

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

А. Г. СИТЕНКО

А. Г. СИТЕНКО

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Для студентов вузов



А. Г. СИТЕНКО

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физических
специальностей вузов



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1983

ББК 22.38

С41

УДК 539.17.01(075.8)

Рецензенты: доктор физико-математических наук
В. Г. Неудачин; кафедра теоретической физики ВГУ

Ситенко А. Г.

С 41 Теория ядерных реакций: Учеб. пособие для вузов. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 352 с., ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

Изложены основы современных представлений о природе ядерных процессов и ядерных превращений; приведен формализм описания ядерных реакций и детально рассмотрены различные механизмы ядерных процессов. Достаточно полно отражены новейшие достижения в теории ядерных реакций.

Для студентов и аспирантов физических факультетов университетов и инженерно-физических вузов. Может быть полезна также преподавателям и научным сотрудникам, работающим в области теоретической ядерной физики.

С $\frac{1704070000-356}{051(01)-83}$ 246-83

ББК 22.38
530.4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой расширенное изложение второй части курса лекций по теории ядра, читаемого автором на протяжении ряда лет на физическом факультете в Киевском государственном университете. Первая часть курса посвящена изучению структуры атомных ядер [1]. Во второй части курса изучаются ядерные реакции. В настоящей книге изложена нерелятивистская теория ядерных реакций; вопросы релятивистской ядерной физики практически в ней не затрагиваются.

Нерелятивистская теория ядерных реакций, так же как и нерелятивистская теория рассеяния [2], существенным образом основывается на использовании понятия матрицы столкновений, или S -матрицы. В отсутствие последовательной микроскопической теории матрица столкновений находится феноменологически на основе определенных допущений о характере ядерного взаимодействия. Возможны различные механизмы протекания ядерных процессов; наиболее характерными являются ядерные реакции с образованием составного ядра и прямые ядерные реакции. В книге подробно обсуждаются различные механизмы ядерных реакций и рассматривается взаимосвязь между ними. Детально изложена α -матричная теория, используемая для описания резонансных ядерных процессов, а также рассмотрены различные подходы (в том числе и дисперсионный), используемые для описания прямых ядерных реакций. Подробно разобрана оптическая модель, описывающая ядерные процессы при низких энергиях, и исследованы дифракционные явления, возникающие при взаимодействии нуклонов с ядрами. Обсуждены особенности многочастичных ядерных реакций, в том числе реакций с участием трех частиц. Детально изложена дисперсионная теория прямых ядерных реакций, основанная на использовании фейнмановских диаграмм. В рамках теории многократного рассеяния рассмотрены дифракционные ядерные процессы при высоких энергиях с участием сложных ядерных частиц.

Несмотря на все несовершенство и феноменологический характер, существующая теория ядерных реакций удовлетворительно описывает основные закономерности ядерных процессов в нерелятивистской области и является надежной основой для практических расчетов в прикладной физике и ядерной энергетике. Хотя

существующие и устоявшиеся представления о ядерных процессах разрабатывались на протяжении нескольких десятков лет и получили отражение в большом числе монографий, тем не менее в настоящее время отсутствует систематическое и достаточно подробное изложение теории ядерных реакций, что и послужило мотивом к написанию этой книги. Главное внимание в ней сосредоточено на изложении основных положений теории ядерных реакций, но в книге отражены и многие вопросы, до сих пор освещавшиеся лишь в оригинальных работах и не излагавшиеся в учебной литературе. В конце книги приведены список важнейших монографий по теории ядра [3—15], в которых рассмотрены отдельные вопросы теории ядерных реакций, а также список оригинальных работ, который, однако, не претендует на полноту. Автор будет благодарен за любые критические или конструктивные замечания и пожелания.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность В. Ф. Харченко за помощь при написании отдельных параграфов первых двух глав.

Автор

ГЛАВА 1

ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

§ 1.1. Кинематика и законы сохранения

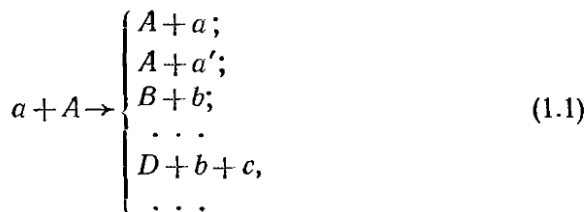
Ядерные реакции. Под *ядерными реакциями* в широком смысле слова подразумеваются различные процессы, в результате которых изменяется внутреннее состояние ядерных частиц, или же происходит их взаимное превращение. Обычно ядерные реакции возникают при столкновении ядерных частиц. Экспериментально ядерные реакции осуществляются в результате облучения мишеней из различных веществ пучками частиц (используются как элементарные частицы: нуклоны, π -мезоны и др., так и сложные: дейтроны, α -частицы и другие ядра). Ядерные реакции возможны также под воздействием γ -квантов и электронов.

Наиболее распространенными являются ядерные реакции бинарного типа, когда в результате столкновения двух частиц снова образуются две частицы:



или в другом обозначении $A(a, b)B$. Такая запись означает, что частица a сталкивается с ядром A , в результате чего образуется ядро B и вылетает частица b . Столкновение двух частиц может сопровождаться образованием не только двух, но и большего числа частиц.

В общем случае столкновение частицы a с ядром A может сопровождаться совокупностью различных реакций:



Простейший процесс $A(a, a)A$, при котором внутренние состояния сталкивающихся частиц не изменяются, представляет собой *упругое рассеяние*. Все остальные реакции — неупругие процессы. Процесс $A(a, a')A^*$, при котором переход ядра мишени A в возбужденное состояние A^* сопровождается уменьшением кинетической энергии частицы a , представляет собой *неупругое рассеяние*. Остальные неупругие процессы связаны с перераспределением ядерных частиц.

Начальное и конечное состояния каждой из реакций (1.1) удобно характеризовать, задавая сорт частиц и наборы квантовых чисел, определяющие внутренние состояния частиц и их относительное движение. Совокупность указанных характеристик называют *каналом реакции*¹. Обозначим каналы реакции буквами $\alpha, \beta, \gamma \dots$. Обычно начальный, или входной, канал фиксируется условиями эксперимента. Детектируя сорт, энергию, направление движения и другие характеристики образующихся частиц (продуктов реакции), выделяют конечный, или выходной, канал².

