии, в которой они способны делить ядра, а также из-за радиационного захвата нейтронов, роль которого возрастает с уменьшением энергии нейтронов, цепная реакция на быстрых нейтронах невозможна, то можно создать условия, благоприятствующие протеканию цепной реакции на медленных (тепловых) нейтронах. Для этой цели в систему необходимо ввести замедлитель—лёгкий элемент, ядра которого эффективно замедляют нейтроны при упругих столкновениях.

Легко вывести формулу, определяющую число столкновений, которое должен испытать быстрый нейтрон, чтобы стать тепловым. Будем для простоты считать, что масса ядра, с которым сталкивается нейтрон, значительно больше массы нейтрона. В этом случае при каждом упругом столкновении нейтрона, энергия которого равна E , с ядром замедлителя нейтрон в сред-

нем теряет энергию, равную

$$\Delta E = \frac{2E}{A+1}, \quad (*)$$

где A —отношение массы ядра к массе нейтрона. (Строго говоря, эта формула справедлива при $A \gg 1$; мы добавили в знаменателе к A единицу для того, чтобы формула давала правильный результат и при $A=1$.) Обозначим через $\nu(E)$ число столкновений, которое в среднем испытывает нейтрон при замедлении от энергии E_0 до энергии E . Для уменьшения энергии нейтрона на dE требуется $d\nu$ столкновений. Поэтому

$$\frac{dE}{d\nu} = -\frac{2E}{A+1},$$

откуда

$$\nu(E) = \frac{A+1}{2} \ln \frac{E_0}{E}.$$

Полагая здесь E равным kT (k —постоянная Больцмана, T —температура), мы найдём число столкновений, которое необходимо испытать нейтрону, чтобы стать тепловым.

Легко показать, что, двигаясь в углероде, нейтрон должен испытать в среднем 6,3 столкновения с атомами углерода, чтобы его энергия уменьшилась в e раз. После 14,6 столкновения его энергия уменьшается в 10 раз. Нейтрон с начальной энергией в 1 МэВ, испытав 110 столкновений, становится тепловым с энергией в $1/40$ эВ.

Приведём ещё формулу ^[120] для среднего квадрата длины замедления нейтронов $\overline{r^2(E)}$ ($r(E)$ —прямолинейное смещение нейтрона при замедлении от энергии E_0 до энергии E)

$$\overline{r^2(E)} = 2 \frac{1-\epsilon}{(1-\epsilon + \epsilon \ln \epsilon) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1}{A}\right)} \int_E^{E_0} l_s^2 \frac{dE}{E},$$

где $\epsilon = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$, l_s —длина свободного пробега нейтронов между двумя упругими столкновениями (эта величина зависит, вообще говоря, от энергии нейтрона).

При постоянном l_s

$$\overline{r^2(E)} = 2 \frac{(1-\epsilon) l_s^2}{(1-\epsilon + \epsilon \ln \epsilon) \left(1 - \frac{2}{3A}\right)} \ln \frac{E_0}{E}.$$

В том случае, когда $1-\epsilon \ll 1$, эта формула приобретает следующий вид:

$$\overline{r^2(E)} = A l_s^2 \ln \frac{E_0}{E}.$$

Полагая в приведённых формулах $E \approx kT$, найдём средний квадрат расстояния, которое должен пройти нейтрон, чтобы стать тепловым.

Цепная реакция на медленных нейтронах осуществляется, например, в системе, состоящей из урана и лёгкого замедлителя (графит, тяжёлая вода).

Как известно, основной изотоп урана делится только под действием быстрых нейтронов, имеющих энергию, большую чем $\sim 1 \text{ MeV}$. Поэтому большое неупругое рассеяние препятствует протеканию цепной реакции на быстрых нейтронах с использованием основного изотопа в качестве делящегося материала.

Изотоп U^{235} делится уже под действием тепловых нейтронов, причём в соответствии с законом $1/v$ эффективное сечение деления U^{235} особенно велико именно в тепловой области.

Эффективное сечение радиационного захвата нейтронов в тепловой области (изотопами U^{235} и U^{238}) также следует закону $1/v$, так что относительная вероятность деления и радиационного захвата в этой области энергии не зависит от энергии.

Введением замедлителя достигается возможность уменьшить роль радиационного захвата нейтронов ядрами основного изотопа U^{238} (приводящего к образованию плутония). Благодаря этому замедлением нейтронов до тепловых энергий создаются благоприятные условия для развития цепной реакции с использованием изотопа U^{235} (главным образом) в качестве делящегося материала.

Хотя при больших энергиях нейтронов ($E \geq 1 \text{ MeV}$) радиационный захват ядрами U^{238} очень мал, уже при энергиях $\sim 10^5 \text{ eV}$ он достигает величины порядка 10^{-25} см^2 . В области энергии нейтронов $kT < E < 10^4 \text{ eV}$ этот процесс играет наиболее важную роль.

Благодаря тому, что процентное содержание изотопа U^{235} очень невелико (число ядер U^{235} составляет около $1/140$ общего числа ядер урана), радиационный захват в области энергий нейтронов $10^4 - 10^5 \text{ eV}$ мешает протеканию цепной реакции в системах, не содержащих замедлителя.

Неблагоприятное для протекания цепной реакции соотношение между сечением радиационного захвата ядрами U^{238} и сечением деления ядер U^{235} (с учётом величины концентрации этого изотопа) имеет место вплоть до самых малых энергий нейтрона.

Положение, однако, резко меняется вблизи тепловой области, точнее говоря, при энергиях, меньших чем энергия наименьшего резонансного уровня U^{238} .

При приближении энергии нейтрона к тепловой области сечение резонансного поглощения нейтронов ядрами U^{238} становится малым по сравнению с сечением деления ядер U^{235} .

Для того чтобы разъяснить это обстоятельство, заметим, что в тепловой области, вообще говоря, нельзя пользоваться введёнными в § 22 сечениями, усреднёнными по большому числу уровней. Последние определяются, главным образом, областью энергии вблизи резонансных уровней. Если вблизи тепловой области нет резонансных уровней, то эффективное сечение в тепловой области может быть существенно меньше усреднённого сечения. Именно так и обстоит дело с радиационным захватом нейтронов ядрами основного изотопа U^{238} , для которых энергия наиболее низко расположенного резонансного уровня составляет несколько eV.

Определим сечение радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} в тепловой области, предполагая, что захват нейтронов обуславливается одним наиболее низко расположенным уровнем U^{238} , энергию которого обозначим через E_0 .

Общая дисперсионная формула [см. (18.1)] приводит к следующему выражению для сечения захвата $\sigma_T^{238}(kT)$:

$$\sigma_T^{238}(kT) = \pi \lambda_T^2 \frac{\Gamma_T \gamma_n(kT)}{(kT - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (23.1)$$

где $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$ — длина волны нейтрона, соответствующая тепловой энергии kT (k — постоянная Больцмана, T — температура); $\gamma_n(kT)$ — значение нейтронной ширины

уровня при энергии нейтрона, равной kT ; Γ_γ — радиационная и γ — полная ширина уровня.

Предполагая, что $\gamma \ll E_0$ и пренебрегая в знаменателе (23.1) тепловой энергией kT по сравнению с E_0 , представим сечение захвата $\sigma_T^{238}(kT)$ в виде

$$\sigma_T^{238}(kT) \approx \pi \lambda_T^2 \frac{\Gamma_\gamma \gamma_n(kT)}{E_0} \quad (23.1')$$

Сравним это выражение со значением усреднённого сечения радиационного захвата при энергии нейтронов, равной kT . Напомним, что усреднённое сечение определяется большим числом уровней n , согласно (19.5'), в интересующей нас области энергии определяется следующей формулой:

$$\bar{\sigma}_T^{238}(kT) = \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n}{D}, \quad (23.2)$$

где Γ_n — значение средней нейтронной ширины при энергии нейтронов, равной kT ; D — среднее расстояние между соседними уровнями.

По порядку величины D равно E_0 ; кроме того, $\Gamma_n \approx \gamma_n(kT)$. Поэтому из (23.1') и (23.2) вытекает соотношение

$$\sigma_T^{238}(kT) \approx \bar{\sigma}_T^{238}(kT) \frac{\Gamma_\gamma}{\pi E_0} \quad (23.3)$$

Считая, что $\Gamma_\gamma \approx 0,1 \text{ eV}$ и $E_0 \approx 10 \text{ eV}$, мы получим отсюда:

$$\sigma_T^{238}(kT) \approx 0,01 \bar{\sigma}_T^{238}(kT). \quad (23.3')$$

Таким образом в тепловой области сечение радиационного захвата значительно меньше, чем усреднённое сечение захвата.

Рассмотрим теперь сечение деления нейтронами ядер U^{235} в тепловой области.

Сечение деления ядер U^{235} , которое мы обозначим через σ_f^{235} , зависит от соотношения между шириной деления Γ_f и средним расстоянием между уровнями D .

Если $\Gamma_f \gg D$, то сечение деления совпадает с усреднённым сечением деления $\bar{\sigma}_f^{235}(kT)$, которое, согласно

(19.4), можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_f^{235}(kT) = \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{\Gamma D}. \quad (23.4)$$

Поскольку в этом случае полная (средняя) ширина практически совпадает с шириной деления Γ_f , формула (23.4) приобретает вид

$$\bar{\sigma}_f^{235}(kT) \approx \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (23.4')$$

Величины Γ_n и D относятся к изотопу U^{235} , однако можно думать, что эти величины не слишком отличаются от соответствующих значений для изотопа U^{238} . В таком случае сравнение формул (23.4') и (23.2) показывает, что усреднённое сечение деления $\bar{\sigma}_f^{235}(kT)$ по порядку величины совпадает с усреднённым сечением радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} (оба сечения относятся к тепловой области).

Итак, если $\Gamma_f \gg D$, то

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \bar{\sigma}_f^{235}(kT) \approx \bar{\sigma}_T^{238}(kT).$$

Используя соотношение (23.3'), мы получим отсюда

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx 100 \sigma_T^{238}(kT). \quad (23.5)$$

Это соотношение показывает, что, несмотря на малую концентрацию изотопа U^{235} ($\sim 10^{-2}$), вероятность деления ядер U^{235} и вероятность радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} становятся сравнимыми в тепловой области.

Отсюда следует, что могут быть созданы условия, благоприятные для протекания цепной реакции на медленных нейтронах.

К такому же выводу мы придём и в том случае, когда ширина деления Γ_f меньше среднего расстояния между уровнями. В этом случае сечение деления определяется дисперсионной формулой (16.4). В тепловой области

сечение деления имеет вид

$$\sigma_f^{235}(kT) = \pi \lambda_T^2 \frac{\gamma_n(kT) \Gamma_f}{(kT - E_0)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}, \quad (23.6)$$

где E_0 — энергия наиболее низко расположенного уровня ядра U^{235} . В рассматриваемом случае полная ширина уровня γ меньше расстояния между соседними уровнями, которое по порядку величины равно E_0 . Поэтому (23.6) можно заменить следующим приближённым соотношением:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \pi \lambda_T^2 \frac{\gamma_n(kT) \Gamma_f}{E_0^2}. \quad (23.6')$$

Сравнение (23.1') с (23.6') даёт:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \sigma_r^{238}(kT) \frac{\Gamma_f}{\Gamma_\gamma}. \quad (23.7)$$

(мы считаем, что энергия наиболее низко расположенного уровня в двух изотопах U имеет одинаковый порядок величины).

Если $\Gamma_f \gg 10^2 \Gamma_\gamma$, что, по видимому, имеет место, то формула (23.7) приводит к такому же результату, что и формула (23.5), т. е. вероятности деления ядер U^{235} и захвата ядрами U^{238} становятся сравнимыми в тепловой области.

Сформулируем теперь условие, необходимое для протекания цепной реакции на медленных нейтронах. Обозначим через P вероятность того, что первоначально имевшийся быстрый нейтрон будет захвачен ядром урана с последующим делением. Пусть при одном акте деления возникает в среднем ν быстрых нейтронов. Тогда среднее число нейтронов второго поколения будет равно:

$$k = P\nu.$$

Эта величина называется коэффициентом размножения системы. Если система имеет бесконечные размеры, так что отсутствует утечка нейтронов через внешнюю гра-

ницу системы, то условие протекания саморазвивающейся цепной реакции состоит, очевидно, в том, что величина k должна быть больше единицы. Если $k < 1$, то протекание цепной реакции невозможно.

Выясним, чем определяется вероятность P . Рассмотрим для этого историю жизни нейтрона [93, 94].

Быстрый нейтрон, появившийся в системе, может быть захвачен ядром урана ещё до того, как его энергия заметно уменьшится из-за столкновений с ядрами. В этом случае нейтрон может вызвать деление ядра U^{238} . Однако вероятность деления быстрыми нейтронами, которую мы обозначим через P_F , очень мала (она составляет всего несколько процентов). Это связано с тем, что энергия нейтрона в результате столкновений с ядрами замедлителя и урана очень быстро становится меньше, чем порог деления ядер U^{238} . (Если система содержит много замедлителя и мало урана, то быстрое уменьшение энергии нейтрона происходит из-за упругих соударений нейтрона с ядрами замедлителя. Если же, напротив, в системе много урана и мало замедлителя, то весьма вероятны неупругие столкновения нейтрона с ядрами U^{238} , которые ещё быстрее выводят нейтрон из области энергии, в которой он может производить деление.)

Итак, деление вызывается в основном тепловыми нейтронами.

Обозначим вероятность того, что быстрый нейтрон станет тепловым и в дальнейшем вызовет деление, через P_T . Величину P можно представить в виде

$$P = P_F + P_T.$$

Рассмотрим подробнее величину P_T .

В процессе замедления нейтрон может подвергнуться резонансному захвату ядром урана (в основном ядром U^{238}). Обозначим через ϕ вероятность того, что быстрый нейтрон замедлится до тепловой энергии, не будучи резонансно захваченным ядрами U^{238} (величина $1 - \phi$ представляет собой вероятность резонансного поглощения ядрами U^{238}).

Если нейтрон не будет захвачен в процессе замедления, то он достигнет тепловой области и впоследствии будет захвачен либо ядром урана, либо ядром замедлителя.

Пусть θ обозначает вероятность поглощения теплового нейтрона ядром урана (безразлично ядром какого именно изотопа). Если σ_f и σ_r — эффективные сечения для деления и резонансного захвата тепловых нейтронов, отнесённые к одному ядру смеси изотопов, то $\sigma_f/\sigma_f + \sigma_r$ представляет собой относительную вероятность того, что тепловой нейтрон, будучи поглощённым ядром урана, вызовет его деление. Поэтому величина

$$\theta_f = \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r}$$

определяет, очевидно, вероятность того, что тепловой нейтрон вызовет деление. Согласно теореме умножения вероятностей, искомая величина P_T равна:

$$P_T = \varphi \theta_f = \varphi \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r},$$

и, следовательно, коэффициент размножения нейтронов может быть представлен в виде

$$k = P\nu = P_{F\nu} + \nu\varphi\theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r}. \quad (23.8)$$

Условие протекания саморазвивающейся цепной реакции в бесконечной системе состоит в выполнении неравенства $k > 1$ [94].

Изложенные до сих пор соображения относились к бесконечным системам. Если система имеет конечные размеры, то для протекания саморазвивающейся цепной реакции, помимо условий, относящихся к бесконечной системе, необходимо выполнение ещё одного условия: размеры системы должны превосходить некоторые минимальные, так называемые критические размеры. Существование критических размеров связано с вылетом нейтронов из системы в окружающее пространство.

Если система имеет слишком малые размеры, то потеря нейтронов, обусловленная их диффузией в окружающее пространство, превосходит число нейтронов, рождающихся в системе в результате деления ядер. Так как вылет нейтронов из системы представляет собой поверхностный эффект, а рождение нейтронов в системе есть эффект объёмный, то с увеличением размеров системы первый из этих эффектов становится всё менее и менее существенным. Критические размеры представляют собой такие размеры, при которых потеря нейтронов, обусловленная их вылетом из системы, как раз компенсируется генерацией нейтронов в системе.

Возвращаясь к рассмотрению свойств бесконечных систем, необходимо отметить, что условие $k > 1$ может не выполняться для однородной смеси замедлителя и делящегося вещества, однако будет выполняться для неоднородной системы, состоящей из отдельных блоков делящегося вещества, пространство между которыми заполнено замедлителем.

Такая гетерогенная система, в которой расщепляющееся вещество распределено в виде блоковой решётки, включённой в замедлитель, может состоять, например, из стержней урана, упорядоченно расположенных в замедлителе (графите, тяжёлой воде и т. д.).

Выгодность гетерогенной системы связана с уменьшением резонансного поглощения при расположении делящегося вещества в виде отдельных блоков. Это обстоятельство вытекает из следующих соображений. В гомогенной системе нейтроны в процессе замедления всё время находятся в окружении ядер U^{238} , могущих их поглощать. В блоковой системе у нейтрона имеется возможность проскочить «опасную» зону вблизи уровня резонансного поглощения, находясь вдали от блока; иными словами, нейтрон может замедлиться до тепловой энергии с вероятностью, большей чем в гомогенной системе.

Таким образом радиационный захват нейтронов в блоковой системе может быть сильно уменьшен по сравнению с гомогенной системой.

Другая причина, в силу которой в блоковой системе уменьшается резонансное поглощение, состоит в том,

что внутренние части блоков в области сильного резонансного поглощения экранируются наружными слоями и поэтому «используются» неэффективно. Это экранирование приводит к тому, что радиационное поглощение нейтрона с энергией, близкой к резонансной, ядром урана, находящимся внутри блока, будет значительно меньше поглощения изолированным ядром.

Следует иметь в виду, что вместе с уменьшением резонансного поглощения имеет место также и уменьшение поглощения блоками нейтронов в тепловой области.

Однако эффект уменьшения резонансного поглощения оказывается более значительным, чем эффект уменьшения поглощения нейтронов в тепловой области.

Введённые выше величины φ и θ в гомогенной системе являются функциями концентраций делящегося вещества и замедлителя. В блоковой системе эти величины зависят ещё от размеров блоков и расстояний между ними.

Наивыгоднейшие условия протекания цепной реакции реализуются в том случае, когда величина $\varphi\theta$ достигает максимума. Существование такого максимума видно из следующих соображений. Увеличение θ , т. е. вероятности поглощения теплового нейтрона ядрами делящегося вещества, связано с увеличением концентрации делящегося вещества, например урана, и уменьшением концентрации замедлителя. Наоборот, увеличение φ , т. е. вероятности того, что нейтрон станет тепловым, не будучи резонансно захваченным, связано с уменьшением концентрации урана. Отсюда следует, что произведение $\varphi\theta$ достигает максимума при определённой, оптимальной концентрации урана.

В блоковой системе $\varphi\theta$ зависит ещё от размеров и расположения блоков урана. При некоторых значениях параметров блоковой решётки величина $\varphi\theta$ достигает максимума; эти значения параметров являются, очевидно, оптимальными.

Приведём значения вероятностей для различных процессов, происходящих с нейтроном в уран-графитовой блоковой системе [23].

Тип процесса	Вероятность в %
Деление, обусловленное быстрым нейтроном . . .	3
Резонансное поглощение U^{238} (вне тепловой области)	10
Поглощение в графите	10
Поглощение теплового нейтрона ураном U^{235} и U^{238}	77

Плотность нейтронов с определённой энергией в блоковой системе, состоящей из большого числа ячеек, изменяется от точки к точке вдоль решётки.

Для описания свойств неоднородной системы можно в первом приближении не рассматривать локальных изменений нейтронной плотности, связанных с периодической структурой системы *). Иными словами, в первом приближении мы заменяем истинные нейтронные плотности их средними значениями, которые получаются при усреднении плотности по объёму ячейки (ячейка представляет собой урановый блок вместе с прилегающей к нему частью замедлителя). Такая усреднённая плотность будет плавной функцией точки, как если бы система была однородной. Таким образом мы заменяем неоднородную блоковую систему некоторой эквивалентной однородной системой.

Рассмотрим плотность тепловых нейтронов в точке $r(x, y, z)$ в момент времени t , которую мы обозначим через $n(r, t)$. Эта функция удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \frac{1}{\tau_c} n + q, \quad (23.9)$$

где D — коэффициент диффузии тепловых нейтронов, τ_c — время их жизни по отношению к захвату и q — плотность источников тепловых нейтронов.

Мы будем рассматривать далее стационарный случай и положим поэтому $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$.

*) Мы следуем ниже [23].

Определим плотность источников тепловых нейтронов q . Обозначим через $Q(r)$ число быстрых нейтронов, возникающих в единицу времени в единице объёма около точки r внутри нашей системы. Сталкиваясь при своём движении с ядрами замедлителя, эти нейтроны замедляются, но в ходе замедления часть их резонансно поглощается и не доходит до тепловой области. Мы обозначим через φ вероятность того, что быстрый нейтрон превратится в тепловой, не будучи резонансно захваченным. Замедление быстрого нейтрона, родившегося в точке r' , может окончиться в различных точках r . Для простоты можно предполагать, что вероятность нейтрону замедлиться в точке r выражается гауссовой функцией от расстояния $|r' - r|$. Иными словами, мы предполагаем, что вероятность быстрому нейтрону, родившемуся в элементе объёма dV' около точки r' , стать тепловым в точке r имеет вид

$$\frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \cdot e^{-\frac{|r'-r|^2}{r_0^2}} \cdot dV', \quad (23.10)$$

где r_0^2 — средний квадрат длины замедления нейтронов. (Будучи проинтегрированным по dV' , это выражение даёт φ , как и должно быть.)

Умножив эту вероятность на $Q(r')$ и проинтегрировав по dV' , мы найдём, очевидно, плотность источников тепловых нейтронов, т. е. функцию $q(r)$:

$$q(r) = \frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \int Q(r') e^{-\frac{|r'-r|^2}{r_0^2}} dV'. \quad (23.11)$$

Заметим теперь, что быстрые нейтроны возникают в результате делений ядер, вызываемых, главным образом, тепловыми нейтронами. Иными словами, $Q(r)$ может быть выражено через плотность тепловых нейтронов $n(r)$.

Число тепловых нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объёма, равно $\frac{1}{\tau_c} n(r)$. Умножив эту

величину на θ_f , мы найдём число нейтронов, поглощаемых в единицу времени ураном и вызывающих при этом деление его ядер. Так как в одном акте деления возникает в среднем ν нейтронов, то число быстрых нейтронов, рождающихся в единицу времени в единице объёма, равняется:

$$\frac{\nu \theta_f}{\tau_c} n(r).$$

Если имеется ещё внешний источник быстрых нейтронов, дающий $Q_0(r)$ нейтронов в единицу времени в единице объёма, то искомая функция $Q(r)$ представится в виде

$$Q(r) = Q_0(r) + \frac{\nu \theta_f}{\tau_c} n(r). \quad (23.12)$$

Обычно, однако, $Q_0 = 0$.

Подставив (23.12) в (23.11), мы выразим плотность источников тепловых нейтронов $q(r)$ через плотность тепловых нейтронов $n(r)$. Подставив далее полученное выражение для $q(r)$ в формулу (23.9), получим следующее интегральное уравнение для определения плотности тепловых нейтронов:

$$\begin{aligned} D \Delta n - \frac{1}{\tau_c} n + \frac{\nu \theta_f \varphi}{\pi^{3/2} r_0^3 \tau_c} \int n(r') e^{-\frac{|r'-r|^2}{r_0^2}} dV' = \\ = - \frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \int Q_0(r') e^{-\frac{|r'-r|^2}{r_0^2}} dV'. \end{aligned} \quad (23.13)$$

Решение этого уравнения можно найти, разлагая $Q_0(r)$ и $n(r)$ в ряды Фурье.

Если размеры системы велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, то граничное условие задачи заключается в равенстве нулю плотности нейтронов на внешней поверхности системы (см. в связи с этим следующий параграф).

Рассмотрим случай, когда система имеет форму куба, ребро которого равно a . Компоненты Фурье функции $Q_0(r')$ имеют вид

$$Q_0 \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z$$

(начало координат — в одной из вершин куба; n_1, n_2, n_3 — положительные целые числа).

Легко убедиться в том, что этой компоненте Фурье $Q_0(\mathbf{r})$ соответствует следующая компонента Фурье функции $n(\mathbf{r})$:

$$n = \tau_c \varphi Q_0 \frac{\sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z}{(1 + D\tau_c \omega^2) e^{\omega^2 r_0^2/4} - \nu \theta_f \varphi}, \quad (23.14)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Критические размеры системы могут быть найдены из условия обращения в нуль знаменателя (23.14) для основной гармоник, т. е. при $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Действительно, в этом случае нейтронная плотность обращается в бесконечность и, следовательно, она будет отлична от нуля в отсутствие внешнего источника, когда $Q_0 = 0$.