Сохранение энергии и импульса. При рассмотрении ядерных реакций используются две системы координат: лабораторная система (л. с. к.), в которой до столкновения одна из частиц (обычно ядро мишени) покоится, и система центра инерции, в которой покоится центр массы всей системы, т. е. суммарный импульс всех частиц равен нулю. Экспериментально все величины измеряются в лабораторной системе³. Однако теоретическое рассмотрение принимает более простой вид, если пользоваться системой центра инерции (с. ц. и.). В с. ц. и. ядерные реакции характеризуются максимальной симметрией, что приводит к существенному упрощению формул, описывающих реакции.

Ограничимся вначале нерелятивистским описанием и рассмотрим простейшую реакцию $A(a, b)B$. Пусть до столкновения в л. с. к. частица a с массой m_a имеет скорость $v_a^L = v$, а ядро с массой m_A покоится: $v_A^L = 0$ (отметим, что возможен выбор л. с. к. и с $v_a^L \neq 0$). Относительная скорость частицы и ядра равна v , скорость движения центра инерции определяется соотношением

$$u = \frac{m_a}{m_a + m_A} v. \quad (1.2)$$

В с. ц. и. частица a и ядро A движутся соответственно со скоростями

$$v_a = v_a^L - u = \frac{m_A}{m_a + m_A} v; \quad v_A = -u = -\frac{m_a}{m_a + m_A} v, \quad (1.3)$$

при этом их импульсы $p_a = m_a v_a$ и $p_A = m_A v_A$ равны по абсолютной величине и противоположно направлены:

$$p_a = -p_A = p \equiv \mu_\alpha v. \quad (1.4)$$

Здесь μ_α — приведенная масса во входном канале α (приведенная масса частицы a и ядра A):

$$\mu_\alpha = m_a m_A / (m_a + m_A). \quad (1.5)$$

Таким образом, если система состоит из двух частиц, то в с. ц. и. они всегда движутся навстречу друг другу, поэтому их угловые распределения не изменяются при замене угла вылета одной частицы на угол,

¹ Впервые понятие канала реакции введено в [5].

² Кинематика ядерных реакций детально рассмотрена в [9].

³ Иногда для удобства анализа экспериментальных данных вводят систему координат, в которой покоится налетающая частица; такую систему называют зеркальной или антилабораторной.

дополнительный к углу вылета второй частицы. Кинетическая энергия частицы a и ядра A в л. с. к.

$$E_{\alpha}^L = \frac{(p_a^L)^2}{2m_a} + \frac{(p_A^L)^2}{2m_A} = \frac{m_a v^2}{2} = \frac{m_a + m_A}{m_a} \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} \quad (1.6)$$

и кинетическая энергия относительного движения частиц в с. ц. и.

$$E_{\alpha} = \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{p_A^2}{2m_A} = \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} \quad (1.7)$$

связаны между собой соотношением

$$E_{\alpha} = m_A E_{\alpha}^L / (m_a + m_A). \quad (1.8)$$

Кинетическая энергия относительного движения частиц в с. ц. и. обычно называется *энергией канала* (E_{α} — энергия входного канала α).

Закон сохранения энергии в случае ядерной реакции с образованием в выходном канале двух частиц запишем в виде

$$E_{\alpha} + E_a + E_A = E_{\beta} + E_b + E_B, \quad (1.9)$$

где E_{α} и E_{β} — кинетические энергии входного и выходного каналов; E_a и E_A — внутренние энергии частиц во входном канале; E_b и E_B — внутренние энергии частиц в выходном канале. Если частицы a и b элементарны, то внутренние энергии E_a и E_b выражаются через массы частиц: $E_a = m_a c^2$ и $E_b = m_b c^2$, где c — скорость света. Внутренние энергии ядер A и B выражаются через их массы и энергии возбуждения E_A^* и E_B^* :

$$E_A = m_A c^2 + E_A^*; \quad E_B = m_B c^2 + E_B^*.$$

Разность кинетических энергий относительного движения частиц в выходном и входном каналах называют *тепловым эффектом реакции*:

$$Q_{\alpha\beta} \equiv E_{\beta} - E_{\alpha}. \quad (1.10)$$

Из условия сохранения энергии (1.9) следует

$$Q_{\alpha\beta} = E_a + E_A - E_b - E_B = (m_a + m_A - m_b - m_B) c^2 + E_A^* - E_B^*. \quad (1.11)$$

Величина $Q_{\alpha\beta}$ — важнейшая характеристика реакции, не зависящая от кинетических энергий во входном и выходном каналах α и β .

Реакция с положительным тепловым эффектом ($Q_{\alpha\beta} > 0$) называется экзотермической. Такая реакция возможна даже при нулевой энергии входного канала. Максимальная кинетическая энергия разлетающихся частиц в выходном канале достигается, если частицы образуются в своих основных состояниях (во входном канале частицы обычно находятся в основных состояниях).

Реакция с отрицательным тепловым эффектом ($Q_{\alpha\beta} < 0$) называется эндотермической. Выходной канал β является открытым, если выполнено условие $E_{\beta} \geq 0$. Поэтому эндотермическая реакция воз-

можно лишь в случае, если энергия во входном канале превосходит $|Q_{\alpha\beta}|$:

$$E_{\alpha} \geq |Q_{\alpha\beta}|. \quad (1.12)$$

Здесь $|Q_{\alpha\beta}|$ — порог реакции. В л. с. к. пороговой энергии $|Q_{\alpha\beta}|$ отвечает следующая кинетическая энергия налетающей частицы:

$$E_{\alpha}^L (\text{порог}) = \frac{m_{\alpha} + m_A}{m_A} |Q_{\alpha\beta}|. \quad (1.13)$$

В табл. 1.1 приведены значения тепловых эффектов Q для некоторых реакций.

Таблица 1.1

Реакция	Q , МэВ	Реакция	Q , МэВ
${}^2\text{H} (d, p) {}^3\text{H}$	4,03	${}^9\text{Be} (\alpha, n) {}^{12}\text{C}$	5,70
${}^3\text{H} (d, n) {}^4\text{He}$	17,59	${}^{14}\text{N} (\alpha, p) {}^{17}\text{O}$	-1,19
${}^4\text{He} (\gamma, n) {}^3\text{He}$	-20,58	${}^{28}\text{Si} (d, p) {}^{28}\text{Si}$	6,25
${}^7\text{Li} (p, \alpha) {}^4\text{He}$	17,35	${}^{208}\text{Pb} (\alpha, t) {}^{209}\text{Bi}$	-16,04

Закон сохранения полного импульса в системе связывает импульсы сталкивающихся и образующихся частиц. В л. с. к. импульсы образующихся частиц связаны с импульсами падающих частиц соотношением

$$\mathbf{p}_b^L + \mathbf{p}_B^L = \mathbf{p}_a^L + \mathbf{p}_A^L. \quad (1.14)$$

В с. ц. и. импульсы образующихся частиц соответственно удовлетворяют условию

$$\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_B = 0. \quad (1.15)$$

Согласно (1.14) скорость движения центра инерции частицы b и ядра B в выходном канале равна

$$\mathbf{u}' = \frac{m_a + m_A}{m_b + m_B} \mathbf{u} = \frac{m_a}{m_b + m_B} \mathbf{v}. \quad (1.16)$$

Импульсы частицы b и ядра B в л. с. к. выражаются через импульсы в с. ц. и. следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_b^L &= \mathbf{p}_b + m_b \mathbf{u}' = \mathbf{p}_b + \frac{m_a m_b}{m_b + m_B} \mathbf{v}; \\ \mathbf{p}_B^L &= \mathbf{p}_B + m_B \mathbf{u}' = -\mathbf{p}_b + \frac{m_a m_B}{m_b + m_B} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Связь величин и направлений импульсов разлетающихся частиц реакции $A (a, b) B$ в л. с. к. и с. ц. и. удобно представить графически (рис. 1.1). Пусть в л. с. к. частица a падает слева направо с импуль-

сом p_a^L . Разделим импульс центра инерции системы p_a^L точкой O на части, пропорциональные массам образующихся частиц b и B . Согласно (1.17) эти части являются составляющими импульсов частиц b и B , связанными с движением их центра инерции. Опишем сферу с центром в точке O радиусом, равным импульсу каждой из образующихся частиц в с. ц. и.

$$p_b = p_B = p' \equiv \sqrt{2\mu_\beta E_\beta}.$$

Согласно (1.7), (1.8) и (1.10) импульс p' связан с импульсом каждой из частиц входного канала в с. ц. и. p соотношением

$$p' = \sqrt{\left(1 + \frac{Q_{\alpha\beta}}{E_\alpha}\right) \frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} p. \quad (1.18)$$

Соответствующее выражение импульса p' через импульс падающей частицы в л. с. к. p_a^L имеет вид

$$p' = \sqrt{\left(\frac{m_A}{m_\alpha + m_A} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{E_\alpha^L}\right) \frac{m_b m_B}{m_\alpha (m_b + m_B)}} p_a^L. \quad (1.19)$$

Вектор импульса частицы b в л. с. к. p_b^L построим, соединив начало вектора импульса падающей частицы в л. с. к. p_a^L (точку M) с концом вектора импульса вылетающей частицы в с. ц. и. p_b ; импульс частицы B в л. с. к. p_B^L получим, соединив конец вектора p_b с концом век-

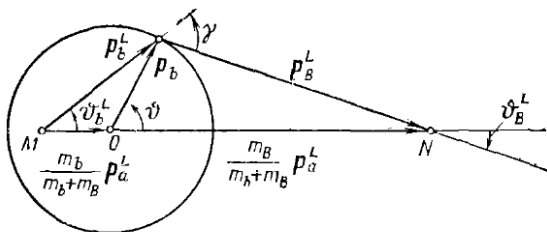


Рис 1.1. Диаграмма импульсов частиц для двухчастичной реакции $(a+A \rightarrow B + +v (m_a < m_B))$

тора p_a^L (точкой N). На рис. 1.1 ϕ — угол вылета частицы b в с. ц. и.; ϕ_b^L и ϕ_B^L — углы вылета продуктов реакции b и B в л. с. к.; γ — угол между векторами импульсов вылетающих частиц в л. с. к.

Законы сохранения энергии и импульса накладывают кинематические ограничения на возможные значения энергий и импульсов продуктов реакции. Рассмотрим произвольную реакцию, в результате которой в конечном состоянии образуется n частиц. Если не учитывать внутренние степени свободы, то система из n частиц описывается $3n$ переменными, в качестве которых можно выбрать координаты или импульсы частиц. Однако в силу законов сохранения не все переменные являются кинематически независимыми. Закон сохранения энер-

гии и импульса записывается в виде четырех соотношений между энергиями и импульсами продуктов реакции и сталкивающихся частиц. Поэтому в случае реакции с образованием n частиц из $3n$ кинематических переменных независимыми являются только $3n - 4$.

Для реакции с образованием в конечном состоянии двух частиц ($n = 2$) число независимых кинематических переменных равно двум. В качестве таких независимых переменных можно выбрать углы, определяющие направление вылета одной из частиц по отношению к направлению движения падающей частицы (кинетические энергии вылетающих частиц однозначно определяются начальными импульсами сталкивающихся частиц и тепловым эффектом реакции).

Для реакции с образованием в конечном состоянии трех частиц ($n = 3$)

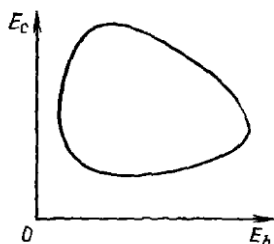
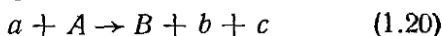


Рис. 1.2. Кривая кинематически допустимых значений кинетических энергий продуктов в трехчастичной реакции $a + A \rightarrow B + b + c$

число независимых кинематических переменных равно пяти. В качестве независимых кинематических переменных в этом случае можно выбрать кинетическую энергию одной из частиц и углы, характеризующие направление вылета двух частиц, например E_b , ϑ_b , φ_b , ϑ_c и φ_c . При экспериментальном изучении трехчастичных реакций обычно поступают следующим образом: с помощью счетчиков регистрируются две частицы, т. е. измеряются

энергии частиц и определяются направления их импульсов. Так как измеряются шесть параметров, а независимыми являются только пять, то они должны удовлетворять некоторому кинематическому условию. Если при заданных направлениях вылета регистрируемых частиц отложить результаты измерений на плоскости энергий E_b и E_c , то они будут лежать на некоторой кривой (рис. 1.2), которая определяется кинематическими условиями, т. е. законами сохранения (в координатной плоскости $\sqrt{E_b}$ и $\sqrt{E_c}$ эта кривая представляет собой эллипс).