Итак, для определения критических размеров мы получаем уравнение

$$\left(1 + \frac{3\pi^2}{a^2} D\tau_c\right) e^{\frac{3\pi^2 r_0^2}{4a^2}} = \nu \theta_f \varphi. \quad (23.15)$$

Обычно $a \gg r_0$, поэтому экспоненциальный множитель может быть заменён на $1 - \frac{3}{4} \frac{\pi^2 r_0^2}{a^2}$. Уравнение (23.15) приводит к следующему значению критического ребра куба:

$$a = \frac{\pi \sqrt{3 \left(D\tau_c + \frac{1}{4} r_0^2 \right)}}{\sqrt{k-1}}, \quad (23.16)$$

где k — коэффициент размножения, равный в рассматриваемом случае $\nu \theta_f \varphi$. (Учитывая деление на быстрых нейтронах, сюда следует вместо k подставить $\nu P_F + \nu \theta_f \varphi$).

Мы видим, что критические размеры системы (линейные) обратно пропорциональны $(k-1)^{1/2}$.

Заметим, что критические размеры могут быть уменьшены, если окружить систему слоем так называемой нейтронной изоляции, которая частично отражает обратно нейтроны, покинувшие систему.

§ 24. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах. Рассмотрим сферу, состоящую из вещества, в котором цепная реакция может поддерживаться без участия тепловых нейтронов. Ради простоты будем считать, что изоляция отсутствует. Определим критические размеры сферы*).

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что критические размеры могут оказаться сравнимыми с длиной свободного пробега нейтронов. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, при реакции на быстрых нейтронах нет необходимости замедлять нейтроны и, во-вторых, в рассматриваемом случае величина коэффициента размножения может быть гораздо больше, чем в случае систем, работающих на медленных нейтронах**).

Если размеры системы велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, то для описания цепной реакции можно пользоваться диффузионной картиной; в этом случае плотность нейтронов удовлетворяет диффузионному уравнению (см. § 23).

Если размеры системы сравнимы с длиной свободного пробега, то диффузионная теория неприменима. В этом случае следует исходить из точного кинетического уравнения.

Для получения полукачественных результатов мы сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Длина свободного пробега нейтрона l (с учётом возможности деления, радиационного захвата и рассеяния) не зависит от энергии нейтрона. Иными словами, не зависит от энергии величина

$$\alpha = \frac{1}{l} = N(\sigma_f + \sigma_r + \sigma_s),$$

* Мы следуем ниже изложению Р. Пайерлса [95].

** Критические размеры (линейные), согласно (23.16), обратно пропорциональны $(k-1)^{1/2}$.

где $\sigma_f, \sigma_r, \sigma_s$ — соответственно сечения деления, радиационного захвата и рассеяния нейтронов, N — число ядер в единице объёма.

2. Не зависит от энергии величина

$$\beta = N(\sigma_s + \nu\sigma_f),$$

где ν — число нейтронов, возникающих при одном акте деления ядра.

3. Все рождающиеся нейтроны имеют одинаковую энергию.

4. Отсутствует неупругое рассеяние нейтронов.

5. Упругое рассеяние нейтронов является сферически симметричным.

При выполнении этих предположений вместо функции распределения, зависящей как от координат, так и от компонент скорости нейтрона для описания нейтронного поля можно пользоваться обычной плотностью нейтронов. Обозначим последнюю в точке (x, y, z) в момент времени t через $n(x, y, z, t)$.

Общее число рассеянных и родившихся вторичных нейтронов в элементе объёма $dx' dy' dz'$ за время dt' равно, очевидно:

$$\beta \nu n(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt',$$

где ν — скорость нейтронов.

Будем следить за движением этих нейтронов.

На расстоянии r от точки (x', y', z') их число уменьшится в $e^{-\alpha r}$ раз. Они будут равномерно заполнять сферический слой радиуса r и толщины $\nu dt'$. Плотность нейтронов в точке (x, y, z) рассматриваемого слоя в момент времени $t' = t - \frac{r}{\nu}$ будет:

$$\frac{\beta}{4\pi r^2} n(x', y', z', t') e^{-\alpha r} dx' dy' dz',$$

$$t' = t - \frac{r}{\nu}.$$

Проинтегрировав это выражение по (x', y', z') , мы получим, очевидно, плотность в точке (x, y, z) в момент t ,

г. е. величину $n(x, y, z, t)$. Итак,

$$n(x, y, z, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z', t - \frac{r}{\nu}) \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} dx' dy' dz', \quad (24.1)$$

где интегрирование совершается по объёму тела.

Мы получили интегральное уравнение для плотности нейтронов n , которое при сделанных выше предположениях заменяет общее кинетическое уравнение.

Перейдём к исследованию этого уравнения.

Будем искать решение (24.1) в виде

$$n(x, y, z, t) = n(x, y, z) e^{\lambda t}. \quad (24.2)$$

Развитию цепной реакции отвечают, очевидно, значения $\lambda > 0$.

Уравнение (24.1) после подстановки в него (24.2) приобретает вид

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-(\alpha + \lambda/\nu)r} \frac{dx' dy' dz'}{r^2}. \quad (24.3)$$

Если система имеет критические размеры, то $\lambda = 0$. Определение критических размеров сводится поэтому к следующей математической задаче. Требуется выяснить, при каких условиях уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-\alpha r} \frac{dx' dy' dz'}{r^2} \quad (24.3')$$

имеет нетривиальные решения.

Мы рассмотрим тот случай, когда мультиплицирующая система имеет форму шара, и покажем, что нетривиальное решение имеет место только при определённом, критическом радиусе сферы.

Заметим, что, найдя решение уравнения (24.3'), мы тем самым найдём решение общего уравнения (24.3), стоит лишь вместо α подставить $\alpha + \lambda/\nu$.

Сформулируем теперь условие протекания саморазвивающейся цепной реакции. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы на единице длины пути нейтрона число появляющихся новых нейтронов превосходило число поглощаемых нейтронов. Первое из этих чисел равно $N\sigma_f \nu$, а второе — $N\sigma_c$, где σ_c — сечение поглощения

нейтрона, равное

$$\sigma_c = \sigma_f + \sigma_r.$$

Итак, для протекания цепной реакции необходимо выполнение условия

$$N\sigma_f v > N\sigma_c$$

или

$$(v-1)\sigma_f > \sigma_r. \quad (24.4)$$

Если воспользоваться введенными выше величинами α и β , то это условие может быть представлено в виде

$$\beta > \alpha. \quad (24.4')$$

Мы рассмотрим далее два предельных случая, когда $\beta - \alpha \ll \beta$ и когда $\beta \gg \alpha$.

1) Если $\beta - \alpha \ll \beta$, то требуется много столкновений для существенного возрастания числа нейтронов. Поэтому в этом случае возможно диффузионное рассмотрение задачи (см. предыдущий параграф).

Плотность нейтронов при выполнении условия

$$\beta - \alpha \ll \beta$$

испытывает малое изменение на расстояниях порядка длины свободного пробега. Поэтому функцию $n(x', y', z')$ в интеграле (24.3') можно разложить в ряд по степеням $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ и сохранить в нём члены не выше второго порядка. Вдали от границы члены первого порядка при интегрировании по $dx'dy'dz'$ дают нуль, и мы приходим к диффузионному уравнению

$$\frac{\beta}{3a^2} \Delta n + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) n = 0. \quad (24.5)$$

Легко убедиться в том, что коэффициенты, стоящие в (24.5) перед Δn и n , имеют обычный для диффузионного уравнения вид.

Действительно, умножив уравнение (24.5) на v и воспользовавшись определением величин α и β , можно представить это уравнение в виде

$$\frac{lv}{3} \Delta n + \frac{v}{l_c} (v\theta - 1) n = 0, \quad (24.5')$$

где l — длина свободного пробега нейтрона как по отношению к рассеянию, так и по отношению к захвату, $l_c = (N\sigma_c)^{-1}$ — длина пробега по отношению к захвату и $\theta = \sigma_f/\sigma_c$.

Величина $lv/3$ представляет собой коэффициент диффузии нейтронов, а l_c/v — время жизни нейтрона по отношению к захвату. Член $(v/l_c)n$ даёт число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объёма, а $(v/l_c)v\theta n$ — число нейтронов, рождающихся в единицу времени в единице объёма.

Для решения уравнения (24.5) нужно знать граничное условие на внешней поверхности мультиплицирующей системы.

Можно показать [96], что для больших систем, размеры которых значительно больше длины свободного пробега нейтронов, это условие имеет вид

$$0,71l \cdot \frac{\partial n}{\partial x} + n = 0, \quad (24.6)$$

где x — направление внешней нормали к поверхности тела.

Для больших систем $\frac{\partial n}{\partial x} \sim \frac{n}{R}$, где R по порядку величин характеризует линейные размеры системы. Поэтому отношение первого члена ко второму в (24.6) по порядку величины равно $l/R \ll 1$. Таким образом для больших систем граничное условие может быть в первом приближении сформулировано в виде требования, чтобы нейтронная плотность обращалась в нуль на внешней поверхности системы

$$n = 0. \quad (24.6')$$

В рассматриваемом нами случае малых мультипликаторов, когда $\beta - \alpha \ll \beta$, размеры системы значительно больше длины свободного пробега, поэтому в первом приближении мы будем пользоваться условием (24.6').

Возвращаясь к уравнению (24.5), найдём его решение в случае мультиплицирующей сферы.

Сферически симметричное решение (24.5) имеет вид

$$n(r) = \text{const.} \cdot \frac{\sin pr}{r}, \quad (24.7)$$

где r — расстояние до центра сферы и

$$p = \sqrt{3\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Если исходить из граничного условия (24.6'), то критический радиус R_0 найдётся из уравнения $\sin pR_0 = 0$, откуда *)

$$R_0 = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{3 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} = \frac{\pi \sqrt{\frac{1}{3} U_0}}{\sqrt{\nu\theta - 1}} = \frac{\pi \sqrt{D\tau_c}}{\sqrt{k-1}}, \quad (24.8)$$

где $l = \frac{1}{\alpha} = [N(\sigma_s + \sigma_c)]^{-1}$ — длина свободного пробега нейтронов по отношению к процессам рассеяния и поглощения, $l_0 = \frac{1}{N\sigma_c}$ — длина пробега нейтрона по отношению к поглощению, $\theta = \sigma_f/\sigma_c$, $D = \frac{1}{3}lv$ — коэффициент диффузии нейтронов, $\tau_c = l_0/v$ — время жизни нейтрона по отношению к захвату, $k = \nu\theta$ — коэффициент размножения нейтронов.

Так как по условию $1 - \alpha/\beta \ll 1$, то из (24.8) следует, что критический радиус значительно больше длины пробега l , как это и утверждалось выше.

Заметим, что формула (24.8) совпадает с формулой (23.16) для критических размеров куба, если считать в последней длину замедления нейтронов r_0 равной нулю и отвлечься от множителя $\sqrt{3}$, связанного с другой геометрией задачи. Это обстоятельство является следствием того, что в обоих случаях мы пользовались диффузионным рассмотрением, справедливым при малых мультипликациях.

Использование точного граничного условия (24.6) приводит к следующему уравнению для определения величины R_0 :

$$pR_0 \operatorname{ctg} pR_0 = 1 - \frac{\alpha R_0}{0,71}. \quad (24.9)$$

*) Плотность нейтронов является существенно положительной величиной, поэтому мы должны брать наименьший (не считая нуля) корень уравнения $\sin x = 0$.

Обозначая $1 - \alpha/\beta$ через ξ^2 и пренебрегая при малых ξ степенями ξ выше второй, получим из (24.9):

$$\frac{1}{pR_0} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \xi + 0,71 \frac{3}{\pi^2} \xi^2 = 0,55\xi + 0,22\xi^2. \quad (24.10)$$

2) Рассмотрим теперь другой предельный случай — случай больших мультипликаций, когда $\beta \gg \alpha$.

Заметим, что этот случай является фиктивным и практически не осуществляется, так как для выполнения условия $\beta \gg \alpha$ необходимо, чтобы ν было значительно больше единицы. Тем не менее рассмотрение этого случая представляет интерес, так как при этом получаются критические размеры, значительно меньшие, чем длина свободного пробега l .

Зная зависимость критического радиуса от эффективных сечений в двух предельных случаях $R_0 \gg l$ и $R_0 \ll l$, можно путём интерполирования находить R_0 в промежуточной области ($R_0 \approx l$), для которой непосредственное вычисление критических размеров очень затруднительно.

При выполнении условия $\beta \gg \alpha$ можно пренебречь показателем в множителе $e^{-\alpha R}$, входящем в интегральное уравнение (24.1), так как оказывается, что радиус сферы в рассматриваемом случае значительно меньше длины свободного пробега.

Итак, при $\beta \gg \alpha$ мы получаем из (24.3') уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') \frac{dx' dy' dz'}{r^2}, \quad (24.11')$$

где

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Будем предполагать, что плотность нейтронов n зависит только от расстояния ρ до центра сферы. В этом случае легко выполнить интегрирование по углам в уравнении (24.11'). В результате мы получим:

$$n(\rho) = \frac{\beta}{2} \int_0^R \frac{\rho'}{\rho} n(\rho') \ln \frac{\rho + \rho'}{|\rho - \rho'|} d\rho', \quad (24.11)$$

где R — радиус сферы.

Вводя вместо $n(\rho)$ функцию $f(\rho) = \rho n(\rho)$ и обозначая ρ/R через x , перепишем (24.11) в виде

$$\frac{2}{\beta R} f(x) = \int_0^1 f(x') \ln \frac{x+x'}{|x-x'|} dx', \quad f(0) = 0 \quad (24.12)$$

или иначе:

$$\lambda f = Lf, \quad f(0) = 0, \quad (24.12')$$

где $\lambda = 2/\beta R$ и L — интегральный оператор, входящий в (24.12).

Мы получили интегральное уравнение с положительным симметричным ядром. Нас интересует наибольшее собственное значение λ_0 этого уравнения.

Чтобы приближённо вычислить λ_0 , будем исходить из следующего свойства наибольшего собственного значения. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, не принимающая отрицательных значений и отличающаяся тем свойством, что отношение Lf/f ограничено. Тогда, если Lf/f заключено в пределах Δ_1 и Δ_2 :

$$\Delta_1 < \frac{Lf}{f} < \Delta_2,$$

то в этих же пределах находится также наибольшее собственное значение λ_0^* :

$$\Delta_1 < \lambda_0 < \Delta_2.$$

*) В этом легко убедиться следующим образом. Если $\varphi_0(x)$ есть собственная функция оператора L , соответствующая наибольшему собственному числу λ_0 :

$$L\varphi_0(x) = \lambda_0 \varphi_0(x), \quad (*)$$

то интеграл

$$\int_0^1 f(x) \varphi_0(x) dx \quad (**)$$

не может быть равен нулю, поскольку подинтегральная функция не меняет своего знака. Действительно, функция $f(x)$ по условию принимает только положительные значения, а $\varphi_0(x)$ как собственная функция, соответствующая наибольшему соб-

Отсюда следует, что если нам удастся подобрать такую функцию $f(x)$ (не принимающую отрицательных значений), для которой величины Δ_1 и Δ_2 будут мало отличаться друг от друга, то тем самым мы найдём с большой степенью точности λ_0 .

В качестве $f(x)$ мы возьмём функцию

$$f(x) = x - bx^3, \quad (24.13)$$

где b — постоянная, которую мы надлежащим образом подберём.

Легко видеть, что

$$Lf = \frac{1}{2}(1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} + x - b \left\{ \frac{1}{4}(1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x \right\}.$$

Если $b=0$, то Lf/f изменяется от 1 до 2, причём эти значения достигаются в точках $x=0$ и $x=1$.

ственному числу, ни в одной точке не обращается в нуль и, следовательно, не изменяет своего знака.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд по собственным функциям оператора L (расположенным в порядке убывания собственных чисел):

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \varphi_j(x). \quad (***)$$

В силу неравенства нулю (**) коэффициент C_0 не может быть равен нулю

$$C_0 \neq 0.$$

Применяя к обеим частям равенства (***) n раз оператор L , получаем:

$$L^n f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \lambda_j^n \varphi_j(x),$$

откуда

$$\frac{L^n f(x)}{\lambda_0^n} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_0} \right)^n \varphi_j(x).$$

Если n устремить к бесконечности, то в правой части послед-

Мы подберём b таким образом, чтобы на границах интервала $(0,1)$ функция $f(x)$ принимала одинаковые значения. Для этого b должно равняться $b=0,639$. Оказывается, если взять функцию (24.13) с этим значением b , то

$$\Delta_1 = 1,55, \quad \Delta_2 = 1,59.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_0 = 1,57 \pm 0,02.$$

Итак, при $\beta \gg \alpha$ критический радиус R равен:

$$R_0 = \frac{2}{1,57\beta} = \frac{1}{0,78\beta}.$$

него равенства все слагаемые, кроме первого, стремятся к нулю. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n f(x)}{\lambda_0^n} = C_0 \varphi_0(x). \quad (****)$$

С другой стороны, условие $\Delta_1 < L < \Delta_2$ можно переписать в виде

$$\Delta_1 f < L f < \Delta_2 f.$$

Применяя к этому неравенству оператор L k раз, получаем:

$$\Delta_1 L^k f < L^{k+1} f < \Delta_2 L^k f.$$

Отсюда

$$\Delta_1 < \frac{L^{k+1} f}{L^k f} < \Delta_2$$

и, следовательно,

$$\Delta_1^k < \frac{\Delta_2^k f}{f} < \Delta_2^k.$$

В частности, имеем:

$$\frac{\Delta_1^n}{\lambda_0^n} f < \frac{L^n f}{\lambda_0^n} < \frac{\Delta_2^n}{\lambda_0^n} f.$$

Отсюда и из (****) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta_1}{\lambda_0} \right)^n f < C_0 \varphi_0(x) < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta_2}{\lambda_0} \right)^n f;$$

эти неравенства возможны только в том случае, если

$$\Delta_1 < \lambda_0 < \Delta_2,$$

что и требовалось доказать.

Мы видим, что в случае больших мультипликаций $\beta \gg \alpha$ критические размеры оказываются значительно меньшими, чем длина свободного пробега нейтронов $l = 1/\alpha$.

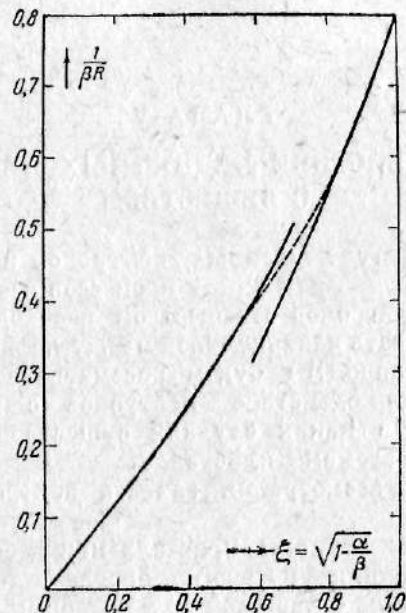


Рис. 8.

Для промежуточных значений отношения β/α критические размеры могут быть найдены интерполированием (см. рис. 8, на котором изображена зависимость $1/\beta R$ от $\sqrt{1-\alpha/\beta}$).

ГЛАВА V

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ
С ВЕЩЕСТВОМ

§ 25. Захват медленных нейтронов в кристаллах. При рассмотрении различных процессов взаимодействия медленных нейтронов с веществом необходимо, вообще говоря, учитывать наличие связи между ядрами вещества.

В этой главе мы будем рассматривать, главным образом, взаимодействие нейтронов с кристаллами и покажем, в каких случаях существенно наличие связи между атомами кристалла.

Начнём с рассмотрения захвата нейтронов в кристалле*).

Будем рассматривать кристалл как дебаевский континуум, состояние которого определяется заданием чисел фононов n_s с частотой ω_s и волновым вектором f_s . Состояние кристалла, задаваемое совокупностью числа n_s , мы обозначаем символом $\{n_s\}$.

Нас интересует вероятность $w(E)$ радиационного захвата нейтрона с энергией E ядром типа A , занимающим определённое положение в кристаллической решётке. В результате захвата излучается γ -квант с импульсом K , а решётка переходит из состояния $\{n_s^0\}$ в состояние $\{n_s\}$. Для краткости будем обозначать в дальнейшем начальное и конечное состояния всей системы (включающей нейтрон, ядро и γ -квант) соответственно символами $p\{n_s^0\}A$ и $K\{n_s\}B$ (B обозначает конечное состояние ядра, p — импульс нейтрона).

* Мы следуем работе Лэмба [97]. Ниже излагаются основные результаты этой работы.

Достижению конечного состояния предшествует образование составного ядра, которое мы обозначим через C .

Можно сказать, что конечное состояние достигается через промежуточное состояние, в котором нет ни нейтрона, ни γ -кванта. Это промежуточное состояние характеризуется наличием составного ядра C и некоторым состоянием решётки. Последнее мы будем определять заданием чисел фононов n'_s и обозначать через $\{n'_s\}$. Будем предполагать, что захват нейтрона обуславливается одним резонансным уравнением ядра C , энергию которого обозначим через E_0 .

На языке теории возмущений интересующая нас задача представляет собой эффект второго порядка. Пользуясь известными формулами теории возмущений [98], можно представить искомую вероятность $w(E)$ в следующем виде:

$$w(E) = \sum_{\{n_s\}} \left| \sum_{\{n'_s\}} \frac{(p\{n_s^0\}A | H | \{n'_s\}C)(\{n'_s\}C | H | K\{n_s\}B)}{E - E_0 + \sum_s \hbar \omega_s (n'_s - n_s) - \frac{1}{2} \Gamma(\{n'_s\})} \right|^2, \quad (25.1)$$

где $(p\{n_s^0\}A | H | \{n'_s\}C)$ обозначает матричный элемент перехода из начального состояния $p\{n_s^0\}A$ в промежуточное состояние, которое мы обозначаем через $\{n'_s\}C$; далее, $(\{n'_s\}C | H | K\{n_s\}B)$ есть матричный элемент перехода из промежуточного в конечное состояние $K\{n_s\}B$, наконец, $\Gamma(\{n'_s\})$ обозначает ширину состояния $C\{n'_s\}$.

В выражении (25.1) амплитуда вероятности суммируется по всем возможным числам фононов n'_1, n'_2, n'_3, \dots в промежуточном состоянии; квадрат модуля амплитуды вероятности суммируется по числам фононов в конечном состоянии, а черта над суммой означает, что результат усредняется по возможным начальным состояниям решётки.

Поскольку рассматривается захват медленных нейтронов, полная ширина $\Gamma(\{n'_s\})$ определяется, главным образом, радиационной шириной, которую можно счи-

тать практически не зависящей от состояния решётки. Поэтому в дальнейшем мы пренебрегаем зависимостью $\Gamma(\{n_s'\})$ от состояния решётки и пишем вместо $\Gamma(\{n_s'\})$ просто Γ .

Перейдём к определению матричных элементов, входящих в (25.1).

Обозначим через r_A радиус-вектор, определяющий положение ядра A ; r_A имеет вид $r_A = r_A^0 + u_A$, где r_A^0 — радиус-вектор, определяющий положение равновесия ядра A (r_A^0 — радиус-вектор некоторого узла решётки), а u_A — смещение A из положения равновесия, обусловленное тепловыми колебаниями решётки. Это смещение можно представить в виде

$$u_A = \sum_s e_s (\xi_s e^{\frac{if_s r_A^0}{\hbar}} + \xi_s^* e^{-\frac{if_s r_A^0}{\hbar}}).$$

Здесь индекс $s \equiv fj$ служит для обозначения колебания, частота и волновой вектор которого равны $\omega_s \equiv \omega_{fj}$ и f/\hbar и характер поляризации которого определяется индексом j ($j=1, 2, 3$); ξ_s и ξ_s^* — амплитуда колебания и комплексно сопряжённая ей величина, e_s — единичный вектор в направлении колебаний.

Волновая функция, описывающая колебательное состояние кристалла, имеет вид

$$\prod_s \varphi_{n_s}(\xi_s),$$

где $n_s \equiv n_{fj}$ — число фононов сорта s , $\varphi_{n_s}(\xi_s)$ — волновая функция гармонического осциллятора с энергией $\hbar\omega_s(n_s + \frac{1}{2})$ (ξ_s — координата осциллятора).

Заметим, что единственные матричные элементы ξ и ξ^* , отличные от нуля, равны:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n_s, n_s+1} &= \sqrt{\frac{\hbar(n_s+1)}{2MN\omega_s}} e^{-i\omega_s t}, \\ \xi_{n_s, n_s-1}^* &= \sqrt{\frac{\hbar n_s}{2MN\omega_s}} e^{i\omega_s t}, \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

где M — масса ядра, N — число ядер в кристалле.

Матричный элемент перехода из начального в промежуточное состояние имеет вид

$$\begin{aligned} \langle p \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C \rangle &= \int \frac{1}{V\Omega} e^{\frac{ipr}{\hbar}} \psi_A(i_A) \prod_s \varphi_{n_s^0}(\xi_s) H \psi_C^*(i_C) \times \\ &\times \prod_s \varphi_{n_s'}^*(\xi_s) dr d\tau_i d\tau_s, \end{aligned} \quad (25.3)$$

где $\psi_A(i_A)$ — волновая функция ядра A , зависящая от внутренних координат i_A ; такой же смысл имеет $\psi_C(i_C)$

для ядра C ; $\frac{1}{V\Omega} e^{ipr/\hbar}$ — нормированная на объём волновая функция нейтрона (Ω — объём кристалла). Интегрирование совершается по всему конфигурационному пространству (dr — элемент объёма в пространстве r , $d\tau_i$ — элемент объёма в пространстве внутренних координат ядер A и C , $d\tau_s = \prod_s d\xi_s$).

В § 3 мы видели, что при рассмотрении различных процессов взаимодействия медленных нейтронов с ядрами можно пользоваться своеобразной теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона с ядром пропорциональной $\delta(r - r_A)$.

В силу этого интегрирование по r сводится просто к замене r на r_A .

Обозначая матричный элемент, соответствующий захвату нейтрона свободным ядром A , через M_c , перепишем выражение (25.3) в виде

$$\langle p \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C \rangle = M_c e^{\frac{i}{\hbar} p r_A^0} (\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} p u_A} | \{n_s'\}), \quad (25.3')$$

где

$$(\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} p u_A} | \{n_s'\}) = \prod_s M_{n_s^0, n_s'},$$

$$M_{n_s^0, n_s'} = \int \varphi_{n_s^0}(\xi_s) e^{\frac{i}{\hbar} p u_s} \varphi_{n_s'}^*(\xi_s) d\xi_s$$

и

$$u_s \equiv u_{fj} = e_s (\xi e^{\frac{i}{\hbar} f_s r_s^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} f_s r_s^0}).$$

Вычисление матричных элементов $M_{n_s^0 n_s^0}$ может быть легко выполнено, если заметить, что $\xi \sim N^{-1/2}$, $N \gg 1$.

Вычислим сначала $M_{n_s^0 n_s^0}$. Разложив $e^{\frac{i}{\hbar} p u_s}$ в ряд по степеням ξ_s и ξ_s^* , получим:

$$M_{n_s^0 n_s^0} = (n_s^0 | e^{\frac{i}{\hbar} p u_s} | n_s^0) = \\ = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} (p e_s)^2 (n_s^0 | \xi_s \xi_s^* + \xi_s^* \xi_s | n_s^0) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

($O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ содержит члены, пропорциональные N^{-2} , N^{-3} , ...).

Пользуясь (25.2), получим:

$$M_{n_s^0 n_s^0} = 1 - \frac{1}{2\hbar} (p e_s)^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s}, \quad (25.4)$$

причём мы пренебрегли членами, содержащими N^{-2} , N^{-3} , ... Отсюда следует, что с точностью до N^2

$$|M_{n_s^0 n_s^0}|^2 \cong 1 - \frac{1}{\hbar} (p e_s)^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s}. \quad (25.4')$$

Определим теперь матричные элементы $M_{n_s^0 n_s^0}$, когда $n_s^0 \neq n_s^0$.

Разлагая снова $e^{\frac{i}{\hbar} p u_s}$ в ряд, легко убедиться в том, что достаточно ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда $n_s^0 = n_s^0 \pm 1$.

Вводя для краткости обозначение

$$q_s^2 = \frac{(p e_s)^2}{2MN\hbar\omega_s},$$

получим, на основании (25.2):

$$\left. \begin{aligned} |M_{n_s^0, n_s^0+1}|^2 &= (n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0-1}|^2 &= n_s^0 q_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Матричный элемент $(\{n_s^0\} C | H | K \{n_s\} B)$, отвечающий переходу из промежуточного в конечное состояние,

можно представить аналогично (25.3') в виде

$$(\{n_s^0\} C | H | K \{n_s\} B) = (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\}) M_r(K), \quad (25.6)$$

где M_r — матричный элемент, отвечающий испусканию фотона K свободным ядром.

Заметим, что из закона сохранения энергии следует, что величина $|K|$ зависит от конечного состояния решётки. Эта зависимость, однако, столь незначительна, что практически можно считать $|K|$ не зависящим от $\{n_s\}$.

Пользуясь этим обстоятельством, легко выполнить суммирование в формуле (25.1) по числам фононов n_1, n_2, \dots в конечном состоянии решётки.

Заметим для этого, что

$$\sum_{\{n_s\}} (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\}) (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\})^* = \\ = \sum_{\{n_s\}} (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\}) (\{n_s\} | e^{\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s^0\}) = \\ = (\{n_s^0\} | I | \{n_s^0\}) = \delta_{\{n_s^0\}, \{n_s^0\}},$$

где I — единичная матрица.

Пользуясь этим соотношением, представим (25.1) в виде

$$\omega(E) = |M_c M_r|^2 \sum_{\{n_s^0\}} \frac{|(\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} p u_s} | \{n_s^0\})|^2}{[E - E_0 + \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n_s^0)]^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (25.7)$$

Это выражение показывает, что различные промежуточные состояния решётки не интерферируют между собой.

Если пренебречь энергией, передаваемой решётке, то мы получим из (25.7):

$$\omega(E) = \frac{\text{const.}}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}.$$

Такой формулой, как мы знаем, определяется вероятность поглощения нейтрона свободным ядром.

Преобразуем общую формулу (25.7).

Используя известное свойство δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - a) f(\rho) d\rho = f(a),$$

перепишем (25.7) в виде

$$w(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[\rho + \sum_s (n_s^0 - n_s') \hbar \omega_s\right] \sum_{\{n_s'\}} \frac{| \langle n_s^0 | e^{i(\hbar)^{\mu} u_A} | \langle n_s' \rangle |^2}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} d\rho.$$

Замечая, что

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} d\mu,$$

получим:

$$w(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu \rho} d\rho}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum_{\{n_s'\}} | \langle n_s^0 | e^{\frac{i}{\hbar} \mu u_A} | \langle n_s' \rangle |^2 e^{i\mu \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n_s')} \quad (25.8)$$

[мы опустили здесь множитель $(M_c M_r)^s$].

Выше мы видели, что n_s' может отличаться от n_s^0 не более чем на единицу. Учитывая это обстоятельство и пользуясь формулами (25.4), (25.5), получим следующее выражение для $w(E)$:

$$w(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu \rho} d\rho}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \prod_s [1 + (n_s^0 + 1) q_s^2 e^{-i\mu \hbar \omega_s} + n_s^0 q_s^2 e^{i\mu \hbar \omega_s} - (2n_s^0 + 1) q_s^2]. \quad (25.9)$$

В этом выражении легко произвести усреднение по всем начальным состояниям решётки, так как числа фононов в начальном состоянии n_s^0 входят в (25.9)

линейно. Мы должны, очевидно, произвести усреднение по различным значениям чисел фононов n_s^0 . В результате такого усреднения n_s^0 заменится средним значением чисел фононов в состоянии s , которое, как известно, определяется формулой Планка.

В усреднённую вероятность входит бесконечное произведение вида

$$\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2).$$

Так как q_s^2 обратно пропорционально числу атомов в кристалле N , то при большом N имеет место приближённая формула

$$\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2) = 1 + \sum_s \lambda_s q_s^2 + \sum_{s < r} \lambda_s \lambda_r q_s^2 q_r^2 + \dots \approx e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}.$$

Действительно, разложение $e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}$ в ряд по степеням q_s^2 имеет вид

$$e^{\sum_s \lambda_s q_s^2} = 1 + \sum_s \lambda_s q_s^2 + \sum_{s < r} \lambda_s \lambda_r q_s^2 q_r^2 + \frac{1}{2} \sum_s \lambda_s^2 q_s^4 + \dots$$

Таким образом $\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2)$ отличается от $e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}$ отсутствием членов $\frac{1}{2} \sum_s \lambda_s^2 q_s^4$, $\frac{1}{6} \sum_s \lambda_s^3 q_s^6$, ..., которые обратно

пропорциональны соответственно N, N^2, \dots (следует иметь в виду, что каждое слагаемое в первой сумме обратно пропорционально N , но число слагаемых пропорционально N). В пределе, когда $N \rightarrow \infty$, приведённая выше формула становится точной.

Используя эту формулу, мы представим $w(E)$ в следующем виде:

$$w(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu \rho + g(\mu)}}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} d\rho d\mu, \quad (25.10)$$

где

$$g(\mu) = \sum_s q_s^2 \{ (\bar{n}_s + 1) e^{-\mu \hbar \omega_s} + \bar{n}_s e^{i\mu \hbar \omega_s} - 1 - 2\bar{n}_s \} \quad (25.11)$$

и \bar{n}_s — среднее число фононов в состоянии s , определяемое формулой Планка

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{T}} - 1}$$

(T — температура, выраженная в энергетических единицах).

В формуле (25.10) легко выполнить интегрирование по ρ с помощью теоремы о вычетах; в результате получим:

$$\omega(E) = \frac{2}{\Gamma} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\mu(E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}) + g(\mu)} d\mu. \quad (25.12)$$

Этой формулой определяется форма линии поглощения нейтрона в кристалле.

Если не учитывать дисперсии фононов и анизотропии скорости звука, то мы получим для $g(\mu)$ следующее выражение:

$$g(\mu) = \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{M\theta^3} \int_0^{\theta} [(1 + \bar{n}_\varepsilon) e^{i\mu\varepsilon} + \bar{n}_\varepsilon e^{-i\mu\varepsilon} - 2\bar{n}_\varepsilon - 1] \varepsilon d\varepsilon, \quad (25.13)$$

где

$$\bar{n}_\varepsilon = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} - 1}$$

и θ — температура Дебая, определяемая, как $\theta = \hbar \omega_{\max}$ (ω_{\max} — максимальная частота фононов; T и θ выражены в энергетических единицах).

В общем виде выполнить интегрирование в формуле (25.13) не удаётся. Мы ограничимся поэтому рассмотрением двух предельных случаев «слабой» и «сильной» связи, для которых несущественны значения μ , лежащие вблизи $\mu \sim 1/\theta$.

В первом из этих случаев — случае малых θ — в интеграле, определяющем $\omega(E)$, существенными оказываются малые μ , $|\mu\theta| \ll 1$. В случае «сильной» связи (большие θ) существенной является область больших μ , $|\mu\theta| \gg 1$.

Мы убедимся в справедливости этих утверждений, если рассмотрим выражения для $g(\mu)$ при $|\mu\theta| \ll 1$ и $|\mu\theta| \gg 1$.

Если $|\mu\theta| \ll 1$, то $g(\mu)$ можно разложить в ряд по степеням $\mu\theta$. В изотропном случае [см. (25.13)] мы получим при этом, ограничиваясь квадратичным относительно μ членом, следующую формулу для $g(\mu)$:

$$g(\mu) = -i\mu \frac{\rho^2}{2M} - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{M\theta^3} \mu^2 \int_0^{\theta} \left(\frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon^3 d\varepsilon, \quad |\mu\theta| \ll 1. \quad (25.14)$$

Введём обозначение

$$\varepsilon_0 = 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 T \int_0^{\theta/T} \left(\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} \right) t^3 dt;$$

тогда (25.14) переписывается в виде

$$g(\mu) = -i\mu\theta \frac{R}{\theta} - (\mu\theta)^2 \frac{R\varepsilon_0}{\theta^2}, \quad (25.15)$$

где R — энергия отдачи ядра, равная $R = p^2/2M$.

Отметим, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{3}{8} \theta, & \text{если } T \ll \theta, \\ \varepsilon_0 &= T, & \text{если } T \gg \theta. \end{aligned} \right\} \quad (25.16)$$

Из (25.15) в соединении с формулой (25.12), определяющей $\omega(E)$, легко заключить, что область малых μ , $|\mu\theta| \ll 1$, будет существенной в интеграле (25.12) при выполнении условия

$$R\varepsilon_0 \gg \theta^2. \quad (25.17)$$

Действительно, условие (25.17) означает, что коэффициент, стоящий при $(\mu\theta)^2$ в формуле (25.15), значительно больше единицы; поэтому в интеграле (25.12) большие значения величины $\mu\theta$ не могут играть существенной роли.

Так как $R \sim (m/M)E$ (E — энергия нейтрона), то условие (25.17) можно представить ещё в следующем виде:

$$E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}. \quad (25.17')$$

Вернемся к формуле (25.12) для $w(E)$.

Подставляя в неё вместо $g(\mu)$ выражение (25.15), получим следующее выражение для $w(E)$, справедливое в случае «слабой» связи:

$$\begin{aligned} w(E) &= \frac{2}{\Gamma} \int_0^{\infty} d\mu \cos \mu (E - E_0 - R) \exp\left(-\frac{1}{2} \mu \Gamma - \mu^2 R \varepsilon_0\right) = \\ &= \frac{4}{\Gamma^2} \int_0^{\infty} dy \cos yx e^{-y - y^2/\xi^2}, \end{aligned} \quad (25.18)$$

где

$$x = \frac{E - E_0 - R}{\Gamma/2}; \quad \xi = \frac{\Gamma}{\Delta}; \quad \Delta = 2\sqrt{R\varepsilon_0}.$$

Согласно (18.10) последний интеграл может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \frac{4}{\Gamma^2} \int_0^{\infty} dy \cos xy e^{-y - y^2/\xi^2} &= \\ &= \frac{4}{\Gamma^2} \frac{\xi}{2\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{4}{\Gamma^2} \psi(\xi, x). \end{aligned}$$

Мы получили для $w(E)$ выражение, формально совпадающее с выражением (18.9), справедливым для свободного ядра. Различие заключается в том, что доплеровская ширина Δ , входящая в (25.8), определяется формулой

$$\Delta = 2\sqrt{R\varepsilon_0}$$

вместо формулы

$$\Delta = 2\sqrt{RT},$$

относящейся к случаю свободного ядра. Таким образом в Δ входит вместо температуры величина ε_0 , которую можно трактовать как среднюю энергию, приходящуюся на одну колебательную степень свободы кристалла (в ε_0 входит также энергия нулевых колебаний). На рис. 9, взятом из работы [97], представлена зависимость ε_0/T от T/θ .

Из предельных формул для ε_0 вытекает, что доплеровская ширина линии поглощения в кристалле при низких температурах ($T \ll \theta$) больше соответствующей ширины для свободного ядра; при высоких темпе-

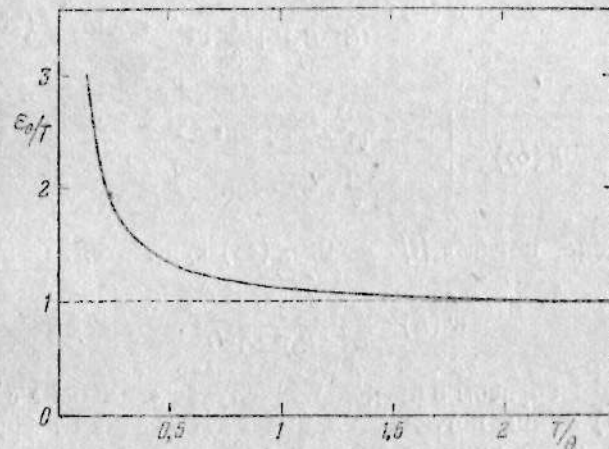


Рис. 9.

ратурах ($T \gg \theta$) ширины для связанного и свободного ядер одинаковы.

Заметим, что в рассматриваемом случае «слабой связи» центр линии поглощения совпадает с энергией $E_0 + R$, как и в случае свободного ядра (см. § 18).

Перейдём к рассмотрению случая сильной связи ($\theta \rightarrow \infty$).

Если $\varepsilon_0 R/\theta^2 \ll 1$, то, как известно из формулы (25.13), модуль функции $g(\mu)$ мал. В этом случае, очевидно, не существенны осциллирующие множители $e^{\pm i\mu x}$, входящие в (25.13). (Это значит, что главную роль играют большие μ , $|\mu\theta| \gg 1$.) Мы можем поэтому не рассматривать этих множителей и считать, что $g(\mu)$ приближённо равняется:

$$g(\infty) = -\frac{3p^2}{M\theta^4} \int_0^{\theta} \left[\bar{n}_e + \frac{1}{2} \right] \varepsilon d\varepsilon. \quad (25.15')$$

Подставляя в (25.12) $g(\infty)$ вместо $g(\mu)$, получим следующее выражение для $w(E)$, справедливое в случае «сильной связи»:

$$w(E) = \frac{e^{g(\infty)}}{(E-E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (25.19)$$

где

$$g(\infty) = \begin{cases} -6 \frac{RT}{\theta^2}, & \text{если } T \gg \theta, \\ -\frac{3R}{2\theta}, & \text{если } T \ll \theta. \end{cases}$$

В пределе, когда $\varepsilon_0 R/\theta^2 \rightarrow 0$, $g(\infty)$ стремится к нулю и

$$w(E) = \frac{1}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Таким образом в предельном случае «сильной» связи ($\theta \rightarrow \infty$) линия поглощения имеет естественную форму, причём центр линии совпадает с E_0 , т. е. с резонансной энергией, отвечающей бесконечно большой массе поглощающего ядра.

В рассмотренных предельных случаях слабой и сильной связи мы нашли аналитический вид функции $w(E)$. В промежуточных случаях для определения формы линии поглощения приходится производить численное интегрирование. На рисунках 10 и 11, взятых из работы [17], показано, какую форму имеет линия поглощения для кристалла с температурой Дебая $\theta = 210^\circ$ для двух значений Γ , равных $\theta/4$ и θ (абсциссой является X — отношение $E - E_0$ к $\Gamma/2$). Предполагается, что температура кристалла значительно ниже температуры Дебая. Для сравнения на рисунках показана также форма линии поглощения для свободного ядра при тех же значениях температуры и ширины Γ . Мы видим, что в промежуточных случаях форма линии поглощения в кристалле может сильно отличаться от формы линии поглощения в газе. Могут появляться даже дополнительные максимумы.

Так как $\varepsilon_0 \approx T$ при $T \gg \theta$, то из формулы (25.17') следует, что при выполнении условия

$$E_0 \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{T}$$

в случае высоких температур химическая связь не влияет на радиационный захват нейтронов, обусловленный уровнем E_0 .

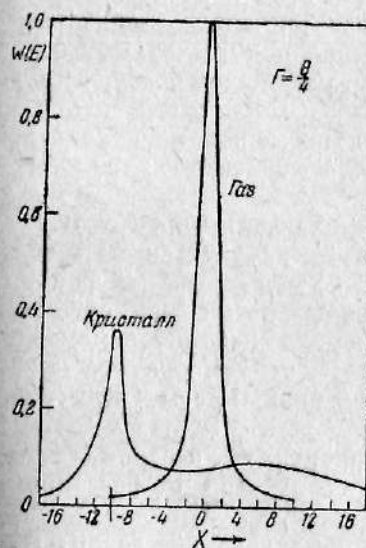


Рис 10.

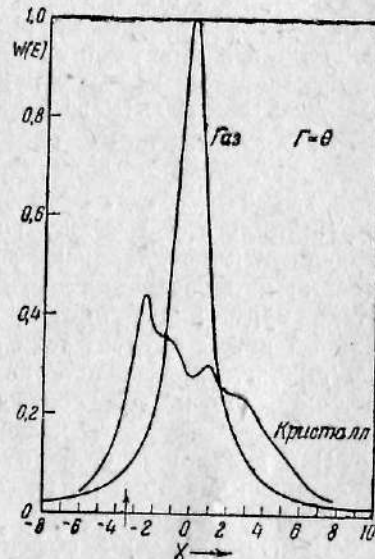


Рис 11.

Химическая связь может сказаться на радиационном захвате при $T \gg \theta$, если E_0 удовлетворяет условию

$$E_0 \leq \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{T}.$$

При $\theta = 200^\circ$, $T = 300^\circ$, $M/m = 200$ это условие даёт $E_0 \leq 5 \text{ eV}$.

Таким образом при $T \gg \theta$ только та часть поглощения в кристаллах, которая обусловлена наиболее низкими уровнями, может отличаться от поглощения свободными ядрами.

Если $T \ll \theta$, то влияние эффекта Доплера на поглощение в кристаллах отличается для всех уровней от соответствующего влияния эффекта Доплера в газах.

Низкие уровни ($E_0 \leq 5 \text{ eV}$) при $T \ll \theta$ могут испытывать ещё и дополнительные искажения.

§ 26. Упругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах. Мы рассмотрим в этом и следующих параграфах упругое и неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах, понимая под медленными нейтронами, энергия которых недостаточна для возбуждения ядер [195, [196], [197], [198], [199]].

Замедление таких нейтронов может происходить, очевидно, только благодаря возбуждению тепловых колебаний решётки.

Наличие связи между рассеивающими ядрами, образующими кристаллическую решётку, будет сказываться только при рассеянии достаточно медленных нейтронов. Ниже будет показано, что связь оказывается существенной в том случае, если энергия нейтронов меньше $(M/m)\theta$, где θ — характеристическая температура кристалла, m и M — соответственно массы нейтрона и ядра.

При достаточно больших энергиях рассеяние нейтронов в кристалле не будет отличаться от рассеяния свободными ядрами.

При определении эффективных сечений различных процессов рассеяния нейтронов в кристалле мы будем пользоваться теорией возмущения, считая энергию взаимодействия между нейтроном и ядром, так же как в § 3, равной

$$V_l = \alpha_l \delta(r - R_l), \quad (26.1)$$

где r и R_l — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и ядра, находящегося в l -м узле решётки; α_l — константа, не зависящая от расстояния между нейтроном и ядром. Этот вид энергии взаимодействия означает, что нейтрон сильно взаимодействует с ядром только в том случае, если координаты обеих частиц совпадают.

Для достаточно медленных нейтронов α_l можно считать не зависящей от энергии нейтрона.

Если отсутствует поглощение нейтронов ядрами, то α_l является вещественной величиной, могущей принимать как положительные, так и отрицательные значения. При наличии поглощения α_l — комплексная величина (см. § 30).

Величину α_l легко связать с сечением упругого рассеяния нейтронов свободными ядрами σ_s .

Пусть нейтрон с импульсом p сталкивается с ядром, масса которого равна M , и в результате столкновения приобретает импульс p' . Вероятность такого процесса, отнесённая к единице времени, определится согласно общей формуле теории возмущений:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |(p|V_l|p')|^2 \delta\left(E - E' - \frac{(p' - p)^2}{2M}\right). \quad (26.2)$$

Здесь E и E' — значения энергии нейтрона до и после столкновения с ядром; $(p|V_l|p')$ — матричный элемент энергии взаимодействия, равный

$$(p|V_l|p') = \frac{1}{\Omega} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')r} \alpha_l \delta(r - R_l) dr = \frac{\alpha_l}{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')R_l},$$

где $\frac{1}{\Omega^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}pr}$ — нормированная на объём Ω волновая функция нейтрона, dr — элемент объёма; δ -функция, входящая в (26.2), обеспечивает выполнение закона сохранения энергии; $(p' - p)^2/2M$ представляет собой энергию, приобретаемую ядром в результате столкновения с нейтроном,

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором импульс нейтрона лежит в телесном угле $d\Omega'$, равняется:

$$\begin{aligned} d\sigma_s &= \frac{w}{v/\Omega} \frac{\Omega p'^2 dv' d\Omega'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{\alpha_l^2}{4\pi^2\hbar^4} \delta\left(E - E' - \frac{(p' - p)^2}{2M}\right) \frac{p'^2 dv' d\Omega'}{v}, \end{aligned} \quad (26.3')$$

где v — начальная скорость нейтрона. Переходя от дифференциала импульса к дифференциалу энергии E' ,

получим:

$$d\sigma_s = \frac{a_1^2 m^2}{4\pi\hbar^4} \frac{p'}{p} \delta \left(E' - E + \frac{(p' - p)^2}{2M} \right) dE d\omega'. \quad (26.3)$$

Проинтегрируем сначала (26.3) по углам $d\omega'$. Имея в виду, что под знаком δ -функции стоит выражение

$$E' + \frac{m}{M} (E' + E) - E - \frac{2m}{M} \sqrt{EE'} \cos \vartheta = 0$$

(ϑ — угол между p и p'), найдём:

$$d\sigma_s = \frac{a_1^2 m M}{4\pi\hbar^4} \frac{dE'}{E}, \quad (26.4)$$

$$\left[\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E \leq E' \leq E \right].$$

Полученную зависимость сечения от энергии мы имели уже ранее (см. § 12). В § 12 формула (26.4) была выведена из предположения о сферической симметрии рассеяния в системе координат, где покоится центр инерции сталкивающихся нейтрона и ядра. Мы видим, таким образом, что это предположение, справедливое в случае рассеяния медленных нейтронов, эквивалентно выбору энергии взаимодействия между нейтронами и ядром в виде (26.1).