В с. ц. и. закон сохранения энергии и импульса для реакции (1.20) имеет вид

$$E_b + E_c + E_B = E + Q; \quad (1.21)$$

$$p_b + p_c + p_B = 0, \quad (1.22)$$

где E — энергия относительного движения во входном канале и Q — тепловой эффект реакции. Согласно (1.22) в с. ц. и. импульсы всех продуктов реакции лежат в одной плоскости. Воспользовавшись законом сохранения импульса, выразим кинетическую энергию остаточного ядра B через импульсы образовавшихся частиц b и c :

$$E_B = \frac{1}{2m_B} (p_b + p_c)^2 = \frac{m_b}{m_B} E_b + \frac{m_c}{m_B} E_c + 2 \frac{\sqrt{m_b m_c}}{m_B} \sqrt{E_b E_c} \cos \vartheta,$$

где ϑ — угол между импульсами p_b и p_c . Подставив это выражение в (1.21), получим соотношение, связывающее кинетические энергии образующихся в результате реакции частиц при фиксированном направлении их вылета:

$$\left(1 + \frac{m_b}{m_B}\right) E_b + \left(1 + \frac{m_c}{m_B}\right) E_c + 2 \frac{\sqrt{m_b m_c}}{m_B} \cos \vartheta \sqrt{E_b E_c} - E - Q = 0. \quad (1.23)$$

Соотношение (1.23) представляет собой уравнение эллипса в плоскости переменных $\sqrt{E_b}$ и $\sqrt{E_c}$. Заметим, что аналогичный вид имеет кинематическая зависимость между энергиями продуктов трехчастичной реакции и в л. с. к. Большой интерес с физической точки зрения представляют соответствующие кривые в плоскости переменных E_b и E_c . Однако если кинематически допустимая кривая для трехчастичной реакции в с. п. и. имеет вид эллипса и в плоскости переменных E_b и E_c , то для трехчастичной реакции в л. с. к. кинематически допустимая кривая имеет более сложный вид (см. рис. 1.2). В с. п. и. при фиксированном значении $\cos \vartheta$ кинематически допустимые значения кинетических энергий E_b и E_c лежат на эллипсе в плоскости E_b и E_c , уравнение которого можно получить, перенеся третье слагаемое в (1.23) в правую часть равенства и возведя его в квадрат. (Соответствующие диаграммы для трехчастичных реакций на энергетической плоскости были введены Далицем [16].) Если $\cos \vartheta = 1$, то соответствующий эллипс ограничивает всю область допустимых значений кинетических энергий E_b и E_c . Эллипсы, отвечающие всевозможным энергиям, лежат внутри указанного предельного эллипса. Координаты центра эллипса Далица, ограничивающего всю кинематически разрешенную область кинетических энергий, на плоскости E_b и E_c соответственно равны:

$$E_{b0} = \frac{1}{2} \frac{m_c + m_B}{m_b + m_c + m_B} (E + Q); \quad E_{c0} = \frac{1}{2} \frac{m_b + m_B}{m_b + m_c + m_B} (E + Q).$$

Построив эллипс Далица, нетрудно определить экстремальные значения для кинетических энергий продуктов трехчастичной реакции.

Дальнейшие ограничения на физические характеристики ядерных реакций накладывают другие законы сохранения. Во всех ядерных процессах сохраняются число нуклонов (барионный заряд) и суммарный электрический заряд системы. Законы сохранения момента количества движения и четности обуславливают определенные правила отбора для орбитальных моментов, спинов и четностей частиц в конечных каналах.

Существенно влияют на характеристики реакций ограничения, вытекающие из приближенных законов сохранения. Таким, например, является закон сохранения полного изотопического спина системы — следствие зарядовой независимости ядерных сил и сравнительно незначительной роли электромагнитного взаимодействия в ядерных системах. В силу приближенного сохранения изотопического спина некоторые выходные каналы в отдельных случаях могут оказаться силь-

но запрещенными. Так, например, вероятность образования в реакции $^{12}\text{C}(d, \alpha)^{10}\text{B}$ конечного ядра ^{10}B в возбужденных состояниях с отличным от нуля значением изотопического спина сильно подавлена, поскольку изотопические спины всех других участвующих частиц (дейтрона, α -частицы и ядра ^{12}C) равны нулю¹. Изменение значения изотопического спина ядер запрещено во всех процессах, в которых начальная и конечная частицы имеют изотопический спин, равный нулю: при неупругих рассеяниях (d, d') , (α, α') , $(^{12}\text{C}, ^{12}\text{C}')$ и др.; в реакциях (d, α) , (α, d) , $(d, ^{12}\text{C})$, $(^{16}\text{O}, ^{12}\text{C})$ и т. п. Понятие изотопического спина оказалось эффективным и при изучении реакций с участием тяжелых ядер. Более подробно следствия, вытекающие из различных законов сохранения, рассмотрены при изучении конкретных реакций.

Релятивистская кинематика. Нерелятивистское описание является достаточно хорошим приближением в случае рассмотрения ядерных реакций при малых энергиях. Однако в области высоких энергий, когда кинетическая энергия частиц становится сравнимой с их энергией покоя, необходимо пользоваться релятивистским описанием. Обобщим теперь полученные кинематические соотношения на релятивистский случай.

Пусть в л. с. к. частицы характеризуются энергиями E_i^L и импульсами \mathbf{p}_i^L ($i = 1, 2, \dots, n$). Движение центра инерции описывает движение системы частиц как целого и характеризуется энергией $E^L = \sum E_i^L$ и импульсом $\mathbf{p}^L = \sum \mathbf{p}_i^L$, которые образуют четырехмерный вектор импульса $\mathcal{P}^L = (E^L/c, \mathbf{p}^L)$. Квадрат четырехмерного импульса системы частиц $(\mathcal{P}^L)^2 = \frac{1}{c^2} (E^L)^2 - (\mathbf{p}^L)^2$ является инвариантной величиной, поэтому

$$(\mathcal{P}^L)^2 = \mathcal{P}^2, \quad (1.24)$$

где $\mathcal{P} = (E/c, \mathbf{p})$ — четырехмерный импульс системы частиц в с. ц. и. Так как по определению суммарный трехмерный импульс системы частиц в с. ц. и. равен нулю ($\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i = 0$), то

$$(\mathcal{P}^L)^2 = (1/c^2) E^2.$$

Здесь E — полная энергия частиц в с. ц. и. Эта величина связана с эффективной инвариантной массой системы \mathfrak{M} :

$$E \equiv \mathfrak{M}c^2 = \sqrt{(\sum E_i^L)^2 - c^2(\sum \mathbf{p}_i^L)^2}. \quad (1.25)$$

Нетрудно убедиться, что в нерелятивистском пределе

$$E = \sum m_i c^2 + \tilde{E},$$

где \tilde{E} — кинетическая энергия относительного движения. Скорость движения центра инерции в л. с. к. определяется равенством

$$\beta \equiv \mathbf{u}/c = c\mathbf{p}^L/E^L. \quad (1.26)$$

¹ Для примера смешивания по изоспину можно привести реакции $^{11}\text{B} + p \rightarrow 3\alpha$ и $^{10}\text{B} + d \rightarrow 3\alpha$.