Интегрируя (26.4) по E' в пределах $\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E \leq E' \leq E$, найдём полное сечение упругого рассеяния свободными ядрами:

$$\sigma_s = \frac{a_1^2}{\pi\hbar^4} \left(\frac{mM}{M+m} \right)^2. \quad (26.5)$$

Свяжем ещё α с так называемой длиной рассеяния^[104]. Так как рассматриваются медленные нейтроны, рассеяние которых происходит сферически симметрично, то волновая функция нейтрона на больших расстояниях от ядра имеет следующий асимптотический вид:

$$\psi = e^{-ikz} - a \frac{e^{ikr}}{r},$$

где первое слагаемое представляет собой падающую волну (в направлении оси z), а второе — рассеянную. Величина a в рассматриваемом случае рассеяния мед-

ленных частиц не зависит от угла рассеяния. Она называется длиной рассеяния^[104]. Легко видеть, что сечение рассеяния нейтронов свободными ядрами равно:

$$\sigma_s = 4\pi |a|^2. \quad (26.5')$$

Величина a может быть как положительной, так и отрицательной (при наличии поглощения a — комплексная величина). Так как сечение рассеяния медленных частиц может быть представлено ещё и в такой форме:

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0,$$

где δ_0 — изменение фазы S -волны [см. § 1, формула (1.1')], то

$$a = \frac{\sin \delta_0}{k}.$$

Отсюда видно, что знак a зависит от того, будет ли δ_0 меньше или больше, чем π .

Заметим, что для большинства ядер $a > 0$ (Ba, Be, C, Ca, Cu, Fe, F, Mg, N, Ni, O, Pb, S, Zn и т. д.) и лишь для некоторых типов ядер $a < 0$ (Li, Mn)^[105]. Различные изотопы одного и того же элемента могут обладать отличающимися как по величине, так и по знаку значениями a .

Сравнение (26.5) с (26.5') показывает, что

$$\alpha = 2\pi\hbar^2 \frac{M+m}{Mm} a. \quad (26.5'')$$

Если ядро обладает механическим моментом (спином), то при рассеянии направление спина нейтрона может измениться на обратное. Это изменение связано с поворотом момента ядра в соответствии с законом сохранения момента количества движения.

При наличии спина ядра величина α_1 складывается из двух членов: постоянной A_1 , не зависящей от спина нейтрона S и спина ядра K_1 , и члена, учитывающего возможность изменения направления спина. Этот член должен содержать спиновые матрицы нейтрона и матрицы момента ядра. Так как спин нейтрона равен $1/2$,

то квадрат его спиновых матриц равен единице. В силу этого энергия взаимодействия может содержать спиновые матрицы нейтрона только линейно, иными словами, величина α_l должна иметь вид [106]

$$\alpha_l = A_l I + B_l SK_l,$$

где I — единичная матрица, A_l, B_l — константы.

Смысл этой формулы состоит в том, что α , а следовательно, и длина рассеяния зависят от взаимной ориентации спинов нейтрона и ядра. Иными словами, следует различать значения α_+ и α_- , относящиеся к параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и ядра. (По имеющимся экспериментальным данным [105] отношение обоих значений α составляет около 2 для B_l и около 3 для A_l .)

Замечая, что

$$SK = \frac{1}{2} \{J^2 - K^2 - S^2\},$$

где $J = K + S$, и полагая $J = j \pm \frac{1}{2}$ (j — квантовое число, определяющее момент ядра), найдём, что SK при параллельной ориентации спинов нейтронов и ядра равно:

$$(SK)_+ = \frac{1}{2} \left\{ \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) - j(j+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2} j,$$

а при антипараллельной ориентации спинов равно:

$$\begin{aligned} (SK)_- &= \frac{1}{2} \left\{ \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) - j(j+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} (j+1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что α_+ и α_- равны соответственно

$$\alpha_+ = A + \frac{1}{2} jB, \quad \alpha_- = A - \frac{1}{2} (j+1)B$$

и

$$A = \frac{(j+1)\alpha_+ + j\alpha_-}{2j+1}, \quad B = \frac{2(\alpha_+ - \alpha_-)}{2j+1}. \quad (26.6')$$

Напомним, что отличные от нуля матричные элементы проекций момента K_x, K_y, K_z определяются следу-

ющими формулами:

$$(K_z)_{mm} = m, \\ (K_x + iK_y)_{m+1, m} = (K_x - iK_y)_{m, m+1} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)},$$

где m — магнитное квантовое число ядра.

Представив α в виде

$$\alpha = AI + BS_z K_z + \frac{1}{2} B \{ (S_x - iS_y)(K_x + iK_y) + \\ + (S_x + iS_y)(K_x - iK_y) \},$$

мы видим, что член $A + BS_z K_z$ обуславливает переходы, при которых направление спина нейтрона не изменяется, а член $B(S_x K_x + S_y K_y)$ — переходы, при которых направление спина изменяется.

Легко показать, что если момент ядра отличен от нуля, то в формулу (26.4) вместо α_l^2 нужно подставить

$$A_l^2 + \frac{1}{4} j_l(j_l+1) B_l^2,$$

где j_l — значение момента количества движения l -ядра.

Найдем теперь выражение для энергии взаимодействия V нейтрона с кристаллической решёткой.

Для этого нужно просуммировать V_l по всем ядрам решётки:

$$V = \sum_l \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) = \sum_l [A_l + B_l (SK_l)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l). \quad (26.6)$$

Если ядра, образующие кристаллическую решётку, абсолютно тождественны, то константы A_l и B_l не зависят от l .

При наличии изотопов и механических моментов ядер величины A_l и B_l являются функциями номера узла l , даже в том случае, когда кристалл построен из атомов одного элемента.

В этом и следующих параграфах предполагается, что различие между ядрами решётки, если оно имеет место, вызывается только наличием изотопов и механических моментов ядер.

Мы будем рассматривать нейтрон и кристаллическую решётку как одну квантовомеханическую систему,

состояние которой характеризуется заданием импульса нейтрона p , его спинового магнитного квантового числа μ , квантовых чисел n_i всех осцилляторов, описывающих тепловые колебания решётки, и магнитных квантовых чисел ядер m_l ($|m_l| \leq j_l$).

Рассеяние нейтрона можно рассматривать как переход системы из состояния

$$p, \mu, n_1, n_2, \dots, m_1, m_2, \dots$$

в состояние

$$p', \mu', n'_1, n'_2, \dots, m'_1, m'_2, \dots$$

Волновая функция системы нейтрон + решётка имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} p r} \chi_\mu \prod_i \varphi_{n_i} \prod_l \psi_{m_l}, \quad (26.7)$$

где χ_μ — спиновая функция нейтрона ($\mu = \pm \frac{1}{2}$), φ_{n_i} — волновая функция i -го осциллятора (n_i представляет собой число фононов i -го сорта), наконец, ψ_{m_l} — спиновая волновая функция l -го ядра.

Определим матричный элемент энергии взаимодействия нейтрона с решёткой. Интегрирование по координатам нейтрона сводится просто к замене r на R_l . Подставляя вместо R_l сумму $R_l^0 + u_l$, где R_l^0 — радиус-вектор, определяющий положение равновесия l -го ядра, и u_l — его смещение из положения равновесия, вызванное тепловыми колебаниями решётки, представим матричный элемент в виде

$$M = \frac{1}{\Omega} \sum_i e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_i^0} (p, m_l | A_l I + B_l (K_l S) | p', m_l) \times \\ \times (\{n_i\} | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_l} | \{n'_i\}),$$

где для матричного элемента оператора V , отвечающего переходу из состояния a в состояние b , принято обозначение $(a | V | b)$ (символ $\{n_i\}$, так же как и в § 25, служит для обозначения всей совокупности чисел фононов n_i).

Матричный элемент, определяющий переходы в решётке, можно переписать в виде (обозначения — см. § 25)

$$(\{n_i\} | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_l} | \{n'_i\}) = \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_{ls}} | n'_s),$$

где

$$u_{ls} = e_s (\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} f_s R_l^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} f_s R_l^0}). \quad (26.8)$$

Найдём матричный элемент, определяющий переходы в системе магнитных квантовых чисел. Если направление спина нейтрона не изменяется, то матричный элемент равен:

$$(p, m_l | A_l I + B_l K_l S | p, m_l) = A_l \pm \frac{1}{2} m_l B_l, \quad (26.9)$$

где знак $+$ берётся при $\mu = +1/2$ и знак $-$ при $\mu = -1/2$.

При изменении направления спина нейтрона магнитное квантовое число может измениться только у одного из ядер, скажем у ядра с индексом l . Тогда $m'_l = m_l \pm 1$, $m'_l = m_l$ ($l' \neq l$). Матричный элемент равен при этом [16]:

$$(p, m_l | A_q I + B_q (S K_q) | p', m'_l) = \\ = \frac{B_l}{2} \sqrt{j_l(j_l + 1) - m_l(m_l \pm 1)} \delta_{ql}, \quad (26.10)$$

где знак $+$ берётся при $\mu' = \frac{1}{2}$ и знак $-$ при $\mu' = -\frac{1}{2}$.

Перейдём к рассмотрению упругого рассеяния нейтронов, при котором состояние решётки, т. е. числа фононов, не изменяются. Вероятность рассеяния $d\omega$, при котором импульс нейтрона p' находится в телесном угле $d\omega'$, связана с соответствующим матричным элементом M соотношением

$$d\omega = \frac{mp}{4\pi^2 \hbar^4} \Omega |M|^2 d\omega'. \quad (26.11)$$

Вероятность рассеяния, при котором направление спина не изменяется, мы обозначим через $d\omega_{\uparrow\uparrow}$. Она

равна, согласно (26.9), (26.11):

$$dw_{\uparrow\uparrow} = \frac{mp}{4\pi^2\hbar^4\Omega} dc' \left| \sum_l \left(A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right. \times \\ \left. \times \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) \right|^2. \quad (26.12)$$

Определим теперь вероятность рассеяния нейтрона с изменением направления его спина. Для этого нужно найти сначала вероятность рассеяния на l -м ядре и просуммировать затем результат по всем ядрам решётки. Мы получим, таким образом следующее выражение для вероятности, которую обозначим через $dw_{\uparrow\downarrow}$ [160], [163]:

$$dw_{\uparrow\downarrow} = \frac{mp dc'}{4\pi^2\hbar^4\Omega} \sum_l \frac{1}{4} B_l^2 \{ j_l(j_l+1) - \\ - m_l(m_l \pm 1) \} \left| \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) \right|^2. \quad (26.13)$$

Матричный элемент $(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s)$ мы определили уже в § 25 [формула (25.4)]. Он равен:

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) = 1 - \frac{1}{2\hbar} |p' - p| e_s \left| \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s} \right|, \quad (26.14)$$

где N — общее число ядер в кристалле и M — масса атома. (Мы не будем учитывать в дальнейшем зависимости массы ядра от l , считая, что массы изотопов мало отличаются друг от друга.)

Так как N очень велико, то формулу (26.14) можно переписать в виде

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) = \exp \left(-\frac{1}{2\hbar} |p' - p| e_s \left| \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s} \right| \right).$$

Произведение матричных элементов, входящих в (26.12) и (26.13), равняется:

$$\prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) = e^{-W}, \quad (26.15)$$

где

$$W = \frac{1}{2} \sum_s \frac{|(p'-p)e_s|^2}{MN\hbar\omega_s} \left(n_s + \frac{1}{2} \right) \quad (26.16)$$

представляет собой известную из теории рассеяния рентгеновских лучей экспоненту теплового фактора.

Вместо n_s сюда следует подставить среднее значение числа фононов в состоянии s , определяемое формулой Планка

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_s}{T}} - 1},$$

где T — температура, выраженная в энергетических единицах.

Заметим, что в (26.16) суммирование по s можно заменить интегрированием по

$$\frac{\Omega_s^2 d\mathbf{f}_s dc_s}{(2\pi\hbar)^3}$$

и суммированием по состояниям поляризации j (\mathbf{f}_s — импульс фонона частоты ω_s , dc_s — элемент телесного угла \mathbf{f}_s).

Если не учитывать дисперсии фононов *) и анизотропии скорости звука, то мы получим следующее выражение для W :

$$W = \frac{3}{2} \frac{(p'-p)^2}{M\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left(\frac{\theta}{T} \right) \right], \quad (26.17)$$

*) Дисперсия фононов не существенна при низких температурах, когда $T \ll \theta$.

где

$$D(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{x dx}{e^x - 1}$$

и θ — температура Дебая.

Формулы (26.12) и (26.13), определяющие вероятность рассеяния, должны быть усреднены по всем значениям магнитных квантовых чисел m_l и по всем распределениям изотопов в решётке.

Пользуясь формулой

$$\sum_{-j_l}^{+j_l} m_l^2 = \frac{1}{3} j_l (j_l + 1) (2j_l + 1),$$

получим следующие выражения для усреднённых вероятностей:

$$d\bar{w}_{\uparrow\uparrow} = \frac{mpdc'}{4\pi^2\hbar^4\Omega} \left\{ \overline{\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2} + \frac{1}{12} \overline{B_l^2 j_l (j_l + 1) N} \right\} e^{-2W}, \quad (26.18)$$

$$d\bar{w}_{\uparrow\downarrow} = \frac{mpdc'}{4\pi^2\hbar^4\Omega} \frac{1}{6} \overline{B_l^2 j_l (j_l + 1) N} e^{-2W}, \quad (26.19)$$

где черта сверху означает усреднение по всем возможным распределениям изотопов в решётке.

Определим среднее значение величины

$$\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2. \quad (26.20)$$

Вводя среднее значение A_l , определяемое как $\bar{A} = \sum A^{(s)} C_s$, где C_s — концентрация ядер *), для которых

*) Заметим, что возможны случаи, когда $\bar{A} = 0$, так как фазы волн, рассеянных от различных изотопов, могут быть противоположными (см. стр. 253, а также § 30).

величина A_l равна $A^{(s)}$, перепишем (26.20) в виде

$$\begin{aligned} \left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 &= \left| \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} + \bar{A} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 = \\ &= \left| \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 + \\ &+ \bar{A} \sum_{l'} e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_{l'}^0} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ &+ \bar{A} \sum_{l'} e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_{l'}^0} \sum_l e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ &+ \bar{A}^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2. \quad (26.20') \end{aligned}$$

При усреднении по распределениям изотопов второе и третье слагаемые дают нуль, так как $A_l - \bar{A} = 0$. Среднее значение от первого слагаемого (26.20') перепишем в виде

$$\overline{\sum_l \sum_{l'} (A_l - \bar{A})(A_{l'} - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)(R_l^0 - R_{l'}^0)}}.$$

Недиагональные члены с $l \neq l'$ дают при усреднении нуль. Среднее значение диагонального члена равняется:

$$\overline{(A_l - \bar{A})^2} = \bar{A}_l^2 - 2\bar{A}_l \bar{A} + \bar{A}^2 = \bar{A}^2 - \bar{A}^2.$$

Воспользовавшись этой формулой, представим окончательно среднее значение (26.20) в виде

$$\overline{\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2} = N (\bar{A}^2 - \bar{A}^2) + \bar{A}^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2. \quad (26.21)$$

Во втором слагаемом мы произведём сначала суммирование по всем ядрам, входящим в состав одной

элементарной ячейки, а затем результат просуммируем по всем ячейкам. Мы получим таким образом:

$$\left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 = \left| \sum_\nu e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_\nu^0} \right|^2 \left| \sum_j e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_j^0} \right|^2, \quad (26.22)$$

где R_j — радиус-вектор некоторой определённой точки внутри элементарной ячейки, R_ν^0 — радиус-вектор ν -го ядра по отношению к этой точке; суммирование по ν распространяется на все ядра, входящие в состав одной элементарной ячейки, а суммирование по j означает суммирование по всем элементарным ячейкам.

Вторая сумма, входящая в (26.22), при большом (бесконечном) числе элементарных ячеек может быть представлена в виде

$$\left| \sum_j e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_j^0} \right|^2 = \frac{(2\pi)^3 N'}{\Delta} \delta \left(\frac{p'-p}{\hbar} - 2\pi\tau \right), \quad (26.23)$$

где Δ — объём элементарной ячейки, τ — вектор обратной решётки (*), N' — число элементарных ячеек.

Сложив $dW_{\uparrow\uparrow}$ и $dW_{\downarrow\downarrow}$ и воспользовавшись формулами (26.21), (26.22), (26.23), получим следующее выражение

*) Вектор обратной решётки определяется через базисные векторы обратной решётки b_1, b_2, b_3 следующим образом:

$$\tau = p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3,$$

где p_1, p_2, p_3 — целые числа.

Базисные векторы обратной решётки связаны с базисными векторами (основными периодами) прямой решётки a_1, a_2, a_3 соотношениями

$$b_1 = \frac{[a_2 a_3]}{a_1 [a_2 a_3]}, \quad b_2 = \frac{[a_3 a_1]}{a_2 [a_3 a_1]}, \quad b_3 = \frac{[a_1 a_2]}{a_3 [a_1 a_2]}.$$

Каждому вектору обратной решётки соответствует семейство параллельных кристаллических плоскостей, уравнения которых имеют вид

$$\tau r = m,$$

где $r = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$, n_1, n_2, n_3 и m — целые числа. Расстояние между соседними плоскостями равно $1/\tau$ (при этом предполагается, что p_1, p_2, p_3 — числа взаимно простые).

для вероятности упругого рассеяния:

$$dw_s = \frac{m\nu}{4\pi^2 \hbar^4} \left\{ \rho \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{B^2 j(j+1)}{4} \right) + \bar{A}^2 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \rho' \delta \left(\frac{p'-p}{\hbar} - 2\pi\tau \right) S(p-p') \right\} \cdot e^{-2W} d\sigma', \quad (26.24)$$

где ρ — число ядер в единице объёма, ρ' — число элементарных ячеек в единице объёма и

$$S(p-p') = \left| \sum_\nu e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_\nu^0} \right|^2$$

— так называемый структурный фактор.

Разделив dw_s на ν/Ω , найдём дифференциальное сечение упругого рассеяния. Отнесённое к одному ядру и единице телесного угла, оно имеет следующий вид:

$$\sigma'_s = \left\{ \frac{2\pi^2 \sigma_0}{\Delta} \frac{\rho'}{\rho} S_\tau \delta \left(\frac{p'-p}{\hbar} - 2\pi\tau \right) + \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right) \right\} \cdot e^{-2W}, \quad (26.25)$$

где $\sigma_0 = \frac{\bar{A}^2 m^2}{\pi \hbar^4}$, и S_τ — значение S при $p-p' = 2\pi\hbar\tau$:

$$S_\tau = \left| \sum_\nu e^{2\pi i \tau R_\nu^0} \right|^2.$$

Вектор R_ν^0 можно представить в виде

$$R_\nu^0 = a_1 u_1^\nu + a_2 u_2^\nu + a_3 u_3^\nu.$$

Так как векторы a_i перпендикулярны к векторам b_j (при $i \neq j$), то S_τ можно записать ещё в следующем виде:

$$S_\tau = \left| \sum_\nu e^{2\pi i (p_1 u_1^\nu + p_2 u_2^\nu + p_3 u_3^\nu)} \right|^2,$$

где p_1, p_2, p_3 — целые числа, определяющие вектор τ :

$$\tau = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3.$$

Как известно, аналогичной формулой определяется рассеяние рентгеновских лучей в кристаллах.

Первое слагаемое в (26.25) даёт резкие максимумы интенсивности рассеянных лучей, определяемые формулой Брэгга

$$p' - p = 2\pi h\tau.$$

Это слагаемое описывает когерентное рассеяние нейтронов. Второе слагаемое описывает некогерентное рассеяние нейтронов. Если не считать множителя e^{-2W} , то оно не зависит от угла рассеяния и аналогично фону, наблюдаемому при рассеянии рентгеновских лучей.

Обратим внимание на то обстоятельство, что когерентное рассеяние определяется средним значением величины A (по различным изотопам). Некогерентное рассеяние определяется суммой квадрата флуктуации A , т. е. $(A - \bar{A})^2$, и величины $\frac{1}{4} B^2 j(j+1)$.

Мы видим, что когерентное рассеяние обуславливается столкновениями без изменения направления спина нейтрона, а некогерентное — столкновениями с изменением направления спина нейтрона. Это совершенно ясно, так как в интерференционных явлениях должны участвовать все ядра, что и имеет место при рассеянии без изменения направления спина нейтрона. Если же направление спина изменяется, то это происходит благодаря столкновению нейтрона с каким-либо определённым ядром.

Величину σ_0 можно назвать сечением когерентного рассеяния связанным ядром. Пользуясь формулами (26.6') и (26.5''), можно выразить σ_0 через длины рассеяния, отвечающие параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и связанного ядра. Обозначая эти длины рассеяния через a'_+ и a'_- , получим [105]:

$$\sigma_0 = \sigma_{\text{кор}} = 4\pi \left\{ \frac{(j+1)a'_+ + ja'_-}{2j+1} \right\}^2, \quad (26.25')$$

где длина рассеяния связанным ядром a' связана с длиной рассеяния свободным ядром a , входящей в (26.5''), соотношением

$$a' = \frac{M+m}{M} a.$$

Сечение некогерентного рассеяния связанным ядром, обусловленное изменением направления спина нейтрона, можно представить, согласно (26.6'), в следующем виде [105]:

$$\sigma_{\text{неког.}} = \frac{4\pi j(j+1)}{(2j+1)^2} (a'_+ - a'_-)^2 \quad (26.25'')$$

(в формулах (26.25') и (26.25'') не выписан тепловой множитель e^{-2W}).

Экспериментально можно отдельно определить когерентное и некогерентное рассеяние (когерентное рассеяние отсутствует, если длина волны нейтронов больше чем $2d$, где d — наибольшее значение межплоскостного расстояния в кристалле). Таким путём возможно определять экспериментально отношение a_+/a_- [105], характеризующее зависимость рассеяния нейтронов от спина частиц.

Заметим, что для кристаллов конечных размеров сечение рассеяния при точном выполнении условий Брэгга не обращается в бесконечность, так как величина $\left| \sum_1^{N'} e^{i(p'-p)R_l^0} \right|^2$ сохраняет конечное значение и становится равной $N'^2 S^2$ (N' — число ячеек).

С этим связано то обстоятельство, что для кристаллов конечных размеров брэгговская линия имеет не бесконечно малую, а конечную угловую ширину, а именно охватывает интервал телесных углов, по порядку величины равный $(\lambda/l)^2$, где λ — длина волны, l — линейные размеры кристалла.

Если размеры кристалла достаточно малы, то такой кристалл мало рассеивает падающие на него нейтроны.

Определим по порядку величины максимальные размеры кристалла, который рассеивает ещё малую часть нейтронной волны, падающей на него под брэгговским углом.

Интенсивность рассеянной волны при выполнении условий Брэгга пропорциональна произведению σ_0 на квадрат числа атомов в кристалле, т. е. пропорциональна $\sigma_0 (N_0 l^3)^2$ (N_0 — число атомов в единице объёма, l — линейные размеры кристалла). Выше мы говорили, что

эффективная величина телесного угла, в котором происходит рассеяние, равна $(\lambda/l)^2$. Умножив $\sigma_0 N_0^2 l^2$ на $(\lambda/l)^2$ и разделив результат на площадь поперечного сечения кристалла, равную l^2 , мы найдём отношение интенсивностей рассеянной и падающей волн. Обозначая эту величину через β , получим^{[104],[107]}:

$$\beta \approx \sigma_0 N_0^2 \lambda^2 l^2 = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2,$$

где

$$l_0 = \sigma_0^{-1/2} (N_0 \lambda)^{-1}.$$

Если $l \ll l_0$, то кристалл является «тонким», т. е. отражает малую долю падающей на него волны.

В случае тепловых нейтронов мы получим $l_0 \approx 10^{-3}$ см, считая $N_0 \approx 5 \cdot 10^{22}$, $\sigma_0 \approx 10^{-24}$ см².

Формула (26.25) относится к монокристаллу.

Для того чтобы получить сечение упругого рассеяния нейтронов в поликристаллах, нужно усреднить в выражении (26.25) первое слагаемое, содержащее δ -функцию, по направлениям τ (при заданной величине абсолютного значения τ). При этом δ -функция от $\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\tau$ заменится δ -функцией от $\frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|}{\hbar} - 2\pi\tau$, и мы получим следующее выражение для усреднённого сечения, отнесённого к одному ядру и единице телесного угла:

$$\bar{\sigma}'_s = \left\{ \frac{\sigma_0}{8\pi\Delta\tau^2} \frac{\rho'}{\rho} \bar{S}_\tau \delta \left(\frac{2\rho}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} - 2\pi\tau \right) + \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \right\} e^{-2W}, \quad (26.26)$$

где \bar{S}_τ — среднее значение S_τ при заданной величине τ и θ — угол между векторами \mathbf{p}' и \mathbf{p} . (Коэффициент при δ -функции находится из того условия, что интеграл от первого слагаемого в (26.26) по $4\pi\tau^2 d\tau$ равен интегралу от первого слагаемого в (26.25) по $d\tau_x d\tau_y d\tau_z$.)

Аналогичной формулой определяется, как известно, рассеяние рентгеновских лучей в поликристаллах.

Определим интегральное сечение упругого рассеяния. Для этого необходимо проинтегрировать выраже-

ние (26.26) по углам рассеяния (т. е. по $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$) и первое слагаемое просуммировать по всем возможным векторам обратной решётки, абсолютное значение которых не превосходит k/π . В результате мы получим следующее выражение для интегрального сечения рассеяния:

$$\sigma_s = \frac{\pi\sigma_0}{2\Delta k^2} \frac{\rho'}{\rho} \sum_{\tau}^{\tau < \frac{k}{\pi}} \frac{S_\tau}{\tau} e^{-2W_\tau} + \frac{m^2}{2\pi\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \int_0^\pi e^{-2W} \sin \theta d\theta, \quad (26.27)$$

где k — волновой вектор нейтрона, равный p/\hbar , а W_τ — значение W при $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = 2\pi\hbar\tau$:

$$W_\tau = 6\pi^2 \frac{\hbar^2 \tau^2}{M\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left(\frac{\theta}{T} \right) \right].$$

Суммирование производится по всем возможным векторам обратной решётки, абсолютное значение которых не превосходит k/π .

Если пользоваться формулой (26.17) для W , то интеграл, входящий в (26.27), может быть легко вычислен. Он равен:

$$\int_0^\pi e^{-2W} \sin \theta d\theta = \int_0^\pi e^{-\frac{\alpha}{2}(1-\cos \theta)} \sin \theta d\theta = 2 \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad (26.28)$$

где

$$\alpha = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left(\frac{\theta}{T} \right) \right]$$

(m — масса нейтрона, E — его энергия).

Интегральное сечение (26.27) принимает при этом вид

$$\sigma_s = \frac{\pi\sigma_0}{2\Delta} \frac{\rho'}{\rho} \frac{1}{k^2} \sum_{\tau}^{\tau < \frac{k}{\pi}} \frac{S_\tau}{\tau} e^{-2W_\tau} + \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}. \quad (26.29)$$

Проанализируем это выражение. Здесь первое слагаемое описывает интерференционное рассеяние. Оно, очевидно, исчезает, если волновой вектор нейтрона k меньше $\pi\tau_{\min}$, где τ_{\min} — наименьшее значение длины вектора обратной решётки (в простой кубической решётке $\tau_{\min} = 1/a$, a — постоянная прямой решётки *).

Таким образом при $k < \pi\tau_{\min}$ в формуле (26.29) остаётся только второе слагаемое, описывающее некогерентное рассеяние нейтронов. Когерентное рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$, невозможно. Рассеяние таких длинноволновых нейтронов обусловлено, следовательно, только наличием изотопов и существованием механических моментов ядер.

Длина свободного пробега нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$ (по отношению к рассеянию), равняется:

$$l_S = \frac{\pi\hbar^4}{m^2\rho \left[\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right]} \cdot \frac{a}{1 - e^{-a}}. \quad (26.30)$$

С ростом энергии, благодаря уменьшению теплового фактора e^{-a} , l_S возрастает. Это имеет место также при увеличении температуры, так как с ростом последней тепловой фактор уменьшается (при низких температурах, когда $T \ll \theta$, $\frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \approx \left(\frac{T}{\theta}\right)^2$, при высоких температурах, когда $T \gg \theta$, $\frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \approx \frac{T}{\theta}$).

Если ядра решётки не имеют изотопов и не обладают механическими моментами, то упругое рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$, становится невозможным.

*) В случае гексагональной решётки, к которой относится графит, базисные векторы обратной решётки определяются следующим образом. Если основные периоды решётки суть a_1, a_2, a_3 , причём $a_1 = a_2 = a$, $\angle a_1 a_2 = 60^\circ$, $a_3 \perp a_1, a_2$, то базисные векторы обратной решётки, которая также является гексагональной, равны $b_1 = b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}a}$, $b_3 = \frac{1}{a_3}$, причём $\angle b_1, b_2 = 60^\circ$, $b_3 \perp b_1, b_2$.

Для графита $a = 2,46 \text{ \AA}$, $a_3 = 6,80 \text{ \AA}$ [114].

Ниже будет показано, что неупругое рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$, в этих условиях также невозможно.

Отсюда следует, что если на кристалл с тождественными ядрами падает пучок тепловых нейтронов, то в направлении первоначального пучка после выхода из кристалла будут двигаться только такие нейтроны, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$. Таким образом можно отфильтровывать очень медленные или, как их называют, «холодные» нейтроны.

В качестве примера решётки, ядра которой не имеют изотопов и не обладают моментами, можно указать на графит.

Используя графит в качестве фильтра для очень медленных нейтронов, удалось получить нейтроны с энергией около 18°K [108].

Заметим, что жидкий гелий II должен обладать аналогичными свойствами в смысле выделения очень медленных нейтронов. Расчёты показывают, что для нейтронов с энергией, меньшей $\sim 4^\circ \text{K}$, гелий II является «прозрачным» [109].

Выясним теперь, как ведёт себя сечение упругого рассеяния при возрастании энергии. При $k = \pi\tau_{\min}$ сечение скачком возрастает на величину $\frac{\sigma_0}{2\Delta\pi^2} \frac{\rho'}{\rho} Se^{-2W\tau_{\min}}$.

При дальнейшем возрастании энергии вплоть до значения $k = \pi\tau_2$ (τ_2 — второе в порядке возрастания значение τ) сечение, обусловленное интерференционным членом, монотонно убывает обратно пропорционально энергии нейтрона. При $k = \pi\tau_2$ сечение снова скачком возрастает (в (26.29) теперь входят два члена) и затем вплоть до $k = \pi\tau_3$ (τ_3 — третье в порядке возрастания значение τ) убывает обратно пропорционально энергии нейтрона *).

*) «Скачкообразная» структура сечения рассеяния в соответствии с формулой (26.29) наблюдалась экспериментально при изучении рассеяния нейтронов с энергией в интервале от 0,001 eV до 1 eV в поликристаллах Be и BeO [107].

скачки в сечении уменьшаются, и сечение стремится к некоторому пределу, который легко определить.

Действительно, при достаточно больших ka (a — постоянная решётки) сумма, входящая в (26.29); содержит много слагаемых, и поэтому суммирование может быть заменено интегрированием по τ , точнее говоря, по $4\pi\Delta\tau^2 d\tau$ в пределах от $\tau=0$ до $\tau=\frac{k}{\pi}$. Замечая ещё, что в этих условиях структурный фактор даёт просто число ядер в ячейке, мы получим следующее выражение для суммы, входящей в (26.29):

$$\frac{\pi\sigma_0}{2\Delta k^2} \frac{\rho'}{\rho} S \sum_{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-kW\tau} = \sigma_0 \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad (26.31)$$

причём мы воспользовались для W выражением (26.17).

Складывая (26.31) со вторым слагаемым в (26.29), получим предельное значение сечения в виде

$$\sigma_{\infty} = \frac{m^2}{\pi\hbar^3} \left(A^2 + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right) \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad ka \gg 1. \quad (26.32)$$

Сравнивая это выражение с выражением (26.5) для сечения рассеяния изолированным ядром, мы видим, что даже при $\alpha=0$, т. е. без учёта теплового фактора, (26.32) отличается от (26.5) множителем $\left(\frac{M}{m+M}\right)^2$.

Наличие этого множителя связано с тем, что мы здесь рассматриваем только чисто упругое рассеяние. Общий вопрос о переходе от рассеяния связанными ядрами к рассеянию свободными ядрами рассматривается в § 28.

§ 27. Неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах. Перейдём теперь к рассмотрению неупругого рассеяния медленных нейтронов в кристаллах.

Мы рассмотрим наиболее вероятные при малых энергиях нейтрона процессы — испускание и поглощение одного дебаевского фонона (ср. конец этого параграфа).

Определим сначала вероятность испускания фонона с импульсом f и частотой $\omega_s \equiv \omega_{fs}$.

Матричный элемент энергии возмущения нейтрона (26.6), отвечающий эмиссии фонона s , можно представить в виде

$$M_{\substack{p, \mu; n_1, n_2, \dots, n_s, \dots, m_1, m_2, \dots \\ p', \mu'; n_1, n_2, \dots, n_s+1, m_1', m_2', \dots}} = \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \times \\ \times (\nu, m_l | A_l I + B_l (K_l S) | \mu', m_l') (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s+1) \times \\ \times \prod_r' (n_r | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{lr}} | n_r), \quad (27.1)$$

где штрих над произведением означает, что в нём отсутствует член с $r=s$. Так как каждый множитель бесконечно мало отличается от единицы ($N \rightarrow \infty$), то \prod_r' не отличается от произведения \prod_r , входящего в матричный элемент для упругого рассеяния. Поэтому мы можем заменить \prod_r' на e^{-W} , где W попрежнему

выражается формулой (26.16). Иными словами, тепловой фактор для рассеяния с учётом однофононных процессов не отличается от теплового фактора для упругого рассеяния.

Для вычисления матричного элемента

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s+1)$$

мы разложим $e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}}$ в ряд, сохранив в нём первые два члена*). Пользуясь выражением (25.2) для матричных элементов амплитуд колебания ξ_s и ξ_s^* , получим:

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s+1) = \\ = \frac{i}{\hbar} e_s(p'-p) \sqrt{\frac{(n_s+1)\hbar}{2MN\omega_s}} e^{\frac{i}{\hbar}fR_s^0}. \quad (27.2)$$

*) При рассмотрении двухфононных процессов в разложении $e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}}$ нужно сохранить первые три члена.

Заметим, что, заменив здесь $n_s + 1$ на n_s и f на $-f$, мы получим матричный элемент, отвечающий поглощению фонона s .

Подставляя (27.2) в (27.1), получим:

$$M_{p' \dots n_s \dots}^{p \dots n_{s+1} \dots} = \\ = \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p + f) R_l^0} R_l^0 (\mu, m_l | A_l I + B_l (K_l S) | \mu', m_l') \times \\ \times \frac{i}{\hbar} e_s (p' - p) \sqrt{\frac{(n_s + 1) \hbar}{2MN\omega_s}} e^{-W}. \quad (27.3)$$

Чтобы найти дифференциальное сечение рассеяния нейтрона в телесном угле do' , которое сопровождается излучением в телесном угле do_f фонона с импульсом, лежащим в интервале $(f, f + df)$, нужно квадрат матричного элемента (27.3) умножить на

$$\frac{mp'}{4\pi^2 \hbar^4 v} do' \frac{j^2 d/dof}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Далее необходимо, так же как и при вычислении сечения упругого рассеяния, усреднить полученное выражение по магнитным квантовым числам и возможным распределениям изотопов в решётке. Так как выражение (27.3) аналогично выражению для матричного элемента, определяющего упругое рассеяние, то при усреднении можно пользоваться полученными ранее результатами.

Дифференциальное сечение рассеяния с испусканием фонона, отнесённое к одному ядру, равняется:

$$d\sigma_s = \left\{ \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \left(\frac{p'}{p} \right)^2 S \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M\hbar\omega_s} (n_s + 1) e^{-2W} \times \right. \\ \times \delta \left(\frac{p' - p + f}{\hbar} - 2\pi\tau \right) + \\ \left. + \frac{p'}{p} \frac{m^2}{8\pi^2 \hbar^4 \rho} \left[\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \bar{B}^2 j(j+1) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M\hbar\omega_s} (n_s + 1) e^{-2W} \right\} \cdot \frac{j^2 d/dof}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (27.4)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\bar{A}^2 m^2}{\pi \hbar^4}.$$

При этом величина импульса нейтрона после столкновения определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - \hbar\omega_s. \quad (27.5)$$

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором поглощается фонон с импульсом f , может быть получено из формулы (27.4), если заменить в последней $n_s + 1$ на n_s и f на $-f$.

Это сечение имеет следующий вид:

$$d\sigma_{\pm} = \left\{ \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \left(\frac{p'}{p} \right)^2 S \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M\hbar\omega_s} n_s e^{-2W} \times \right. \\ \times \delta \left(\frac{p' - p - f}{\hbar} - 2\pi\tau \right) + \frac{m^2}{8\pi^2 \hbar^4 \rho} (\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \bar{B}^2 j(j+1)) \times \\ \left. \times \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M\hbar\omega_s} n_s e^{-2W} \right\} \frac{j^2 d/dof}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (27.6)$$

Первое слагаемое в (27.4) и (27.6) даёт резкие максимумы интенсивности рассеянных нейтронов, определяемые соответственно условиями

$$p' - p + f = 2\pi\hbar\tau, \quad (27.7)$$

$$p' - p - f = 2\pi\hbar\tau. \quad (27.7')$$

Рассмотрим подробнее эти интерференционные условия.

Предполагая, что дисперсию фононов можно не учитывать, перепишем условие (27.7) и закон сохранения энергии (27.5) в виде

$$\frac{p^2 - p'^2}{2m} - sf = 0, \quad p' - p + f = 2\pi\hbar\tau, \quad (27.8)$$

где s — скорость звука.

Из (27.8) следует, что

$$\frac{1}{2} (v + v') (f - 2\pi\hbar\tau) = sf, \quad (27.8')$$

где v и v' — скорости нейтрона до и после рассеяния. Это соотношение показывает, что если считать $\tau = 0$,

то при $v < s$ условия (27.8) не могут одновременно выполняться.

Иными словами, при точном выполнении закона сохранения импульса испускание фононов нейтронами, скорость которых меньше скорости звука, невозможно в решётке с тождественными ядрами. Оно становится, однако, возможным, если $\tau \neq 0$. В этом заключается роль процессов «переброса», при которых не соблюдается точно закон сохранения импульса.

Заметим, что поглощение фонона при $v < s$ возможно, но при этом должно выполняться условие $f \geq 2m(s-v)$, которое часто противоречит тому, что f не должно превосходить некоторого ма-

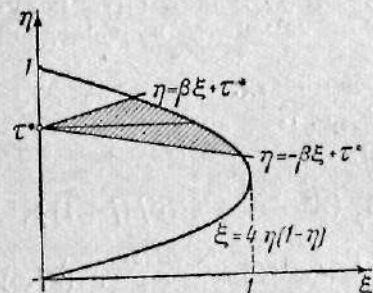


Рис. 12.

ксимального значения, определяемого из условия $sf_0 = kb\theta$ (θ — температура Дебая).

Условия (27.8) допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Если ввести переменную $x = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$, то из (27.8) следуют неравенства

$$\left. \begin{aligned} x + f &\geq 2\pi\hbar\tau, & |x - f| &\leq 2\pi\hbar\tau, \\ x &\leq p + \sqrt{p^2 - 2msf}, & x &\geq p - \sqrt{p^2 - 2msf}. \end{aligned} \right\} (27.9)$$

Этими неравенствами определяется некоторая область допустимых значений x и f , которая изображена на рис. 12 в виде заштрихованной площади.

В качестве переменных на рис. 12 приняты:

$$\xi = \frac{sf}{p^2/2m}, \quad \eta = \frac{x}{2p}, \quad \tau^* = \frac{\pi\hbar\tau}{p}$$

$$\left(\beta = \frac{1}{4} \frac{v}{s} \right).$$

Если при заданном импульсе нейтрона (т. е. при заданной величине β) увеличивать τ^* , то заштрихованная площадь будет уменьшаться и при некотором значении τ^* вовсе исчезнет. Это максимально допустимое значение τ^* определяется, очевидно, из того условия, что прямая, угловой коэффициент которой равен $-\beta$, будет касаться параболы $\xi = 4(\eta - \eta^2)$. Точка пересечения касательной с осью η и даёт максимально возможное τ^* как функцию β .

Легко убедиться в том, что если $\beta \leq \frac{1}{4}$, т. е. если $v \leq s$, то максимально возможное значение τ^* равняется единице; иными словами, если $v < s$, то при неупругом рассеянии, сопровождающемся испусканием фонона, возможные значения τ , так же как и при упругом рассеянии, не превосходят \hbar/π .

Если $v > s$, то максимально возможное значение τ^* равняется:

$$\tau_{\max}^*(v) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{v}{s}\right) \left(1 + \frac{s}{v}\right), \quad v > s. \quad (27.10)$$

Пусть $v < s$; если при этом импульс нейтрона меньше $\pi\hbar\tau_{\min}$, то неупругое интерференционное рассеяние с испусканием фонона становится невозможным*). В этих условиях неупругое рассеяние является некогерентным и обуславливается только наличием изотопов и механических моментов ядер и определяется вторым слагаемым формулы (27.4). В случае тождественных ядер, не имеющих спина, рассматриваемое рассеяние отсутствует.

Рассмотрим прежде всего рассеяние, описываемое вторым слагаемым формулы (27.4). Определим дифференциальное сечение рассеяния, при котором энергия нейтрона попадает в интервал dE' .

Интегрируя второе слагаемое (27.4) по направлениям импульса испущенного фонона и суммируя по

*) Это рассеяние можно назвать также неупругим когерентным рассеянием.

состояниям его поляризации, получим:

$$d\sigma_+ = \frac{m^2}{16\pi^4\hbar^7v} \frac{p'}{p} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \times \\ \times \frac{(p' - p)^2}{Ms^2} \hbar\omega \cdot d(\hbar\omega) d\omega' \left(1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) e^{-2W}, \quad (27.11)$$

где $d\omega'$ — элемент телесного угла, в котором находится импульс рассеянного нейтрона p' , $\hbar\omega = \frac{p^2 - p'^2}{2m}$.

При выводе формулы (27.11) мы не учитывали дисперсии фононов и пренебрегли анизотропией скорости распространения колебаний. Если различать скорости продольных и поперечных колебаний, которые мы обозначим соответственно через s_l и s_t , то в полученных выше формулах величину s^{-2} следует заменить на $\frac{1}{3}(s_l^2 + 2s_t^2)$.

Проинтегрируем (27.11) по углам $d\omega'$. Не учитывая теплового фактора, мы получим следующее выражение для отнесённого к одному ядру дифференциального сечения рассеяния нейтрона с потерей энергии между $E - E'$ и $E - E' - dE'$:

$$d\sigma_+ = \frac{m^2}{2\pi^3\hbar^4} \left[\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{2m}{M}} \sqrt{\frac{E'}{Ms^2} \frac{E^2 - E'^2}{\hbar^3 s^2 v p}} (n_\omega + 1) dE' \quad (27.12)$$

(n_ω — планковская функция).

Умножив $d\sigma_+$ на $v p$, найдём вероятность того, что энергия нейтрона в результате рассеяния в кристалле попадёт в интервал $E', E' - dE'$.

Выражение (27.12) показывает, что вероятность неупругого рассеяния растёт с увеличением потерянной энергии, так что главную роль при неупругом рассеянии играют переходы с большой потерей энергии, порядка начальной энергии нейтрона.

Заменив в формуле (27.12) $n_\omega + 1$ на n_ω и $E^2 - E'^2$ на $E'^2 - E^2$, получим выражение для сечения поглоще-

ния фонона, энергия которого заключена в интервале $(E' - E, E' - E + dE')$. Обозначая это сечение через $d\sigma_-$, получим:

$$d\sigma_- = \frac{m^2}{2\pi^3\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \times \\ \times \sqrt{\frac{2m}{M}} \sqrt{\frac{E'}{Ms^2} \frac{E'^2 - E^2}{\hbar^3 s^2 v p}} n_\omega dE'. \quad (27.13)$$

В случае достаточно низких температур ($T \ll \theta$, θ — температура Дебая) в выражении для $d\sigma_+$ можно пренебречь n_ω , так как при $T \ll \theta$

$$n_\omega = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \ll 1.$$

Интегральное сечение неупругого рассеяния нейтрона с испусканием одного фонона в области малых энергий нейтрона, когда $E < \theta$ (см. конец этого параграфа), при достаточно низких температурах ($T \ll \theta$) определяется следующей формулой:

$$\sigma_+ = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta} \right)^3 \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right). \quad (27.14)$$

Температура Дебая определяется здесь следующим образом: $\theta = (6\pi^2)^{1/3} \hbar s \rho^{1/3}$.

Мы видим, что при $E < \theta$ вероятность неупругого рассеяния быстро растёт с возрастанием энергии нейтрона.

Подчеркнём ещё раз, что формула (27.14) относится к случаю очень малых энергий нейтрона, когда $v < s$ и $v < \frac{\pi\hbar\tau_{\min}}{m}$. Напомним, что в этом случае сечение упругого рассеяния равняется [см. (26.25)]:

$$\sigma_s = \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right).$$

Отношение обоих сечений равно:

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_s} = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta} \right)^3. \quad (27.15)$$

Оно значительно меньше единицы.

Выясним теперь, как ведёт себя сечение неупругого рассеяния при увеличении энергии нейтрона.

Ясно, что, начиная с некоторого значения энергии нейтрона, в общем выражении (27.4), определяющем $d\sigma_+$, начинает играть роль первое слагаемое, описывающее неупругое когерентное рассеяние. Оно даёт резкие максимумы при выполнении интерференционных условий $\rho' - \rho + f = 2\pi h\tau$. Это рассеяние отсутствует, если $v < s$ и $v < \frac{\pi\hbar\tau_{\min}}{m}$.

Если $\pi\hbar\tau_{\min} < ms$, то интерференционное рассеяние начинается при скорости нейтрона, равной $v_0 = \frac{\pi\hbar\tau_{\min}}{m}$, причём вначале возможно лишь одно значение τ , равное τ_{\min} . При увеличении скорости v от v_0 до s постепенно включаются другие значения τ .

Если решётка такова, что $ms < \pi\hbar\tau_{\min}$, то интерференционное рассеяние начинается при скорости нейтрона, равной скорости звука. В этом случае вначале возможно только значение $\tau = 0$, отвечающее точному выполнению закона сохранения импульса в решётке. Процессы переброса становятся возможными при скоростях нейтрона $v > s$. Значение v , при котором допускается значение τ_{\min} , определяется из уравнения

$$\tau_{\max}(v) = \tau_{\min}, \quad (27.16)$$

где $\tau_{\max}(v)$ определяется формулой (27.10).

Для получения полного сечения неупругого рассеяния с испусканием одного фонона нужно проинтегрировать (27.4) по $df d\omega' d\omega$, и просуммировать первое слагаемое по всем допустимым значениям вектора обратной решётки τ .

Чтобы не усложнять формул, приведём результат для случая простой решётки ($\rho' = \rho$, $S = 1$):

$$\sigma_+ = \frac{1}{4} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{v}{s}\right)^2 \sum_{\tau^* \leq \tau_{\max}(v)} \frac{1}{\tau^*} \int (n_\omega + 1) e^{-2W} \eta^2 d\eta d\omega + 4 \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left(\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} B^2 j(j+1)\right) \frac{m^2}{\pi\hbar^4}. \quad (27.17)$$

Если $v < 4s$, то при интегрировании по η можно заменить подынтегральную функцию в первом слагаемом её значением при $\eta = \tau^*$ и считать интервал изменения η равным $2\tau^*$. В этом случае формула (27.17) приобретает вид

$$\sigma_+ = \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{v}{ms}\right)^2 \sum_{\tau^* \leq 1} \left[\tau^{*2} (1 - \tau^*)^2 + \frac{1}{8} \tau^{*2} \left(\frac{T}{E}\right)^2 \int_0^{i\tau^*(1-\tau^*)\frac{E}{T}} \frac{z dz}{e^z - 1} \right] e^{-2W_\tau} + \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left[\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right] \frac{m^2}{\pi\hbar^4}, \quad (27.18)$$

где

$$W_\tau = 12 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \tau^{*2} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right\}.$$

Если длина волны нейтрона значительно меньше постоянной решётки a , т. е. если выполняется условие $ak \gg 1$, то сумма, входящая в (27.18), содержит большое число слагаемых. В этом случае суммирование может быть заменено интегрированием по $\frac{4\pi a^3 p^3}{(\pi\hbar)^3} \tau^{*2} d\tau^*$. (Отметим, что этот случай имеет место для тепловых нейтронов при комнатных температурах.)

Пренебрегая тепловым фактором, мы получим в результате:

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_s} = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3, \quad (27.19)$$

где σ_s — сечение упругого рассеяния нейтронов при условии $ak \gg 1$, определяемое по формуле

$$\sigma_s = \sigma_0 + \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left[\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right] = \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left(\overline{A^2} + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right). \quad (27.19')$$

Сравнивая выражения (27.19) и (27.15), мы видим, что отношение сечений неупругого и упругого рассеяния при достаточно больших значениях k ($ka \gg 1$) имеет такой же вид, как и при рассеянии очень медленных нейтронов ($k < \pi \tau_{\min}$) в решётке с отличающимися ядрами (отличие вызывается только наличием изотопов и механических моментов ядер) [103].