Если сталкиваются две частицы с массами m_1 и m_2 , то

$$E = \sqrt{(m_1^2 + m_2^2) c^4 - 2(E_1^L E_2^L - c^2 p_1^L p_2^L)}, \quad \beta = \frac{c(p_1^L + p_2^L)}{E_1^L + E_2^L}. \quad (1.27)$$

В частности, если одна из частиц покоится (например, частица 2), то

$$E = \sqrt{(m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2E_1^L m_2 c^2}; \quad \beta = \frac{cp_1^L}{E_1^L + m_2 c^2}.$$

В релятивистском случае закон сохранения энергии и импульса можно записать в виде

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \Sigma \mathcal{P}'_i. \quad (1.28)$$

Здесь \mathcal{P}'_i — четырехмерный импульс частицы, образующейся в результате реакции. Тепловой эффект реакции Q является релятивистски инвариантной величиной:

$$Q = (m_1 + m_2 - \Sigma m'_i) c^2. \quad (1.29)$$

Возможны два случая: $Q > 0$ (экзотермическая реакция) — происходит выделение кинетической энергии в результате уменьшения энергии покоя частиц; $Q < 0$ (эндотермическая реакция) — энергия покоя частиц возрастает за счет уменьшения кинетической энергии.

Эндотермическая реакция возможна, если кинетическая энергия сталкивающихся частиц больше некоторого порогового значения. Пороговое значение энергии налетающей частицы в л. с. к. E_1^L (при фиксированном значении импульса второй частицы p_2^L) можно найти из условия, что все вторичные частицы в с. ц. и. покоятся, т. е. $E_{\text{порог}} = \Sigma m'_i c^2$, а кроме того кинетическая энергия сталкивающихся частиц в с. ц. и. должна совпадать с пороговым значением $|Q|$: $E_{\text{порог}} - (m_1 + m_2) c^2 = |Q|$. Возведем обе части равенства (1.28) в квадрат и используем свойства инвариантности квадрата четырехмерного импульса, получим

$$(\mathcal{P}_{1\text{порог}}^L - \mathcal{P}_2^L)^2 = (\Sigma m'_i)^2 c^2.$$

Откуда находим

$$E_{1\text{порог}}^L = \frac{1}{2 \left(m_2^2 + \frac{(p_2^L)^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right)} \left\{ [(\Sigma m'_i)^2 - m_1^2 - m_2^2] E_2^L + \right. \\ \left. + cp_2^L \cos \vartheta \sqrt{[(\Sigma m'_i)^2 - m_1^2 - m_2^2] - 4m_1^2 \left(m_2^2 + \frac{(p_2^L)^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right)} \right\}, \quad (1.30)$$

где ϑ — угол между векторами p_1^L и p_2^L . В частном случае, если вторая частица покоится ($p_2^L = 0$), то

$$E_{1\text{порог}}^L = \frac{(\Sigma m'_i)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} c^2.$$

Отсюда нетрудно найти пороговую кинетическую энергию налетающей частицы:

$$\tilde{E}_1^L \text{ порог} = \frac{2(m_1 + m_2)c^2 - |Q|}{2m_2 c^2} |Q|. \quad (1.31)$$

В нерелятивистском случае эта формула переходит в (1.13).

При рассмотрении реакций бинарного типа, когда в начальном и конечном состояниях имеется по две частицы, удобно пользоваться *инвариантными переменными*. Если отвлечься от внутренних степеней свободы частиц (спина, изотопического спина и т. д.), то состояния полностью определяются заданием четырехмерных импульсов частиц. Очевидно, вероятность перехода зависит от этих импульсов, причем они должны входить в релятивистски инвариантных комбинациях, поскольку сама вероятность перехода — релятивистски инвариантная величина¹.

Запишем закон сохранения энергии и импульса в виде равенства между четырехмерными импульсами начальных и конечных частиц

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2. \quad (1.32)$$

Нетрудно убедиться, что из четырех четырехмерных импульсов \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}'_1 и \mathcal{P}'_2 можно составить только две независимые инвариантные величины, от которых может зависеть вероятность перехода. Действительно, в силу закона сохранения (1.32) только три (из четырех) четырехмерных импульса независимы. Из них можно составить шесть релятивистских инвариантов — три квадрата и три скалярных произведения — из различных независимых четырехмерных импульсов. Но три квадрата четырехмерных импульсов представляют собой просто квадраты масс участвующих в реакции частиц, которые являются заданными параметрами и не могут рассматриваться в качестве независимых переменных. Оставшиеся три инварианта связаны одним соотношением, которое является следствием того, что квадрат четвертого четырехмерного импульса также есть квадрат массы частицы. Таким образом, двухчастичная реакция полностью описывается двумя независимыми инвариантными переменными.

В общем случае, когда в результате реакции образуется число частиц $n > 2$, имеется $(n + 2)$ четырехмерных импульса, связанных законом сохранения. Из $(n + 1)$ независимых четырехмерных импульсов можно составить $\frac{1}{2}(n + 1)n$ скалярных произведений (за исключением квадратов), которые связаны одним добавочным соотношением. В результате число независимых инвариантных переменных оказывается равным

$$\frac{1}{2}(n + 1)n - 1 = \frac{1}{2}(n + 2)(n - 1). \quad (1.33)$$

В случае двухчастичной реакции в качестве независимых переменных можно выбрать две, любые независимые величины, например энергию падающей частицы в л. с. к., в которой ядро мишени покоит-

¹ См. также [17].

ся, и угол вылета одного из продуктов реакции (например, частицы b). Эти величины чаще всего непосредственно измеряются в эксперименте. Однако использование их в теоретических рассуждениях не всегда удобно, поскольку эти величины не являются релятивистскими инвариантами. Обычно в качестве независимых кинематических переменных выбирают следующие инвариантные величины:

$$s \equiv (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2 = (\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2)^2; \quad (1.34)$$

$$t \equiv (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}'_1)^2 = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}'_2)^2. \quad (1.35)$$

Величина s имеет простой физический смысл. Она равна квадрату полной энергии сталкивающихся частиц в с. ц. и. Действительно, так как в с. ц. и. $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, то $s = \frac{1}{c^2} (E_1 + E_2)^2$. Величина t содержит информацию об угле вылета. Так, в случае упругого рассеяния энергия относительного движения частиц не изменяется ($E_1 = E'_1$) и t равно квадрату передаваемого при столкновении трехмерного импульса с обратным знаком: $t = -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2$. Для достижения большей симметрии часто вводят также третью инвариантную величину

$$u \equiv (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}'_2)^2 = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}'_1)^2. \quad (1.36)$$

Величины s , t и u обычно называют *переменными Мандельштама*. Естественно, из них только две являются независимыми. С помощью закона сохранения (1.32) нетрудно показать, что эти переменные связаны соотношением

$$s + t + u = h \equiv (m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2) c^2. \quad (1.37)$$

Выразим s , t и u через энергии и импульсы сталкивающихся или разлетающихся частиц. В с. ц. и. четырехмерные импульсы частиц задаются временными и пространственными составляющими:

$$\mathcal{P}_1 = \left(\frac{1}{c} E_1, \mathbf{p}_1 \right); \quad \mathcal{P}'_1 = \left(\frac{1}{c} E'_1, \mathbf{p}'_1 \right);$$

$$\mathcal{P}_2 = \left(\frac{1}{c} E_2, \mathbf{p}_2 \right); \quad \mathcal{P}'_2 = \left(\frac{1}{c} E'_2, \mathbf{p}'_2 \right).$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{c^2} E^2; \quad E = E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2; \\ t &= \frac{1}{2} \left\{ h - s + 4\mathbf{p}\mathbf{p}' - \frac{1}{s} (m_1^2 - m_2^2) (m_1'^2 - m_2'^2) c^4 \right\}; \\ u &= \frac{1}{2} \left\{ h - s - 4\mathbf{p}\mathbf{p}' + \frac{1}{s} (m_1^2 - m_2^2) (m_1'^2 - m_2'^2) c^4 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

В нерелятивистском случае обычно под энергией частицы подразумевают кинетическую энергию. Поэтому, исключая из s , t и u соответственно $(m_1 + m_2)^2 c^2$, $(m_1 - m_1')^2 c^2$ и $(m_1 - m_2')^2 c^2$, получаем следующие нерелятивистские выражения для инвариантов:

$$\left. \begin{aligned} s &\rightarrow 2(m_1 + m_2) E; \\ t &\rightarrow -q^2 - 2 \frac{m_1 - m_1'}{m_1 + m_2} [(m_1 - m_1') E + m_2' Q]; \\ u &\rightarrow -p^2 - 2 \frac{m_2 - m_2'}{m_1 + m_2} [(m_2 - m_2') E + m_1' Q], \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

где введены обозначения $q = p_1 - p_1'$ и $p = p_1 + p_1'$. В нерелятивистском случае инварианты s , t и u связаны соотношением $s + t + u = -2m_1' Q$.

§ 1.2. Матрица столкновений (центральное взаимодействие)

Асимптотика волновой функции и матрица столкновений. Различные процессы, возникающие при столкновении двух каких-либо частиц (например, частицы a и ядра A), полностью описываются волновой функцией Ψ_α , являющейся решением уравнения Шредингера

$$H\Psi_\alpha = E\Psi_\alpha \quad (1.40)$$

с граничными условиями, обеспечивающими наличие сходящейся волны во входном канале α и расходящихся волн во всех открытых каналах (E — полная энергия системы). Гамильтониан системы H можно представить в виде суммы операторов кинетической энергии H_0 и потенциалов взаимодействия V всех частиц (нуклонов), входящих в состав системы:

$$H = H_0 + V. \quad (1.41)$$

Нахождение волновой функции Ψ_α эквивалентно полному решению задачи многих тел.

Вместо прямого рассмотрения этой очень сложной задачи установим прежде всего некоторые закономерности ядерных процессов, являющиеся следствием общих физических законов. С этой целью для описания процессов рассеяния и реакций удобно ввести понятие так называемой *матрицы столкновений*, или S -матрицы. В случае столкновения двух частиц асимптотика волновой функции системы содержит плоскую волну, описывающую относительное движение сталкивающихся частиц, и совокупность расходящихся волн, описывающих рассеяние и различные реакции, которые соответствуют всем открытым каналам. В системе с одним открытым каналом возможно только упругое рассеяние. Интенсивность рассеяния определяется коэффициентом при расходящейся волне, который непосредственно выражается через фазу рассеяния. В более общем случае, когда открыто несколько каналов, для нахождения вероятностей протекания различных реакций необходимо знать коэффициенты при всех расходящихся волнах. Эти коэффициенты и образуют матрицу столкновений.

Ограничимся рассмотрением случая, когда при заданной энергии во всех возможных реакциях образуются только две частицы (все открытые выходные каналы являются двухчастичными). Кроме того, для простоты предположим, что: а) сталкивающиеся и разлетающиеся частицы не имеют спинов; б) продукты реакции разлетаются с нулевым орбитальным моментом относительного движения ($l = 0$); в) во всех каналах отсутствует дальнодействующее кулоновское взаимодействие между частицами.

Волновая функция системы однозначно определяется энергией, если открыт только один канал. Если же открыто несколько каналов, то энергия не определяет однозначно волновую функцию системы. Одной и той же энергии могут соответствовать несколько различных волновых функций. Пусть при заданной полной энергии E системы открыто N каналов. В качестве базисной системы независимых волновых функций выберем N функций Ψ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), различающихся наличием сходящейся волны в разных каналах. Каждая из функций Ψ_α описывает всевозможные процессы, обусловленные столкновением двух частиц (например, частицы a и ядра A) по определенному каналу α . В области конфигурационного пространства, соответствующей какому-либо открытому каналу β , волновую функцию Ψ_α можно представить в виде

$$\Psi_\alpha = \Psi_{\alpha\beta}(r_\beta) \chi_\beta, \quad (1.42)$$

где χ_β — внутренняя функция канала β (представляющая собой произведение внутренних волновых функций частицы b и ядра B) и $\Psi_{\alpha\beta}(r_\beta)$ — функция относительного движения в канале β (r_β — относительное расстояние между частицей b и ядром B). Если $\alpha = \beta$, то функция относительного движения $\Psi_{\alpha\alpha}(r_\alpha)$ содержит сходящуюся и расходящуюся волны. При $r_\alpha \geq R_\alpha$ (R_α — радиус взаимодействия) эта функция имеет вид

$$\Psi_{\alpha\alpha}(r_\alpha) = \frac{i}{2k_\alpha} \frac{\exp(-ik_\alpha r_\alpha) - S_{\alpha\alpha} \exp(ik_\alpha r_\alpha)}{r_\alpha}, \quad (1.43)$$

где $k_\alpha = \sqrt{2\mu_\alpha E_\alpha}/\hbar$ ($E_\alpha = E - E_a - E_A$; E_a и E_A — внутренние энергии частицы a и ядра A). Если же $\alpha \neq \beta$, то функция $\Psi_{\alpha\beta}(r_\beta)$ содержит только расходящуюся волну. При $r_\beta \geq R_\beta$ она имеет вид

$$\Psi_{\alpha\beta}(r_\beta) = -\frac{i}{2\sqrt{k_\alpha k_\beta}} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} S_{\beta\alpha} \frac{\exp(ik_\beta r_\beta)}{r_\beta}, \quad (1.44)$$