При выполнении условия $ka \gg 1$ рассеяние нейтронов в решётках с тождественными и отличающимися (в указанном смысле) ядрами происходит одинаково. Это обстоятельство легко понять, если заметить, что при достаточно больших k играет роль большое число возможных значений τ , в силу чего суммирование по τ может быть заменено интегрированием. Благодаря этому исчезают δ -функции от импульсов.

Таким образом при $ka \gg 1$ учёт всех возможных процессов переброса приводит к полному устранению интерференционных условий, заменяющих закон сохранения импульса в решётке. Так как в решётке с нетождественными ядрами также не выполняется закон сохранения импульса, то отсюда следует, что различие между обоими видами решёток при $ka \gg 1$ не может иметь места.

Если выполняется условие $ka \gg 1$, то сечение неупругого рассеяния, сопровождающегося излучением одного фонона, может быть представлено при $E < \theta$ в виде [103]

$$\sigma_+ = 24 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \int_0^1 \xi \left(1 + \frac{1}{e^{E\xi/T} - 1}\right) d\xi \times \\ \times \int_{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\xi})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\xi})} \eta^3 e^{-W\eta^2} d\eta, \quad (27.20)$$

где

$$W = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left(\frac{\theta}{T}\right) \right],$$

а σ_s определяется формулой (27.19'). Не учитывая тепловой фактор, получим:

$$\sigma_+ = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \int_0^1 (2-z) \sqrt{1-z} \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{Ez}{T}} - 1}\right) z dz. \quad (27.21)$$

Из (27.21) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_+ &\approx \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left\{ \frac{8}{7} + \pi^2 \left(\frac{T}{E}\right)^2 \right\} \\ &\quad \text{при } T \ll E \ll \theta, \\ \sigma_+ &\approx \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left\{ \frac{8}{7} + \frac{16}{5} \frac{T}{E} \right\} \\ &\quad \text{при } T \gg E, E \ll \theta. \end{aligned} \right\} \quad (27.22)$$

Сечение неупругого рассеяния нейтронов с поглощением одного фонона при выполнении условия $ka \gg 1$ имеет вид (мы пренебрегаем тепловым фактором)

$$\sigma_- = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \frac{E}{\theta} \left(\frac{T}{\theta}\right)^2 \times \\ \times \int_0^{0/T} \frac{\left(2 + \frac{T}{E} z\right) \sqrt{1 + \frac{T}{E} z} z dz}{e^z - 1}. \quad (27.23)$$

Если $\theta \gg E \gg T$, то

$$\sigma_- = \pi^2 \frac{m}{M} \sigma_s \frac{E}{\theta} \left(\frac{T}{\theta}\right)^2, \quad (27.24)$$

Если $E \ll T \ll \theta$, то

$$\sigma_- = 3\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \frac{m}{M} \sigma_s \sqrt{\frac{T}{E}} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3, \quad (27.25)$$

где Γ — гамма-функция. Если $T \gg \theta \gg E$, то

$$\sigma_- = \frac{6}{5} \frac{m}{M} \sigma_s \frac{T}{\theta} \sqrt{\frac{\theta}{E}}. \quad (27.26)$$

Приведём ещё формулу для изменения энергии нейтрона на единице пути:

$$-\frac{dE}{dx} = N \sum_{\tau} \int \hbar\omega (d\sigma_+ - d\sigma_-), \quad (27.27)$$

где N — число ядер в единице объёма.

Предполагая выполненным условие $ak \gg 1$ (при этом суммирование по τ можно заменить интегрированием) и пренебрегая тепловым фактором, получим:

$$-\frac{dE}{dx} = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^4 \theta N \times \left\{ \int_0^1 (2-\xi) \sqrt{1-\xi} \left(\frac{1}{e^{\frac{E\xi}{T}} - 1}\right) \xi^2 d\xi - \int_0^{\theta/E} \frac{(2+\xi) \sqrt{1+\xi} d\xi}{e^{\frac{E\xi}{T}} - 1} \right\}. \quad (27.28)$$

Если $\theta \gg E \gg T$, то

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{64}{105} \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^4 \theta N; \quad (27.29)$$

если $E \ll \theta \ll T$, то

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{2}{7} \frac{m}{M} \sigma_s \sqrt{\frac{\theta}{E}} T N. \quad (27.30)$$

Однофононные процессы, которые мы до сих пор рассматривали, дают первый член в разложении сечения неупругого сечения в ряд по степеням энергии нейтрона. Учёт двухфононных процессов даёт сечение, пропорциональное $\left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(\frac{E}{\theta}\right)^6$.

В самом деле, вероятность двухфононных процессов отличается от вероятности однофононных процессов множителем

$$\frac{|(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}|^2 \hbar}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2MN\omega},$$

получаемым при разложении $e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}}$ в ряд по степеням u . Среднее значение этого множителя по порядку величины при $E < \theta$ и $T < \theta$ равно:

$$\frac{\rho^2}{M\hbar} \int_0^{E/\hbar} \frac{\omega d\omega}{s^3} \frac{\Omega}{N} \approx \frac{E^3 m \Omega}{MN s^3 \hbar^3} \approx \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3$$

(s — скорость звука).

Таким образом речь идёт о разложении в ряд по степеням $\frac{m}{M} (E/\theta)^3$.

Мы можем ограничиться рассмотрением однофононных процессов только в том случае, если выполняется условие

$$\frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \ll 1. \quad (27.31)$$

§ 28. Переход к рассеянию свободными ядрами.

Перейдём теперь к выводу общей формулы для эффективного сечения рассеяния нейтронов в кристаллах с учётом поглощения и испускания любого числа фононов.

Для определённости будем считать решётку состоящей из тождественных ядер. Пусть попрежнему \mathbf{p} и \mathbf{p}' — значения импульса нейтрона до и после рассеяния, n_1^0, n_2^0, \dots и n_1, n_2, \dots — совокупности чисел фононов в начальном и конечном состояниях решётки.

Интересующая нас вероятность перехода имеет, очевидно, следующий вид:

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{A}{\Omega}\right)^2 \times \left| \sum_{n_1 n_2 \dots} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_l^0} (n_1^0, n_2^0, \dots | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_l} | n_1, n_2, \dots) \right|^2 \times \times \delta \left(E' + \sum_s (n_s - n_s^0) \hbar \omega_s - E \right). \quad (28.1)$$

Входящий сюда матричный элемент можно представить в виде

$$(n_1^0, n_2^0, \dots | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_l} | n_1, n_2, \dots) = = \prod_s (n_s^0 | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s) \equiv \prod_s M_{n_s^0 n_s},$$

где

$$\mathbf{u}_{ls} = \mathbf{e}_s (\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{fR}_l^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{fR}_l^0}).$$

Вспоминая, что матричные элементы ξ_s и ξ_s^* содержат множителем $N^{-1/2}$, мы можем ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда n_s отличается от n_s^0 не больше чем на единицу. Вводя для краткости обозначение

$$q_s^2 = \frac{|(p' - p) e_s|^2}{2MN\hbar\omega_s},$$

имеем с точностью до N^{-1} [см. (25.4) и (25.5)]:

$$\begin{aligned} |M_{n_s^0, n_s^0}|^2 &= 1 - (2n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0+1}|^2 &= (n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0-1}|^2 &= n_s^0 q_s^2. \end{aligned}$$

Замечая, что δ -функция может быть представлена в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta x} d\eta$$

и переходя от вероятности w к дифференциальному сечению $d\sigma$, отнесённому к одному ядру, получим:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} d\omega' dE' \times \\ &\times \int \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 \prod_s [1 - (2n_s + 1) q_s^2] + \right. \\ &+ \sum_s \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p+f)R_l^0} \right|^2 (n_s + 1) q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} + \\ &+ \sum_s \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p-f)R_l^0} \right|^2 n_s q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s} + \\ &+ \sum_s \sum_{s'} \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p+f+f')R_l^0} \right|^2 \times \\ &\times (n_s + 1)(n_{s'} + 1) q_s^2 q_{s'}^2 e^{i\mu(\hbar\omega_s + \hbar\omega_{s'})} + \dots \left. \right\} \times \\ &\times e^{i\mu(E'-E)} d\mu, \quad (28.2) \end{aligned}$$

где $d\omega'$ — элемент телесного угла импульса p' , dE' — интервал энергии, в который попадает в результате рассеяния нейтрон. Ради простоты из многофононных процессов здесь выписан только один член, отвечающий возникновению двух фононов f и f' .

Входящие сюда \sum_l дают δ -функции от импульса;

однако, если энергия нейтрона достаточно велика, а нас интересует именно этот случай, то, как мы видели выше, эти δ -функции можно вовсе не учитывать. Поэтому, пренебрегая всеми степенями q_s^2 выше первой, получим:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{p'}{p} \frac{\sigma_0}{8\pi^2} d\omega' dE' \int e^{i\mu(E'-E)} \times \\ &\times \left\{ 1 - \sum_s [(2n_s + 1) q_s^2 - (n_s + 1) q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} - n_s q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s}] \right\} d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая малость q_s^2 , можно представить $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} d\omega' dE' \frac{p'}{p} \int e^{i\mu(E'-E) + g(\mu)} d\mu, \quad (28.3)$$

где

$$g(\mu) = \sum_s \left\{ (n_s + 1) e^{i\mu\hbar\omega_s} + n_s e^{-i\mu\hbar\omega_s} - 2n_s - 1 \right\} q_s^2. \quad (28.3')$$

Вместо n_s мы должны, очевидно, подставить сюда планковскую функцию.

Напомним, что эта же функция $g(\mu)$ входит также в выражение для вероятности захвата нейтрона в кристалле [см. формулу (25.14)].

Выполнить интегрирование в формуле (28.3) в общем виде не представляется возможным. Поэтому мы, так же как и в § 25, ограничимся рассмотрением двух предельных случаев: «слабой» и «сильной» связи, для которых не существенна область значений μ , лежащих вблизи $\mu_0 = 1/\theta$ (см. § 25).

В первом из этих случаев — в случае «слабой» связи (малые θ) оказываются существенными малые $|\mu|$, $|\mu\theta| \ll 1$.

В случае «сильной» связи (большие θ) существенной в интеграле (28.3), определяющем $d\sigma$, является область больших $|\mu|$, $|\mu\theta| \gg 1$ (ср. аналогичную ситуацию при рассмотрении захвата нейтронов в кристаллах).

Из формулы (25.14), определяющей $g(\mu)$ при малых $|\mu|$, легко заключить, что область малых $|\mu|$ будет существенной при выполнении условия

$$R\epsilon_0 \gg \theta^2, \quad (28.4)$$

где

$$\epsilon_0 = 3T \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\theta/T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1} \right) z^3 dz$$

и R — энергия «отдачи» ядра, равная

$$R = \frac{(p' - p)^2}{2M}$$

(по порядку величины R равняется $\frac{m}{M} E$).

В предельном случае высоких температур ($T \gg \theta$) условие (28.4) может быть записано в виде

$$E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{T}, \quad T \gg \theta. \quad (28.4')$$

При низких температурах ($T \ll \theta$) условие (28.4) даёт:

$$E \gg \frac{M}{m} \theta, \quad T \ll \theta. \quad (28.4'')$$

При выполнении условия (28.4) эффективное сечение $d\sigma$ имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} dE' d\omega' \frac{p'}{p} \int e^{i\mu(E'-E+R) - \mu^2 R\epsilon_0} d\mu = \\ &= \frac{\sigma_0}{8\pi^{3/2}} \frac{d\omega' dE'}{\sqrt{R\epsilon_0}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(E'-E+R)^2}{R\epsilon_0}}. \end{aligned} \quad (28.5)$$

Полученное выражение можно приближённо заменить следующим:

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{4\pi} \frac{p'}{p} \delta(E' - E + R) d\omega' dE'. \quad (28.6)$$

Смысл формулы (28.6) очевиден: нейтрон рассеивается по закону столкновения упругих шаров; связь атомов в кристалле не играет роли. Это и есть случай «слабой» связи, осуществляющейся при выполнении условия (28.4).

Формулу (28.6) мы имели уже ранее [см. (26.3)].

Мы видим, что в случае «слабой» связи сечение рассеяния в кристалле не отличается от сечения рассеяния отдельными ядрами.

Рассмотрим теперь случай «сильной» связи ($\theta \rightarrow \infty$).

Пользуясь асимптотической формулой (25.15') для $g(\mu)$, представим $d\sigma$ в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} d\omega' dE' e^{-2W} \int e^{i\mu(E'-E)} d\mu = \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi} e^{-2W} \delta(E' - E) dE' d\omega'. \end{aligned} \quad (28.7)$$

Мы получили формулу для сечения упругого рассеяния.

Проинтегрировав (28.7) по $dE' d\omega'$, получим полное сечение упругого рассеяния, совпадающее с выведенным ранее выражением.

Таким образом в области малых энергий нейтрона $E \ll \frac{M}{m} \theta$ имеет место, главным образом, упругое рассеяние ($E' = E$).

Сечение упругого рассеяния мало отличается от σ_0 , так как тепловой фактор практически равен единице.

С ростом энергии сечение упругого рассеяния уменьшается, и одновременно всё большую роль приобретает неупругое рассеяние, возникающее от следующих членов разложения $\exp g(\mu)$ в ряд по степеням $g(\mu)$ (§ 27).

В области больших энергий ($E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\epsilon_0}$) чисто упру-

гое рассеяние ($E' = E$) отсутствует; главную роль играет неупругое рассеяние, происходящее по законам

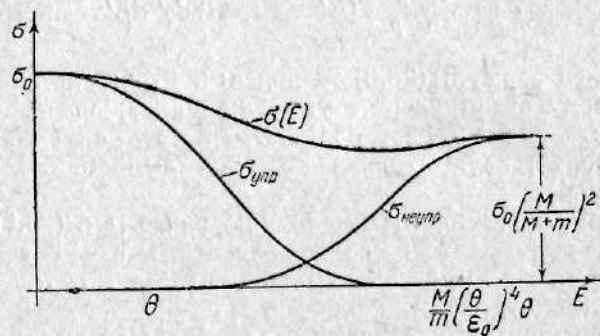


Рис. 13.

столкновения упругих шаров. (Неупругим мы его называем потому, что оно происходит с возбуждением тепловых колебаний решётки.)

С увеличением энергии нейтрона меняется характер неупругого рассеяния. В области малых энергий нейтрона при малом общем сечении неупругого рассеяния наиболее вероятны большие передачи энергии нейтрона, порядка всей его энергии. В области больших энергий, когда неупругое рассеяние составляет главную часть рассеяния, передаваемая энергия по порядку величины составляет $\frac{m}{M} E$.

На рис. 13 приведён схематически ход зависимости от энергии сечения рассеяния. Как видно из рисунка, полное сечение $\sigma(E)$ может обладать минимумом при значении энергии, лежащем между θ и $\frac{M\theta^2}{m\epsilon_0}$.

§ 29. Функция распределения нейтронов в кристаллах. Остановимся ещё на вопросе о нахождении функции распределения нейтронов в кристалле, которую мы обозначим через $f(E)$ [$f(E) dE$ представляет собой число нейтронов в энергетическом интервале dE].

Рассмотрим два предельных случая, когда $E \gg \frac{M\theta^2}{m\epsilon_0}$ и когда $E \ll \frac{M\theta^2}{m\epsilon_0}$ (обозначения см. в предыдущих параграфах).

В первом из этих случаев связь атомов в кристалле незначительна.

Вероятность того, что в результате одного столкновения нейтрон попадёт в энергетический интервал dE' , равняется:

$$dw = \frac{1}{1-\epsilon} \frac{dE'}{E},$$

где $\epsilon = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$ (энергия после столкновения заключена в интервале $\epsilon E \leq E' \leq E$).

Составим уравнение, которому удовлетворяет функция $f(E)$.

Число нейтронов в интервале энергии dE , испытавших упругие столкновения в единицу времени, равняется:

$$f(E) dE \frac{v}{l_s},$$

где l_s — длина свободного пробега по отношению к рассеянию.

Число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в этом интервале, равно:

$$f(E) dE \frac{v}{l_c},$$

где l_c — длина пробега по отношению к захвату.

Всего из интервала энергии dE уходит в единицу времени

$$f(E) dE \left(\frac{v}{l_s} + \frac{v}{l_c} \right) \quad (29.1)$$

нейтронов.

Определим число нейтронов, приходящих в интервал энергии dE из состояний с энергией E' , $E \leq E' \leq E/\epsilon$.

Число нейтронов в интервале энергии dE' , испытывающих упругие столкновения, равно:

$$f(E') dE' \frac{v'}{l_s'}$$

(штрих означает, что энергия равна E').

Из этих нейтронов в энергетический интервал dE попадает

$$\frac{1}{1-\varepsilon} f(E') dE' \frac{v'}{l_s' E'}$$

нейтронов. Интегрируя это выражение по E' в пределах от E до E/ε , найдём общее число нейтронов, попадающих в интервал энергии dE :

$$\frac{dE}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} f(E') \frac{v'}{l_s' E'} \cdot \quad (29.2)$$

Разность выражений (29.1) и (29.2) в стационарном состоянии должна равняться числу нейтронов, доставляемых источником в интервал энергии dE .

Если мы имеем дело с источником монохроматических нейтронов с энергией E_0 , то последняя величина равна:

$$Q \delta(E - E_0) dE,$$

где Q — мощность источника, т. е. число нейтронов, доставляемых источником каждую секунду.

Итак, стационарная функция распределения $f(E)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(E) v \left(\frac{1}{l_s} + \frac{1}{l_c} \right) - \frac{1}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} f(E') \frac{v'}{l_s(E')} \frac{dE'}{E'} = \\ = Q \delta(E - E_0). \quad (29.3)$$

Рассмотрим вначале тот случай, когда замедление нейтронов происходит в водороде либо в среде, содержащей водород в достаточно большой концентрации, так что можно не учитывать замедления нейтронов,

вызываемого неводородными атомами. Мы можем в этом случае положить ε равным нулю.

Вероятность того, что нейтрон с энергией E_0 в результате одного столкновения с водородным атомом попадёт в энергетический интервал dE , равна:

$$\frac{dE}{E_0}, \quad 0 \leq E \leq E_0.$$

Поэтому число нейтронов, каждую секунду попадающих в результате одного столкновения в интервал dE , равняется $Q \frac{dE}{E_0}$. Учитывая это обстоятельство, мы можем переписать в рассматриваемом случае уравнение (29.3) в виде

$$f(E) \left(\frac{v}{l_s} + \frac{1}{\tau_c} \right) = \frac{Q}{E_0} + \int_E^{E_0} \frac{f(E')}{l_s(E')} v' \frac{dE'}{E'}, \quad (29.3')$$

($\tau_c = l_c/v$ — время жизни нейтрона по отношению к захвату).

Решение уравнения (29.3') находится элементарно и имеет следующий вид [110]:

$$f(E) = \frac{Q/E_0}{v/l_s + \frac{1}{\tau_c}} \exp \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{v}{v + \frac{l_s}{\tau_c}}. \quad (29.4)$$

Если захват отсутствует, что соответствует $\tau_c = \infty$, то решение уравнения (29.3') приобретает вид

$$f(E) dE = Q \frac{l_s(E)}{v} \frac{dE}{E}. \quad (29.4')$$

Решение общего уравнения (29.3) при $\varepsilon \neq 0$ выглядит довольно сложно. Если захват мал, то в области энергий $E \ll E_0$ решение этого уравнения выражается следующей формулой [111]:

$$f(E) dE = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} Q \frac{l_s(E)}{v} \frac{dE}{E}. \quad (29.5)$$

Рассмотрим теперь случай малых энергий нейтрона $E \ll \theta$, причём мы будем предполагать, что $T \ll E$. В этом случае можно не учитывать поглощения фононов.

Вероятность перехода нейтрона с энергией E в интервал энергии dE' выражается формулой

$$\omega(E, E') dE' = \omega_0 (E^2 - E'^2) \sqrt{E'} dE', \quad (29.6)$$

где

$$\omega_0 = \frac{c_0}{(2\pi\hbar)^3 s^2} \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{1}{\sqrt{Ms^2}}$$

(s — скорость звука, см. § 27).

Составим кинетическое уравнение для определения функции распределения $f(E)$.

В стационарном случае это уравнение имеет следующий вид:

$$\omega_0 \int_E^{E_0} (E'^2 - E^2) \sqrt{E'} f(E') dE' - \omega_0 \int_0^E (E^2 - E'^2) \sqrt{E'} f(E) dE' = \frac{1}{\tau_c} f(E). \quad (29.7)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой число нейтронов, входящих в состояние с энергией E из состояний с энергией $E' > E$ (предполагается, что энергия нейтронов, испускаемых источником, значительно больше θ); второе слагаемое даёт число нейтронов, уходящих из состояния с энергией E в состояния с энергией $E' < E$.

Справа стоит число нейтронов, поглощаемых ядрами в единицу времени. Напомним, что величину τ_c в случае медленных нейтронов можно считать не зависящей от энергии нейтрона, если только в тепловой области нет резонансных уровней, так как в этом случае сечение захвата обратно пропорционально скорости нейтрона.

Выполнив интегрирование во втором слагаемом, представим кинетическое уравнение (29.7) в виде

$$\int_E^{E_0} (E'^2 - E^2) f(E') dE' = \left(\frac{8}{21} E^{7/2} + \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right) E^{-1/2} f(E). \quad (29.8)$$

Вводя обозначение

$$\int_E^{E_0} f(E) dE = \varphi(E)$$

и дифференцируя (29.8) по E , получим:

$$\frac{d}{dE} \left\{ E^{-1/2} \left(\frac{8}{21} E^{7/2} + \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right) \frac{d\varphi}{dE} \right\} = 2E\varphi(E). \quad (29.9)$$

Если ввести вместо E новую переменную x , равную

$$x = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \left(\frac{21}{8} \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right)^{2/7},$$

то уравнение (29.9) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left\{ (x^3 + x^{-1/2}) \frac{d\psi}{dx} \right\} = \frac{21}{4} x\psi(x), \quad (29.10)$$

где

$$\psi(x) \equiv \varphi(E).$$

(При $x=1$ вероятность неупругого рассеяния равна вероятности захвата.)

Уравнение (29.10) имеет частное решение $\psi = x^{3/2}$; поэтому общее решение этого уравнения ищем в виде

$$\psi = x^{3/2} y(x).$$

Функция y удовлетворяет уравнению

$$(x + x^{9/2}) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(6x^{7/2} + \frac{5}{2} \right) \frac{dy}{dx} = 0,$$

которое легко интегрируется.

В результате простых выкладок получаем следующее выражение для $\psi(x)$:

$$\psi(x) = C \left\{ 1 - \frac{3}{7} x^{3/2} \sum_{k=1}^7 \omega^{4k} \ln(\sqrt{x} + \omega^k) \right\},$$

где $\omega = e^{2\pi i/7}$. Постоянная C представляет собой число нейтронов с энергией $E \geq 0$. Она равна

$$C = Q\tau_c.$$

Функция распределения $f(E)$ находится дифференцированием $\psi(x)$:

$$f(x) = C \left\{ \frac{9}{14} x^{1/2} \sum_{k=1}^7 \omega^{4k} \ln \left(1 + \frac{\omega^k}{\sqrt{x}} \right) - \frac{3}{2} \frac{x^{5/2}}{1+x^{7/2}} \right\}. \quad (29.11)$$

Приведём асимптотические выражения для $f(x)$.

Если $x \ll 1$, что соответствует энергиям нейтронов, меньшим чем

$$E_0 = \left(\frac{21}{8} \right)^{2/7} \left(\frac{M}{2m} \right)^{1/7} (Ms^2)^{1/7} \left(\frac{s^2 h^3}{\sigma_0 \tau_c} \right)^{2/7}, \quad (29.12)$$

то

$$f(x) \approx 2,1 C x^{1/2}. \quad (29.13)$$

Таким образом, при $x \ll 1$ функция распределения пропорциональна \sqrt{E} . Этот результат непосредственно следует из уравнения (29.7), в котором при малых энергиях ($E \ll E_0$), когда неупругое рассеяние не играет существенной роли, можно пренебречь вторым членом, дающим число нейтронов, уходящих из состояния с энергией E в состояние с энергией $E' < E$. Так как первый член, дающий число нейтронов, входящих в состояние E из состояний с большей энергией, пропорционален \sqrt{E} , то функция распределения, равная числу таких нейтронов, разделённому на вероятность захвата (не зависящую от энергии), оказывается

пропорциональной \sqrt{E} в соответствии с формулой (29.13).