где $k_\beta = \sqrt{2\mu_\beta E_\beta}/\hbar$ ($E_\beta = E - E_b - E_B$; E_b и E_B — внутренние энергии частицы b и ядра B). Нормировочные постоянные в (1.43) и (1.44) выбраны так, чтобы падающая плоская волна характеризовалась единичной амплитудой, а коэффициент при расходящейся волне совпадал с амплитудой реакции. N постоянных $S_{\beta\alpha}$ ($\beta = 1, 2, \dots, N$) полностью определяют асимптотическое поведение волновой функции Ψ_α . Для описания асимптотик всех N независимых (при заданной энергии E) функций Ψ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) необходимо задать N^2 постоянных

$S_{\beta\alpha}$. Величины $S_{\beta\alpha}$ образуют N -рядную квадратную матрицу, называемую матрицей столкновений или просто S -матрицей¹.

Приведенное определение матрицы столкновений нетрудно обобщить на случай реакций с произвольным значением орбитального момента l и реакций с участием заряженных частиц. Пусть система во входном канале α характеризуется вектором относительного движения \mathbf{k}_α . Волновая функция Ψ_α в области конфигурационного пространства, соответствующей открытому каналу β , по-прежнему представляется в виде произведения функции относительного движения на внутреннюю функцию канала:

$$\Psi_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \chi_\beta, \quad (1.45)$$

однако в отличие от ранее рассмотренного случая функция относительного движения зависит не только от относительного расстояния r_β , но и от угла между направлением относительного движения во входном канале $\mathbf{n} = \mathbf{k}_\alpha/k_\alpha$ и направлением вектора относительного расстояния в выходном канале $\mathbf{n}' = \mathbf{r}_\beta/r_\beta$ (\mathbf{r}_β — вектор относительного расстояния). При больших значениях r_β вектор \mathbf{n}' характеризует направление относительного движения в выходном канале. Выберем нормировку функции (1.45) таким образом, чтобы во входном канале падающей плоской волне соответствовала единичная амплитуда, т. е.

$$\Psi_\alpha^0 \equiv \psi_{\alpha\alpha}^0(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) \chi_\alpha = \exp(i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) \chi_\alpha. \quad (1.46)$$

Функция относительного движения во входном канале $\psi_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$ содержит кроме падающей плоской волны также рассеянную волну.

Разложим падающую плоскую волну по парциальным волнам:

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}'), \quad (1.47)$$

где $j_l(x)$ — сферическая функция Бесселя. Отдельные слагаемые в (1.47) соответствуют состояниям с определенными значениями орбитального момента. Действительно, сферическая функция $Y_{lm}(\mathbf{n}')$, зависящая от углов вектора $\mathbf{n}' = \mathbf{r}/r$, является собственной функцией операторов квадрата и проекции орбитального момента системы. Правда, в координатном представлении сферическая функция $Y_{lm}(\mathbf{n}')$ не обладает нужными трансформационными свойствами при обращении времени. Волновая функция для состояния с определенным моментом при обращении времени должна преобразовываться по закону²

$$\chi_{lm}^* = (-1)^{-(l-m)} \chi_{l-m}. \quad (1.48)$$

Поэтому в координатном представлении под волновой функцией для состояния с определенным орбитальным моментом следует подразумевать функцию

$$\chi_{lm}(\mathbf{n}') - i^l Y_{lm}(\mathbf{n}'),$$

¹ Понятие S -матрицы было введено независимо Дж. Уилером [18] и В. Гейзенбергом [19].

² См. более подробно в [2].

которая содержит добавочный фазовый множитель i^l и преобразуется при обращении времени согласно (1.48). В импульсном представлении собственная функция квадрата и проекции момента $Y_{lm}(\mathbf{n}_k)$ преобразуются при обращении времени в соответствии с (1.48):

$$Y_{lm}^*(\mathbf{n}_k) = Y_{lm}^*(-\mathbf{n}_k) = (-1)^{-(l-m)} Y_{l-m}(\mathbf{n}_k).$$

Таким образом, (1.47) действительно представляет собой разложение по состояниям с определенными значениями орбитального момента системы. Асимптотика радиальной функции для состояния с определенным орбитальным моментом представляется на больших расстояниях в виде суммы сходящейся и расходящейся волн:

$$j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2kr} \left\{ \exp \left[-i \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] - \exp \left[i \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (1.49)$$

По аналогии с (1.47) разложим теперь волновую функцию относительного движения $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)$ по парциальным состояниям:

$$\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) = \sum_{lm} \psi_{\alpha\beta}^l(r_\beta) i^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}'). \quad (1.50)$$

Согласно (1.40) и (1.41) радиальная функция $\psi_{\alpha\beta}^l(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - v_{\beta\alpha}^l(r) + k_\beta^2 \right\} \psi_{\alpha\beta}^l(r) = 0, \quad (1.51)$$

где $v_{\beta\alpha}^l(r) = \frac{2\mu_\beta}{\hbar^2} V_{\beta\alpha}^l(r)$ и $V_{\beta\alpha}^l(r)$ — матричный элемент от оператора энергии взаимодействия. Очевидно, падающей волне соответствует радиальная функция

$$(\psi_{\alpha\alpha}^l(r))^0 = 4\pi j_l(kr).$$

Асимптотика волновой функции $\psi_{\alpha\beta}^l(r)$, описывающей относительное движение с орбитальным моментом l , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}^l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & \frac{2\pi i}{V k_\alpha k_\beta} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} \frac{1}{r} \times \\ & \times \left\{ \delta_{\alpha\beta} \exp \left[-i \left(k_\alpha r - \frac{l\pi}{2} \right) \right] - S_{\beta\alpha}^l \exp \left[i \left(k_\beta r - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \right\}, \quad (1.52) \end{aligned}$$

где $S_{\beta\alpha}^l$ — матрица столкновений. Сопоставляя (1.43) и (1.44) с (1.52), нетрудно убедиться, что функция $\psi_{\alpha\beta}^l(r)$ при $l=0$ отличается от функции $\psi_{\alpha\beta}(r)$ только нормировочным множителем

$$\psi_{\alpha\beta}^{l=0}(r) = 4\pi \psi_{\alpha\beta}(r).$$

Выделяя из (1.45) падающую волну (1.46), получаем следующую асимптотику в области конфигурационного пространства, соответствующей открытому каналу β :

$$\Psi_\alpha' \equiv \Psi_\alpha - \exp(ik_\alpha r) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \beta} f_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta) \frac{\exp(ik_\beta r)}{r} \chi_\beta, \quad (1.53)$$