Если $x \gg 1$, то

$$f(x) = \frac{21}{20} C x^{-3/2}. \quad (29.14)$$

Зависимость функции распределения от энергии при $x \gg 1$ может быть получена элементарно из рассмотрения потока нейтронов в энергетическом пространстве. Так как при $x \gg 1$ захват мал, то должен сохраняться поток частиц в энергетическом пространстве, равный

$$f(E) \dot{E} = \text{const.}$$

Изменение энергии нейтрона в единицу времени по порядку величины равно:

$$\dot{E} \approx E \sigma_+ v N,$$

где σ_+ — сечение неупругого рассеяния. Вспомня, что

$$\sigma_+ \sim E^3,$$

получаем:

$$\dot{E} \sim E^{3/2},$$

и поэтому

$$f(E) \sim E^{-3/2}.$$

Заметим, что приведённая формула для потока справедлива только по порядку величины; она была бы точной при малых передачах энергии, в действительности же передаваемая нейтроном энергия порядка E . Поэтому приведённый вывод имеет, главным образом, качественный характер.

Приведём выражение для средней энергии нейтрона

$$\bar{E} = 0,69 \left(\frac{21}{8} \sqrt{\frac{M}{2m}} \frac{h^3 s^2}{\sigma_0} \frac{\sqrt{Ms^2}}{\tau_c} \right)^{2/7}. \quad (29.15)$$

По порядку величины \bar{E} равно энергии E_0 , при которой вероятность неупругого рассеяния становится

равной вероятности захвата. Этому соответствует то обстоятельство, что нейтроны эффективно замедляются только до энергий порядка E_0 , которыми и обладает наибольшее количество частиц.

С увеличением сечения захвата (уменьшением τ_0) средняя энергия \bar{E} медленно растёт (пропорционально $\tau_0^{-2/3}$) в соответствии с тем, что вероятность захвата

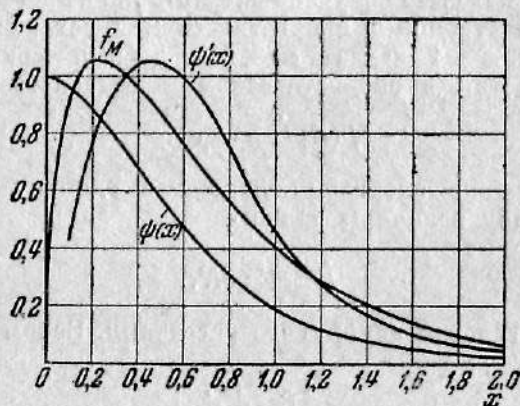


Рис. 14.

сравнивается с вероятностью неупругого рассеяния при больших энергиях.

На рис. 14 показан ход функций $\psi(x)$, $\psi'(x)$ и $f(x)$.

Для сравнения приведена также кривая, изображающая максвелловское распределение с той же средней энергией (кривая f_M).

§ 30. Рефракция нейтронов. В § 26 мы видели, что в решётках с тождественными ядрами, не имеющими механических моментов, не может происходить рассеяние нейтронов с длиной волны, удовлетворяющей неравенству $\lambda > (\pi\tau_{\min})^{-1}$.

Однако при прохождении таких нейтронов из одной среды в другую они могут испытывать преломление и отражение. Эти явления можно описать макроскопически, вводя коэффициент преломления нейтро-

нов n . Такое макроскопическое рассмотрение законно в том случае (так же, как в оптике), когда длина волны нейтронов больше, чем расстояние между соседними атомами.

Предполагая это условие выполненным, мы выведем здесь выражение для коэффициента преломления n .

Напомним предварительно, что энергия взаимодействия достаточно медленного нейтрона с ядром может быть представлена в виде

$$A\delta(r-R), \quad (30.1)$$

где r и R — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и ядра, и A — некоторая константа, не зависящая от расстояния между частицами.

Выше (§ 26) мы пользовались этим выражением при определении сечения упругого рассеяния нейтронов и связали значение константы A , предполагавшейся нами вещественной, с величиной сечения упругого рассеяния нейтронов. В этом параграфе мы будем учитывать, наряду с упругим рассеянием, также и радиационный захват нейтронов. При этом, как видно из дальнейшего, необходимо считать величину A комплексной (см. § 12).

Мы покажем сейчас, как связана эта величина с сечениями упругого рассеяния и захвата нейтронов.

Установим для этого связь между величиной A и комплексной фазой рассеяния η_0 , определяющей асимптотическое поведение волновой функции нейтрона (мы рассматриваем, естественно, только S -волну, поэтому величина η снабжена индексом нуль, см. § 12).

Будем предполагать, что модуль фазы рассеяния η_0 мал по сравнению с единицей; это значит, что сечения рассеяния и захвата предполагаются малыми по сравнению с $\pi\lambda^2$ (последнее условие выполняется во всех практически интересных случаях).

Известно, что если модуль фазы η_0 мал, то фаза может быть представлена в виде

$$\eta_0 = \eta^{(r)} + i\eta^{(i)} = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) |f_0(r)|^2 r^2 dr, \quad (30.2)$$

где m — масса нейтрона, k — его волновой вектор и

$$f_0 = \frac{\sin kr}{kr}.$$

Подставляя в качестве $V(\mathbf{r})$ в (30.2)

$$A\delta(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{A}{4\pi r^2} \delta(r), \quad (30.3)$$

получим:

$$\eta_0 = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{A}{4\pi r^2} \delta(r) \left(\frac{\sin kr}{kr}\right)^2 r^2 dr = -\frac{Amk}{2\pi\hbar^2}. \quad (30.4)$$

Сечения рассеяния и захвата нейтронов σ_s и σ_c выражаются через $\eta^{(r)}$ и $\eta^{(i)}$ следующим образом (см. § 12):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{4\pi}{k^2} \{ |\eta_0^{(r)}|^2 + |\eta^{(i)}|^2 \}, \\ \sigma_c &= \frac{4\pi}{k^2} \eta^{(i)} (1 - 2\eta^{(i)}). \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \eta^{(i)} &\approx \frac{k^2}{4\pi} \sigma_c, \\ \eta^{(r)} &\approx \pm \sqrt{\frac{k^2}{4\pi} \sigma_s - \left| \frac{k^2}{4\pi} \sigma_c \right|^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь (30.4), найдём A :

$$A = -\frac{2\pi\hbar^2}{mk} \eta_0 = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_c^2}{16\pi^2}} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_c \right\}. \quad (30.6)$$

Определим теперь потенциальную энергию нейтрона в кристалле. Последняя равна, очевидно, сумме энергий взаимодействия нейтрона со всеми ядрами решётки. Предполагая ядра тождественными и не имеющими механических моментов, получим следующее выражение

для потенциальной энергии нейтрона в кристалле:

$$V = A \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (30.7')$$

где суммирование распространяется на все ядра решётки.

Мы будем предполагать, что длина волны нейтрона λ значительно больше расстояния между соседними атомами. В этих условиях суммирование по l может быть заменено интегрированием по ρdV , где ρ — число ядер в единице объёма, dV — элемент объёма. Поэтому энергия взаимодействия приобретает вид:

$$V = A\rho. \quad (30.7)$$

Смысл проделанной нами замены суммирования интегрированием заключается по существу в том, что матричные элементы операторов (30.7) и (30.7') при выполнении условия $\lambda \gg a$, где a — среднее расстояние между соседними атомами, одинаковы.

Выражение (30.7) можно трактовать как потенциальную энергию нейтрона, находящегося в кристалле или каком-либо другом теле.

Напишем уравнение Шредингера для нейтрона. Обозначим волновую функцию нейтрона через $\psi(\mathbf{r})$.

Используя выражение (30.7) в качестве потенциальной энергии, получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + A\rho\psi = E\psi, \quad (30.8)$$

где E — энергия нейтрона.

Вне кристалла уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi_0 = E\psi_0. \quad (30.9)$$

Будем искать решения уравнений (30.8), (30.9) в виде плоских волн

$$\psi = C_1 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \psi_0 = C_2 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}, \quad (30.10)$$

где k — волновой вектор нейтрона в среде, а k_0 — в вакууме; C_1 и C_2 — константы.

Подстановка (30.10) в (30.8) и (30.9) даёт:

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + A\rho = E,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = E,$$

откуда

$$k^2 - k_0^2 = 4\pi\rho \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2 \sigma_s^2}{16\pi^2}} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_a \right\}. \quad (30.11)$$

Введём теперь коэффициент преломления нейтронов n (индекс рефракции), как это обычно делается в оптике:

$$n = \frac{k}{k_0}. \quad (30.12)$$

Величина n очень мало отличается от единицы (см. ниже), поэтому, используя для определения n формулу (30.11), мы заменим в её правой части k на k_0 .

Итак ^[112],

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi\rho}{k_0^2} \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k_0^2 \sigma_s^2}{16\pi^2}} + i \frac{k_0 \sigma_a}{4\pi} \right\}. \quad (30.13)$$

Если поглощение нейтронов отсутствует, то $\sigma_a = 0$ и

$$n^2 - 1 = \pm \frac{\rho}{k_0^2} \sqrt{4\pi\sigma_s} = \pm \frac{\hbar^2 \rho \sqrt{4\pi\sigma_s}}{2mE}. \quad (30.14)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что при извлечении корня в выражениях (30.13), (30.6), (30.14) может входить произвольный знак.

Знания сечений рассеяния и поглощения недостаточно для определения знака. Последний зависит от распределения резонансных уровней составного ядра (падающий нейтрон + исходное ядро). Так же как и в оптике, резонансные уровни, лежащие выше нулевой энергии, которая определяется здесь как сумма энергий нейтрона и исходного ядра, приводят к положительному знаку; резонансные же уровни, лежащие ниже нуля, приводят к отрицательному знаку. Таким образом тот

или иной знак вещественной части A определяется соотношением между ролью уровней, лежащих выше и ниже нуля.

Оценим порядок величины коэффициента преломления n . Считая σ_s и σ_a по порядку величины равными 10^{-24} см², мы получим $|n^2 - 1| \approx 10^{-6}$ для тепловых нейтронов ($k \approx 4 \cdot 10^8$ см⁻¹).

Таким образом коэффициент преломления нейтронов очень близок к единице. Аналогичное положение имеет место, как известно, и в случае рентгеновых лучей.

Зная коэффициент преломления, можно определить коэффициент отражения нейтронов, падающих на плоскую поверхность.

Граничными условиями для волновой функции ψ на поверхности являются, как известно, непрерывность ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$, где ν — нормаль к поверхности.

Отсюда легко получить следующее выражение для коэффициента отражения R :

$$R = \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \cos \theta} \right)^2, \quad (30.15)$$

где θ — угол между направлением падающего пучка и нормалью к поверхности.

Рассмотрим подробнее тот случай, когда поглощения нейтронов можно не учитывать.

Если $n^2 > 1$, то R всегда остаётся меньше единицы. Если же $n^2 < 1$, то $R = 1$ для всех углов θ , которые больше θ_0 , где θ_0 определяется из условия

$$\sin \theta_0 = n. \quad (30.16)$$

Так как n очень близко к единице, то угол θ_0 близок к $\pi/2$.

Рассмотрим коэффициент отражения для углов θ , близких к $\pi/2$. Обозначая $\pi/2 - \theta$ через φ и замечая, что при малых φ $\cos \theta \approx \varphi$, получим из (30.15) ^[112]:

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu}{\varphi^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\mu}{\varphi^2}}} \right)^2, \quad (30.17)$$

где $\mu = 1 - n$.

Если $\varphi < \sqrt{2\mu}$, то имеет место полное внутреннее отражение нейтронов.

В обычных условиях угол $\sqrt{2\mu}$ порядка $10'$. Таким образом нейтроны, падающие под скользящими углами к поверхности, могут испытывать полное отражение от неё. При этом (как и в оптике) нейтронная волна будет экспоненциально затухать при распространении внутрь отражающего тела. Глубина проникновения волны, т. е. длина, на которой интенсивность нейтронной волны уменьшается в e раз по сравнению с её значениями на поверхности тела, равна $^{[112]}$:

$$d = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n}} = \frac{1}{k \sqrt{2\mu}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\mu}}. \quad (30.18)$$

Если $\mu \approx 10^{-6}$, то $d \approx \lambda \cdot 10^3$. В случае тепловых нейтронов $d \approx 10^{-6}$ см.

Заметим, что коэффициент преломления нейтронов в случае намагниченного парамагнитного или ферромагнитного кристалла зависит от ориентации спина нейтрона по отношению к вектору магнитной индукции. Это обстоятельство может быть использовано для получения поляризованного пучка нейтронов.

Если угол падения нейтронов таков, что только нейтроны с одной ориентацией спина полностью отражаются от намагниченного кристалла, то прошедшие в кристалл нейтроны будут полностью поляризованы. Отражённый луч нейтронов будет при этом частично поляризован $^{[121]}$.

ДОПОЛНЕНИЕ

Расщепление быстрых дейтронов

Рассмотрим расщепление быстрого дейтрона в кулоновском поле ядра, которое не сопровождается захватом нейтрона $^{[122]}$. Такая реакция в принципе может быть использована для получения быстрых нейтронов.

За исключением случая самых тяжёлых ядер при определении эффективного сечения такого процесса можно пользоваться борновским приближением, так что задача сводится к нахождению матричного элемента электростатической энергии дейтрона V , соответствующего переходу из начального состояния, описываемого волновой функцией

$$\psi_i = L^{-3/2} e^{ik_0 R} u_0(\rho) e^{iE_0 t/\hbar},$$

в конечное состояние, описываемое волновой функцией

$$\psi_f = L^{-5/2} e^{ikR} u_1(\rho) e^{iE_1 t/\hbar}.$$

Здесь R — вектор, определяющий положение центра инерции нейтрона и протона, образующих дейтрон, ρ — радиус-вектор, определяющий положение протона по отношению к нейтрону, k_0 — волновой вектор дейтрона в начальном состоянии, k — волновой вектор, определяющий движение центра инерции нейтрона и протона после расщепления дейтрона, E_0 и E_1 — энергии обоих состояний; u_0 — нормированная волновая функция основного состояния дейтрона, u_1 — волновая функция, описывающая относительное движение нейтрона и протона после расщепления дейтрона, нормированная на энергию, L — ребро куба, в котором предполагается находящимся дейтрон.

В системе координат, в которой вначале покоился центр инерции дейтрона, потенциальная энергия может быть представлена в виде

$$V = \frac{Ze^2}{[r_{p\perp}^2 + (r_{pz} - vt)^2]^{1/2}},$$

где r_{pz} и $r_{p\perp}$ — проекции радиус-вектора протона на ось z и перпендикулярно ей (вдоль оси z движется ядро), v — скорость ядра.

Пользуясь борновским приближением, мы должны вычислить величину

$$A = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{if} e^{i\omega t} dt,$$

где $\hbar\omega = E_1 - E_0$ и V_{if} — пространственная часть матричного элемента V . Сечение процесса определится тогда как

$$\sigma = L^2 |A|^2.$$

Можно показать*), что

$$A = \frac{2i}{L^3} \frac{Ze^2}{\hbar v} I_p I_n,$$

где

$$I_p = \int dr_p e^{i(kr_p - \omega r_{pz}/v)} K_0 \left(\frac{\omega r_{p\perp}}{v} \right),$$

$$I_n = \int d\rho e^{-i\frac{1}{2}k\rho} u_1^*(\rho) u_0(\rho),$$

K_0 — функция Бесселя мнимого аргумента (вектор k_0 в выбранной нами системе координат равен нулю).

Для дейтронов с энергией до 200 MeV величина $\frac{1}{2}k\rho$ мала по сравнению с единицей. Поэтому в выражении для I_n можно разложить $e^{-i\frac{1}{2}k\rho}$ в ряд, ограничившись двумя первыми членами.

*) Мы следуем изложению Даннога [122].

Отсюда можно заключить, что $I_p \neq 0$ только в том случае, если конечное состояние представляет собой 3P -состояние.

Мы не будем здесь приводить подробных вычислений интегралов I_p и I_n , а укажем лишь, что интегральное сечение расщепления дейтрона с энергией в 200 MeV по порядку величины равно $\sigma = 2 \cdot 10^{-29} Z^2 \text{ см}^2$, где Ze — заряд ядра (следует иметь в виду, что в случае самых тяжёлых ядер приближением Борна нельзя пользоваться, поэтому эта формула не относится к таким ядрам) [122].

Наряду с рассмотренным только что эффектом расщепления дейтрона в кулоновском поле ядра может иметь место также следующий своеобразный эффект, приводящий к расщеплению дейтрона*).

Быстрый дейтрон, проходя мимо ядра, может «задеть» за ядро протоном, нейтрон же может при этом пройти вне ядра. Это приведёт к тому, что протон будет «содран» ядром, а нейтрон будет продолжать свой путь вне ядра. Таким образом могут быть получены быстрые нейтроны, энергия которых составляет примерно половину первоначальной энергии дейтрона. Если ядра коснётся нейтрон, а протон будет проходить вне ядра, то «содранным» окажется нейтрон. Мы получим при этом быстрый протон с энергией, также примерно равной половине первоначальной энергии дейтрона.

Сечение для такого процесса «сдиранья» для лёгких и средних ядер оказывается значительно большим сечения дезинтеграции быстрого дейтрона в кулоновском поле ядра. Только в случае самых тяжёлых ядер оба эффекта играют примерно одинаковую роль.

Оценим эффективное сечение этого процесса. Прежде всего заметим, что в случае достаточно быстрого дейтрона можно пренебречь отклонением нейтрона от направления первоначального движения дейтрона. Действительно, если предполагать, что протон, попадая в область ядра, находится от края ядра на расстоянии порядка

*) Теории этого эффекта посвящена работа [123]. Ниже излагаются основные результаты этой работы.

«радиуса дейтрона» R_d ($R_d = \frac{1}{2} \hbar (M\varepsilon)^{-1/2} = 2,1 \cdot 10^{-13}$ см,

ε — энергия связи дейтрона) и считать, что радиус

ядра R значительно больше R_d , то расстояние, которое проходит в ядре протон, будет по порядку величины равно $l \sim \sqrt{RR_d}$. Такое расстояние нейтрон проходит за время l/v (v — скорость дейтрона). Скорость нейтрона в направлении, перпендикулярном к первоначальному направлению дейтрона, по порядку величины равна $(\varepsilon/M)^{1/2}$, поэтому смещение нейтрона в перпендикулярном направлении по порядку величины равно $(\varepsilon/M)^{1/2} l/v$. Этого смещения можно не учитывать, если оно значительно меньше R_d . Легко видеть, что смещения можно не учитывать, если $E_d > 2 \frac{R}{R_d} \varepsilon$, где E_d — энергия дейтрона.

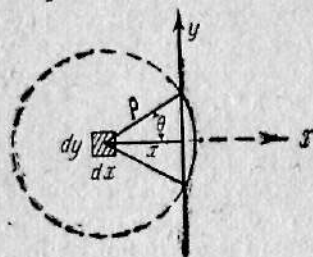


Рис. 15.

Если это неравенство выполняется (E_d должно быть больше 20 MeV для самых тяжёлых ядер), то при определении сечения достаточно рассматривать только проекции положений нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную направлению движения дейтрона.

Мы должны при этом найти вероятность того, что при столкновении дейтрона с ядром протон (его проекция) попадёт в площадь круга радиуса R , а нейтрон (его проекция) будет находиться вне этого круга. Рассмотрим столкновение, при котором расстояние между нейтроном и протоном равно ρ . Будем считать, что радиус ядра R значительно больше радиуса дейтрона; при этом можно пренебречь кривизной края ядра и считать границу ядра плоской (см. рис. 15). Пусть ось y -ов направлена вдоль края ядра, а ось x -ов — перпендикулярна краю (ось x -ов имеет направление движения нейтрона). Тогда вероятность того, что протон попадёт в заштрихованную площадку, вернее говоря, сечение этого про-

цесса будет равно $dx dy$. Вероятность того, что нейтрон будет при этом находиться вне ядра, равна отношению дуги окружности радиуса ρ , лежащей вне ядра, ко всей окружности, т. е. равна θ/π . Итак, интересующее нас сечение равно

$$\sigma(\rho) = \iint \frac{\theta}{\pi} dx dy.$$

Замечая, что $x = \rho \cos \theta$, $dx = -\rho \sin \theta d\theta$ и выполнив интегрирование по dy , которое даёт просто $2\pi R$, найдём

$$\sigma(\rho) = 2R\rho \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta = 2\rho R. \quad (1')$$

Мы получили сечение для интересующего нас процесса при заданном ρ . Это сечение следует ещё усреднить по всем ρ . Если $\psi_d(r)$ — дейтронная волновая функция, то вероятность того, что расстояние между проекциями частиц лежит в интервале $d\rho$, равна

$$2\pi\rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_d(r)|^2 dz.$$

Поэтому полное усреднённое сечение процесса «обдирания» равно

$$\sigma = 4\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} \rho^2 |\psi_d(r)|^2 d\rho.$$

Переходя от переменной z к переменной r ($r^2 = \rho^2 + z^2$), получим

$$\sigma = 8\pi R \int_0^{\infty} |\psi_d(r)|^2 r dr \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Интеграл по ρ равен $\frac{\pi}{4} r^2$, поэтому

$$\sigma = 2\pi^2 R \int_0^{\infty} |\psi_d(r)|^2 r^3 dr = \frac{\pi}{2} R \int r |\psi_d(r)|^2 dr$$

$$(dr = 4\pi r^2 dr).$$

Последний интеграл имеет простой физический смысл: это среднее расстояние между нейтроном и протоном в дейтроне. Обозначая его через R_g , представим σ в виде

$$\sigma = \frac{\pi}{2} R R_g. \quad (1)$$

Если считать, что ψ_g имеет вид $\psi_g = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$, где $\alpha = \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{\hbar}$, то величина R_g будет равна $R_g = \frac{1}{2\alpha} = 2,1 \cdot 10^{-13}$ см. Полагая R равным $1,5 A^{1/3} 10^{-13}$ см, мы получим

$$\sigma = 5 A^{1/3} 10^{-26} \text{ см}^2. \quad (2)$$

Эта величина для всех ядер, кроме самых тяжёлых, гораздо больше сечения расщепления дейтрона в кулоновском поле ядра.

Заметим, что такой же формулой определяется сечение процесса, при котором нейтрон застревает в ядре, а протон проходит мимо ядра.

Остановимся ещё на вопросе об угловом и энергетическом распределении нейтронов, возникающих в результате реакции «сдириания». Мы будем рассматривать два предельных случая, считая в одном случае ядро «прозрачным» для частиц, а в другом «непрозрачным». Оба эти случая не реализуются, конечно, в действительности, но рассмотрение их представляет интерес в том отношении, что угловые распределения, получающиеся в обоих случаях, мало отличаются друг от друга, поэтому можно считать, что получающееся распределение близко к истинному.

В случае «прозрачного» ядра мы считаем его радиус R малым по сравнению с радиусом дейтрона R_g ; в случае «непрозрачного» ядра $R \gg R_g$. Ясно, что первый случай не соответствует предположениям, которые мы делали выше при определении сечения «обдириания». Тем не менее мы рассмотрим этот случай ввиду его чрезвычайной простоты.

Выясним вопрос о распределении возникающих нейтронов по импульсам. В случае «прозрачного» ядра это

распределение будет таким же, как и в самом дейтроне; наличие ядра, в котором застревает протон, никак не будет сказываться на распределении.

Вероятность того, что импульс нейтрона в дейтроне равен p (точнее лежит в интервале dp) определяется формулой

$$P(p) dp = |\psi(p)|^2 dp, \quad (3)$$

где

$$\psi(p) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \psi_g(r) e^{-\frac{i}{\hbar} pr} dr.$$

Подставляя сюда вместо ψ_g волновую функцию основного состояния дейтрона, получим

$$\psi(p) = \frac{1}{\pi} \frac{(M\varepsilon)^{1/4}}{M\varepsilon + p^2}. \quad (3')$$

Чтобы найти импульс освобождающегося нейтрона, нужно к вектору p прибавить импульс, связанный с движением центра инерции дейтрона. Это значит, что, не изменяя p_x и p_y , нужно к p_z прибавить величину

$$p_0 = \sqrt{ME_g} \left(1 + \frac{E_g}{8Mc^2}\right)$$

(второй член в скобках — малая релятивистская поправка).

Если p_1 — проекция p в направлении, перпендикулярном оси z , то угол вылета нейтрона (по отношению к пучку дейтронов) равен, очевидно,

$$\theta = \frac{p_1}{p_0}$$

(в знаменателе мы пренебрегли величиной p_z , которая мала по сравнению с p_0).

Вероятность того, что p_1 лежит между p_1 и $p_1 + dp_1$, равна, очевидно,

$$\begin{aligned} P(p_1) 2\pi p_1 dp_1 &= 2\pi p_1 dp_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(M\varepsilon)^{1/2} dp_z}{\pi^2 (M\varepsilon + p_1^2 + p_z^2)^2} = \\ &= \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{2\pi (M\varepsilon + p_1^2)^{3/2}} 2\pi p_1 dp_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Выразив p_1 через θ , мы получим угловое распределение освобождающихся нейтронов:

$$P(\theta) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_0}{(\theta_0^2 + \theta^2)^{3/2}} d\Omega, \quad (5)$$

где

$$\theta_0 = \left(\frac{\epsilon}{E_g}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{E_g}{8Mc^2}\right] \approx \left(\frac{\epsilon}{E_g}\right)^{1/2} \quad (5')$$

и $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$.

Мы видим, что нейтроны в основном движутся в конусе, ось которого совпадает с направлением первоначального пучка дейтронов и угол раствора которого по порядку величины равен $\theta_0 \sim \left(\frac{\epsilon}{E_g}\right)^{1/2}$, что составляет около 6° для дейтронов с энергией в 190 MeV (точнее говоря, ширина углового распределения составляет $\sim 1,54 \theta_0$).

Энергия освобождающегося нейтрона равна

$$E = \frac{1}{2M} [(p_0 + p_z)^2 + p_1^2] = \frac{1}{2M} [p_0^2 + 2p_0 p_z + p^2].$$

Так как $p_0 \gg p$, то

$$E \approx \frac{1}{2} E_g + \sqrt{\frac{E_g}{M}} p_z.$$

Отсюда видно, что распределение по энергиям определяется распределением по проекциям импульса на ось z . Распределение по p_z согласно (3) и (3') имеет вид

$$P(p_z) dp_z = \frac{2}{\pi} dp_z \int_0^\infty \frac{p_\perp dp_\perp}{(M\epsilon + p_\perp^2 + p_z^2)^2} = \frac{(M\epsilon)^{1/2} dp_z}{\pi (M\epsilon + p_z^2)}. \quad (6)$$

Выразив здесь p_z через E , найдём распределение нейтронов по энергиям:

$$P(E) dE = \frac{\sqrt{\epsilon E_g} dE}{\pi \left[\left(E - \frac{1}{2} E_g\right)^2 + \epsilon E_g \right]}. \quad (7)$$

Мы видим, что центром распределения является значе-ние энергии $E_0 = \frac{1}{2} E_g$; ширина распределения равна $2\sqrt{\epsilon E_g}$, что составляет 41 MeV при энергии дейтронов в 190 MeV.

Определим теперь угловое распределение нейтронов в случае «непрозрачного» ядра, когда $R \gg R_g$. В этом случае границу ядра можно считать плоской (см. рис. 15). Нас интересуют такие столкновения дейтрона с ядром, при которых проекция положения протона попадает в область ядра, а проекция нейтрона лежит вне ядра, т. е. $x_p < 0$ и $x_n > 0$ (индексы p и n относятся соответственно к протону и нейтрону).

Возникает своеобразная диффракционная задача, в которой для учёта наличия ядра мы будем считать, что волновая функция ψ отлична от нуля только в тех случаях, когда $x_n > 0$, $x_p < 0$, и имеет при этом следующий вид:

$$\psi = \psi_g(r) \frac{1}{L}, \quad (8)$$

где $\psi_g(r)$ — нормированная волновая функция, описывающая внутреннее движение дейтрона, а L — ребро куба, в котором предполагается находящимся дейтрон.

Мы не выписали в (8) множителя $L^{-1/2} e^{i p_0 z}$, описывающего движение центра инерции дейтрона, так как нас интересуют только проекции положений нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную оси z , вдоль которой движется дейтрон.

Величина $|\psi|^2 dr dX dY$ представляет собой нормированную вероятность того, что r , X , Y находятся в интервалах dr , dX , dY (X , Y , Z — координаты центра инерции дейтрона).

Будем считать независимыми переменными функции ψ величины x_n , x_p , y , z , Y ($y = y_n - y_p$, $z = z_n - z_p$). Так же, как и в случае «прозрачного» ядра, мы перейдём от волновой функции (8) в обычном пространстве к волновой функции в пространстве импульсов. Этот переход совершается с помощью преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y) = & L^{-1} h^{-2} \int_0^\infty dx_n \int_{-\infty}^0 dx_p \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \times \\ & \times \psi(x_n - x_p, y, z) \cdot e^{-\frac{i}{h} (p_{nx} x_n + p_{px} x_p + p_y y + p_z z)} \quad (9) \end{aligned}$$

(p_{nx} и p_{px} — проекции на ось x -ов импульсов нейтрона и протона).

Интегрирование по y и z не отличается здесь от соответствующего интегрирования при выводе формулы (3') для $\psi(p)$. Если ввести функцию

$$\psi(p_y, p_z, x_n - x_p) = \hbar^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p'_x, p_y, p_z) e^{\frac{i}{\hbar} p'_x (x_n - x_p)} dp'_x, \quad (9')$$

то (9) представится в виде

$$\psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y) = L^{-1} \hbar^{-1} \int_0^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^0 dx_p \psi(p_y, p_z, x_n - x_p) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{nx} x_n + p_{px} x_p)} = -\hbar^{1/2} (2\pi)^{-3/2} L^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(p'_x, p_y, p_z)}{(p'_x - p_{px})(p'_x + p_{px})} dp'_x. \quad (10)$$

Чтобы устранить полюсы в знаменателе, мы деформируем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость. Замечая, что в верхней полуплоскости есть только один полюс функции $\psi(p'_x, p_y, p_z)$, получим по теореме о вычетах

$$\psi(p_x, p_{px}, p_y, p_z, Y) = \frac{1}{L} \frac{\hbar^{1/2} (M\varepsilon)^{1/4}}{(2\pi)^{3/2} P (p_x - iP)(p_{px} + iP)}, \quad (11)$$

где

$$P = (M\varepsilon + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}, \quad p_x \equiv p_{nx}.$$

Заметим, что $|\psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y)|^2 dp_{nx} dp_{px} dp_y dp_z dY$ представляет собой пронормированную вероятность нахождения величин $p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y$ в соответствующих интервалах.

Вероятность того, что импульс нейтрона лежит в интервале dp , а величина Y — в интервале dY , равна

$$P(p) dp dY = dp dY \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p_x, p_{px}, p_y, p_z)|^2 dp_{px} = \frac{\hbar}{8\pi^2 L^2} \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{P^3 (P_x^2 + P^2)} dY dp. \quad (12)$$

Если разделить эту величину на число дейтронов, падающих на единицу площади, т. е. на $\frac{1}{L^2}$, то мы получаем дифференциальное сечение процесса, отнесённое к элементу длины периферии ядра dY . Вводя угол φ , определяющий положение точки на периферии ядра, и замечая, что $dY = R d\varphi$, $p_x = p_1 \cos \varphi$, $p_y = p_1 \sin \varphi$, найдём, интегрируя (12) по $d\varphi$, следующее выражение для дифференциального сечения процесса, при котором импульс нейтрона лежит в интервале dp :

$$d\sigma = \frac{\hbar (M\varepsilon)^{1/2} R dp}{8\pi^2 (M\varepsilon + p^2)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(M\varepsilon + p_x^2 + p_1^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (13)$$

Для получения углового распределения нейтронов нужно это выражение проинтегрировать по dp_x . Выполнив интегрирование, получим:

$$d\sigma = \frac{RR_g}{\pi (1 + \zeta^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\zeta^2} [(1 + \zeta^2) \operatorname{arctg} \zeta - \zeta] \right\} d\Omega_\zeta, \quad (14)$$

где

$$\zeta = \frac{\theta}{\theta_0}.$$

Если проинтегрировать это выражение по $d\Omega_\zeta$, то мы получим $\frac{\pi}{2} RR_g$, т. е. величину полного сечения.

Формула (14), относящаяся к случаю «непрозрачного» ядра, отличается от формулы (5) для случая «прозрачного» ядра множителем в фигурных скобках. Вычисления, проведённые по обеим формулам, приводят к очень близким результатам, что уже отмечалось выше.

Чтобы найти распределение нейтронов по энергиям, нужно проинтегрировать (13) по $p_1 dp_1$.

В результате получим:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \pi RR_g \frac{\varepsilon E_g dE}{\left[\left(E - \frac{1}{2} E_g \right)^2 + \varepsilon E_g \right]^{3/2}}. \quad (15)$$

Это распределение несколько отличается от распределения (7), относящегося к «прозрачному» ядру (ширина распределения (15) уже, чем ширина (7); для $E_p = 190$ MeV ширина (15) составляет 31 MeV).

Подчеркнем в заключение, что рассмотренные предельные случаи могут служить главным образом для качественной характеристики явления; существенно, однако, то обстоятельство, что оба случая приводят к близким результатам, поэтому можно надеяться, что полученные результаты близки к истинным.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bethe a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc. A* 148, 146 (1935).
2. Мотт и Мессн, Теория атомных столкновений, стр. 33.
3. Бете и Бечер, Физика ядра, ч. I, ДНТВУ (1938), стр. 42 и след.
4. H. Bethe a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc. A* 148, 146 (1935).
Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 59.
5. Л. Ландау и Я. Смородинский, *ЖЭТФ*, 14, 269 (1944).
6. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 46.
7. W. Rarita a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* 59, 436 (1941).
8. W. Herper a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* 181, 43 (1942).
9. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ, 1937, стр. 241.
10. J. Kellogg, J. Rabi, N. Ramsey, J. Zacharias, *Phys. Rev.* 57, 677 (1940).
11. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ (1935), стр. 381.
12. E. Condon a. G. Shortley, *The Theory of atomic spectra*, стр. 60, ф-ла (5).
13. W. Arnold a. A. Roberts, *Phys. Rev.* 71, 878 (1947).
14. L. Alvarez a. F. Bloch, *Phys. Rev.* 57, 111 (1940), *Phys. Rev.* 57, 352 (1940).
15. J. Schwinger a. E. Teller, *Phys. Rev.* 52, 286 (1937).
16. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9, стр. 124 (1937).
17. Мотт и Мессн, *loc. cit.*, стр. 113.
18. W. Jevons, Report on Band Spectra of Diatomic Molecules.
19. M. Hamermesh a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* 71, 678 (1947).
20. R. Sutton, T. Hall и др., *Phys. Rev.* 72, 1147 (1947).
21. H. Hanstein, *Phys. Rev.* 59, 489 (1941).
22. C. Wu, L. Rainwater, W. Havens, J. Dunning, *Phys. Rev.* 69, 236 (1946).
23. M. Hamermesh a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* 69, 145 (1946).
24. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9, 122 (1937).
25. Hadley, Leith и др., *Bull. Am. Phys. Soc.* 23, 15 (1948).
26. Мотт и Мессн, *loc. cit.*, стр. 100.
27. M. White, *Phys. Rev.* 47, 573 (1935).
28. M. Tuve, N. Heydenburg, L. Haftstad, *Phys. Rev.* 50, 806 (1936).

29. R. Herbig, D. Kerst и др., *Phys. Rev.* **55**, 998 (1939).
30. R. Wilson а. E. Greutz, *Phys. Rev.* **71**, 339 (1947); R. Wilson, *Phys. Rev.* **71**, 384 (1947); R. Wilson и др., *Phys. Rev.*, **71**, 560 (1947).
31. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 81.
32. G. Breit, E. Condon, R. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936).
33. R. Peierls а. M. Preston, *Phys. Rev.* **72**, 250 (1947).
34. Мотт и Мессн, *loc. cit.*, стр. 37.
35. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 42.
36. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 87.
37. E. Fermi, *Phys. Rev.* **48**, 570 (1935).
38. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, (1940), стр. 119 и след.
39. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 79, 72.
40. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1940, стр. 171.
41. Я. Френкель, *Sov. Phys.* **9**, 533 (1936).
42. N. Bohr, *Nature* **137**, 344, 351 (1936), *УФН*, т. XVI, 425 (1936); *Nature* **141**, 326 (1938).
43. Н. Бор и Ф. Калькар, *УФН*, т. XX (1938), стр. 1.
44. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 69 (1937).
45. R. Peierls, Reports on progress in physics, т. VII, 89 (1940).
46. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат (1944), стр. 407.
47. H. Bethe, *Phys. Rev.* **50**, 332 (1936).
48. Л. Ландау, *Sov. Phys.* **11**, 556 (1937); *ЖЭТФ*, **7**, 819, 1937.
49. V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **52**, 295 (1937).
50. H. Bethe, *Phys. Rev.* **57**, 1125 (1940).
51. M. Goldberger а. F. Seitz, *Phys. Rev.* **71**, 294 (1947).
52. H. Bethe а. G. Placzek, *Phys. Rev.* **57**, 1075 A (1940).
53. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, Гостехиздат (1934), стр. 99, 135, 182.
54. Борн, Оптика, ОНТИ (1934).
55. Amaldi, Bossiarelli, Cassiariotti, Tribacchi, *Nuovo Cimento*, **3**, 203 (1946).
56. А. Ахнезер, И. Померанчук, *Journal of Phys.* IX, 471 (1945).
57. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат (1947), стр. 148.
58. А. Мигдал, *ЖЭТФ* **15**, 81 (1945).
59. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 224—226 (1937).
60. Л. Русинов, *УФН*, т. XXV, 144 (1941).
61. И. Курчатов и Л. Русинов, Юбилейный сборник, посвященный 30-летию Октябрьской революции. Издательство АН (1947), стр. 285.
62. Weizsäcker, *Naturwiss.*, **24**, 813 (1936).
63. M. Hebb а. G. Uhlenbeck, *Physica* V, 605 (1938).
64. R. Sachs, *Phys. Rev.* **57**, 194 (1940).

65. G. Breit а. E. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).
66. H. Bethe а. G. Placzek, *Phys. Rev.* **51**, 450 (1937).
67. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат (1947), стр. 309.
68. P. Karig а. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **166**, 277 (1938).
69. A. Siegert, *Phys. Rev.* **56**, 750 (1939).
70. G. Breit, *Phys. Rev.* **69**, 472 (1946).
71. E. Wigner, *Phys. Rev.* **70**, 15, 606 (1946).
72. H. Feshbach, Peaslee, Weisskopf, *Phys. Rev.* **71**, 145 (1947).
73. Goldsmith, Jbber, Feld, *Rev. Mod. Phys.* **19**, 259 (1947).
74. Diebner, Herrmann u. Grassmann, *Phys. ZS* **43**, 440 (1942).
75. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 114 (1937).
76. Griffiths а. Szilard, *Nature* **139**, 323 (1937).
77. W. Sturm а. S. Turkel, *Phys. Rev.* **70**, 103 (1946); L. Rainwater а. W. Havens, *Phys. Rev.* **70**, 136, 154 (1946), *Phys. Rev.* **71**, 65 (1947).
78. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 166, 172, 163, 196, 212 (1937).
79. J. Oppenheimer а. Phillips, *Phys. Rev.* **48**, 500 (1935).
80. Е. Лифшиц, *Sov. Phys.* **13**, 224 (1938).
81. H. Bethe, *Phys. Rev.* **53**, 39 (1938).
82. Volkoff, *Phys. Rev.* **57**, 873 (1940).
83. O. Hahn а. F. Strassmann, *Naturwiss.*, **27**, 11 (1939).
84. N. Bohr, *Nature* **143**, 330 (1939); *Phys. Rev.* **55**, 418 (1939).
85. Я. Френкель, *ЖЭТФ* **9**, 641 (1939).
86. N. Bohr а. I. Wheeler, *Phys. Rev.* **56**, 426 (1939).
87. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат (1944), стр. 400.
88. В. Берестецкий и А. Мигдал, Изв. АН СССР т. V, 602 (1941).
89. К. Петржак и Г. Флёрв, *УФН*, т. XXV, 178 (1941).
90. N. Bohr, *Phys. Rev.* **58**, 864 (1940).
91. G. Baldwin а. G. Klaiber, *Phys. Rev.* **71**, 3 (1947).
92. J. Jacobsen а. N. Lassen, *Phys. Rev.* **59**, 1042 (1941).
93. Э. Ферми, *УФН*, т. XXXII, 54 (1947).
94. Я. Зельдович и Ю. Харитон, *ЖЭТФ* **9**, 1425 (1939); **10**, 29, 477 (1940).
95. R. Peierls, *Proc. Camb. Phil.* **35**, 610 (1939).
96. E. Hopf, *Camb. Tracts in Mathematics and Mathem. Physics* N. 31 (1934), 54, ур-ие (171).
97. W. Lamb, *Phys. Rev.* **55**, 190 (1939).
98. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат (1940), стр. 107.
99. G. Wick, *Phys. ZS.* **38**, 403, 689 (1937).
100. И. Померанчук, *Sov. Phys.* **13**, 65 (1938).
101. R. Weinstock, *Phys. Rev.* **65**, 1 (1944).
102. O. Halpern, M. Hammermesh а. M. Johnson, *Phys. Rev.* **59**, 981 (1941).

103. А. Ахиезер и И. Померанчук, *ЖЭТФ* 17, 769 (1947).
 104. E. Fermi a. L. Marshall, *Phys. Rev.* 71, 666 (1947).
 105. E. Fermi a. L. Marschall, *Phys. Rev.* 72, 408 (1947).
 106. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат (1947), стр. 174.
 107. E. Fermi, W. Sturm, R. Sachs, *Phys. Rev.* 71, 589 (1947).
 108. H. Anderson, E. Fermi, L. Marshall, *Phys. Rev.* 70, 815 (1946).
 109. А. Ахиезер и И. Померанчук, *Journ. of Phys* IX, 461 (1945).
 110. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9, 122 (1937).
 111. S. Flügge, *Phys. ZS.* 21/22, 445 (1943).
 112. M. Goldberger a. F. Seitz, *Phys. Rev.* 71, 294 (1947).
 113. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. 1, Гостехиздат (1948), § 19.
 114. P. Ewald a. G. Hermann, *Strukturbericht*, 30 (1931).
 115. Я. Смородинский, *ЖЭТФ* 15, 89 (1945); 17, 941 (1947).
 116. Я. Смородинский, *ДАН*, т. LX, № 2, 218 (1948).
 117. R. Serber, *Phys. Rev.* 72, 1114, (1947).
 118. Seidl, Harris, Langsdorf, *Phys. Rev.* 72, 168 (1947).
 119. N. Feather, *Nature*, 159, 607 (1947).
 E. Wollan, Moak, Sawyer, *Phys. Rev.* 72, 447 (1947).
 Tsien San-Tsiang и др. *Phys. Rev.* 71, 382 (1947).
 120. Marshak, *Rev. Mod. Phys.* 19, 185 (1947).
 121. А. Ахиезер и И. Померанчук, *ЖЭТФ* 18, 475 (1948).
 122. S. Dancoff, *Phys. Rev.* 72, 1017 (1947).
 123. R. Serber, *Phys. Rev.* 72, 1008 (1947).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Брейта-Вигнера формула 145
 Брэгга формула 263
 β -радиоактивность осколков 191, 201
 Вероятность прилипания 113, 125 и д.
 γ -излучение 94, 135
 —, внутренняя конверсия 139
 — дипольное 68, 73, 77, 83, 84, 87, 89, 136
 — квадрупольное 69, 78, 137
 — при делении ядер 204
 — при захвате нейтронов протонами 65
 Дейтрон, квадрупольный момент 27
 —, основное состояние 7, 17
 —, расщепление в поле ядра 303
 —, сечение «сдирания» 305
 —, фоторасщепление 81
 —, энергия связи 18
 Деление ядер 191
 — —, вероятность 202
 — —, механизм 191
 — —, спонтанное 200
 — —, цепная реакция 209
 Дисперсионная формула 141, 149
 Длина рассеяния 252
 «Закон $1/v$ » 132, 168, 179
 Захват нейтронов в кристаллах 236
 — — протонами 65
 — — свободными ядрами 162
 Изомерия 139
 Капельная модель ядра 99, 192
 Критическая деформация ядра 193
 — энергия ядра 193
 Критические размеры 225
 Коэффициент размножения 216, 248
 Линия поглощения, форма — — 173, 247
 Нейтроны быстрые, рассеяние 54
 — вторичные 209
 —, длина свободного пробега 210, 268
 —, магнитный момент 32
 —, медленные, рассеяние 7
 —, рассеяние в кристаллах неупругое 270
 —, — — упругое 250
 —, — в параводороде 33
 —, — в ортоводороде 33
 —, — свободными протонами 7
 —, — связанными протонами 48
 —, рефракция 296
 —, средний квадрат длины замедления 210
 —, функция распределения в кристаллах 289
 Оппенгеймера-Филлипса процесс 189, 209, 303
 Ортоводород 34
 Параводород 34
 Потенциальный барьер 183
 Правила отбора 148, 188
 Предел устойчивости ядра 196
 Прозрачность барьера 183

- Протоны, рассеяние протонами
57
— связанные 50
—, угловое распределение 62
- Радиус действия ядерных сил 47
— ядра 169
- Распределение частиц по энергиям 133
- Рассеяние быстрых нейтронов 54, 122
—, дифференциальное сечение 13, 16, 50, 54
— дифракционное 122, 123
—, интегральное сечение 14
— медленных нейтронов 7
— нейтронов в кристаллах, влияние силы 257
— — — — неупругое 270
— — — — упругое 250
— — — ортоводороде 33
— — — параводороде 33
— — свободными протонами 7
— — связанными протонами 48
— неупругое 94, 182, 288
— потенциальное 10, 155, 181
— протонов протонами 57
— резонансное 149
— свободными ядрами 283
— упругое 93, 154, 181, 288
- Резерфорда формула 57
- Рефракция нейтронов 296
- Свободная энергия ядра 101
- Составное ядро 91
— —, распределение частиц по энергиям 133
— —, сечение образования 106
- Столкновения неупругие, эффективное сечение 113
— упругие, эффективное сечение 50, 54, 120
- Форма линии поглощения 173, 244, 247
- Формула Брейта-Вигнера 145
- Формула Брэгга 263
— дисперсионная 141
— для замедления нейтронов 210
— — энергии возбуждения 103
— Резерфорда 57
- Функция распределения нейтронов в кристаллах 289
- Целая реакция 209
— —, гетерогенная система 219
— —, критические размеры 225
- Ширина уровня 95, 106, 174
- Энергия возбуждения 103
— критическая 193
— связи дейтрона 18
- Энтропия ядра 102
- Эффект Доплера 171
- Эффективное сечение деления 208
— — захвата 72, 77, 78, 80, 82, 164, 172
— — неупругих столкновений 113, 272
— — образования составного ядра 115
— — рассеяния 10, 16, 56, 61, 155, 250, 263, 267
— — упругих столкновений 50, 54, 120, 151, 252
— — усреднённое 176
- Ядерные реакции с заряженными частицами 183
— силы 54, 58
— —, радиус действия 47
- Ядро, изомерия 139
—, капельная модель 99, 192
—, критическая деформация 193
—, — энергии 193
—, предел устойчивости 196
—, радиационные свойства 135
— составное 91, 106, 133
— тяжёлое, деление 191
— —, статистические свойства 97

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
13	ф-ла (1.4')	$\left(\frac{u_0}{u_0}\right)_{r=r_0} =$	$\left(\frac{u'_0}{u_0}\right)_{r=r_0} =$	Тип.
76	14 св.	J^2	J^2_{Σ}	»
80	ф-ла (7.32)	$(\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\epsilon'})^2$	$(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon'})^2$	Ред.
204	3 св.	Γ^+	Γ_{γ}	Тип.
237	β-ла (25.1)	$-\frac{1}{2} \Gamma((n'_s))$	$-\frac{i}{2} \Gamma((n'_s))$	Авт.
242		В формулах (25.8) и (25.9) интеграл по ρ должен следовать за интегралом по μ		»
244	ф-ла (25.13)	$(1 + \bar{n}_e) e^{i\mu e} + \bar{n}_e e^{-i\mu e}$	$(1 + \bar{n}_e) e^{-i\mu e} + \bar{n}_e e^{i\mu e}$	»
246	12 св.	(25.8)	(25.18)	»
261	6 св.	$\bar{A}_1^2 - 2\bar{A}_1\bar{A} + \bar{A}^2 = \bar{A}^2 - \bar{A}^2$	$\bar{A}_1^2 - 2\bar{A}_1\bar{A} + \bar{A}^2 = \bar{A}^2 - \bar{A}^2$	Тип.
269	24 св.	π^2	π	Авт.
274	21 св.	$sf_0 = k\theta$	$sf_0 = \theta$	»
288	Рис. 13	На оси абсцисс должно быть $\frac{M}{m} \left(\frac{\theta}{\epsilon_0}\right) \theta$		»
292	ф-ла (29.7)	$(E^2 - E'^2)^2$	$(E^2 - E'^2)$	
304	18 св.	$e^{i(kr_p - \omega r_{pz}/v)}$	$e^{i(kr_p - \omega r_{pz}/v)}$	Ред.