где $f_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta)$ — амплитуда рассеяния или реакции:

$$f_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta) = \frac{2\pi i}{\sqrt{k_\alpha k_\beta}} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} \sum_{lm} (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}') \quad (1.54)$$

($\mathbf{k}_\beta = \mathbf{n}' k_\beta$ — вектор относительного движения в выходном канале). Амплитуда (1.54) зависит от угла между векторами \mathbf{k}_α и \mathbf{k}_β . В дальнейшем будем часто пользоваться другим обозначением для амплитуды:

$$f_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta) \equiv f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vartheta). \quad (1.55)$$

Суммируя в (1.54) по магнитному квантовому числу, для амплитуды находим более простое выражение:

$$f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vartheta) = \frac{i}{2\sqrt{k_\alpha k_\beta}} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} \sum_l (2l+1) (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l) P_l(\cos \vartheta). \quad (1.56)$$

Если частицы заряжены, то асимптотика волновой функции относительного движения с орбитальным моментом l определяется выражением

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}^l(r) \rightarrow & \frac{2\pi i}{\sqrt{k_\alpha k_\beta}} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} \frac{1}{r} \times \\ & \times \left\{ \delta_{\alpha\beta} \exp \left[-i \left(k_\alpha r - \xi_\alpha \ln 2k_\alpha r - \frac{l\pi}{2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - S_{\beta\alpha}^l \exp \left[i \left(k_\beta r - \xi_\beta \ln 2k_\beta r - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \right\}, \quad (1.57) \end{aligned}$$

где ξ_α и ξ_β — кулоновские параметры для каналов α и β :

$$\xi_\alpha = \frac{z_a Z_A e^2}{\hbar v_\alpha}; \quad \xi_\beta = \frac{z_b Z_B e^2}{\hbar v_\beta}; \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{\mu_\alpha}}; \quad v_\beta = \sqrt{\frac{2E_\beta}{\mu_\beta}}.$$

Здесь z_a и z_b — заряды частиц, Z_A и Z_B — заряды ядер. Матрица столкновений в (1.57) учитывает кроме ядерного также и кулоновское взаимодействие.

Обычно удобнее в определение канала включать также значение орбитального момента системы, т. е. канал характеризовать набором квантовых чисел $\tilde{\beta} \equiv \beta, l$ и m , при этом под внутренней функцией канала следует подразумевать

$$\chi_{\tilde{\beta}} = i^l Y_{lm}(\mathbf{n}') \chi_\beta. \quad (1.58)$$

Вместо функций Ψ введем новые функции (парциальные компоненты) $\Psi_{\tilde{\alpha}}$, определяемые соотношением

$$\Psi_{\tilde{\alpha}} = \int d\mathbf{o}_n \Psi_\alpha Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (1.59)$$

Легко проверить, что во входном канале функция $\Psi_{\tilde{\alpha}}$ имеет вид

$$\Psi_{\tilde{\alpha}} = \psi_{\alpha\alpha}^l(r_\alpha) \chi_{\tilde{\alpha}},$$

где

$$\chi_{\alpha}^{\sim} = i^l Y_{lm}(n') \chi_{\alpha}.$$

В соответствии с формулами (1.45) и (1.50) волновую функцию Ψ_{α}^{\sim} в области какого-либо открытого канала $\tilde{\beta}$ представим в виде

$$\Psi_{\alpha}^{\sim} = \Psi_{\alpha\beta}^l(r_{\beta}) \chi_{\tilde{\beta}}. \quad (1.60)$$

В дальнейшем будем включать значение орбитального момента в определение канала, при этом значок тильда будем обычно опускать.

Сохранение величин l и m , а следовательно, и диагональность S -матрицы в представлении орбитального момента обусловлены допущением о центральном характере взаимодействия. Действительно, в случае центрального взаимодействия операторы квадрата и проекции орбитального момента коммутируют с гамильтонианом, а следовательно, и с оператором столкновений, сопоставляемым S -матрице. Так как коммутирующие операторы одновременно приводятся к диагональному виду, то S -матрица в этом случае в представлении орбитального момента диагональна. Элементы S -матрицы не зависят от проекции орбитального момента, так как проекция изменяется при поворотах системы координат, оставляющих неизменным гамильтониан системы.

При наличии спинов у частиц или ядер квантовые числа каналов α и β будут включать также значения проекций спинов или же значения суммарного спина канала и его проекцию. Если взаимодействие не центральное, то каналы следует классифицировать по значениям полного момента.

Изложенный способ введения матрицы столкновений пригоден для описания процессов с участием двух частиц во входном и выходном каналах. Если же открыты каналы реакций с образованием трех или большего числа частиц, то в силу более сложного асимптотического поведения волновых функций указанный способ необходимо существенно образом модифицировать.

Унитарность матрицы столкновений. Свойства матрицы столкновений полностью определяются характером взаимодействия в системе, т. е. ее гамильтонианом. Законы сохранения, связанные с инвариантностью гамильтониана системы относительно каких-либо преобразований, накладывают жесткие ограничения на S -матрицу. Рассмотрим прежде всего следствия, вытекающие из предположения об эрмитовости оператора взаимодействия в системе.

Запишем уравнение Шредингера для волновых функций, соответствующих одной и той же энергии E , но различным входным каналам α и β :

$$H\Psi_{\alpha} = E\Psi_{\alpha}; \quad H\Psi_{\beta} = E\Psi_{\beta}, \quad (1.61)$$

где H — полный гамильтониан системы. Умножим первое из этих уравнений на Ψ_{β}^* , а уравнение, комплексно сопряженное второму, — на Ψ_{α} , вычтем из первого соотношения второе и проинтегрируем раз-

ность по некоторому объему V полного конфигурационного пространства всей системы:

$$\int_V dV \{ \Psi_\beta^* H \Psi_\alpha - (H \Psi_\beta)^* \Psi_\alpha \} = 0.$$

Представляя полный гамильтониан согласно (1.41), перепишем полученное соотношение в виде

$$\int_V dV \{ (H_0 \Psi_\beta)^* \Psi_\alpha - \Psi_\beta^* H_0 \Psi_\alpha \} = I_{\alpha\beta}, \quad (1.62)$$

где

$$I_{\alpha\beta} \equiv \int_V dV \{ \Psi_\beta^* V \Psi_\alpha - (V \Psi_\beta)^* \Psi_\alpha \}.$$

Если оператор потенциальной энергии эрмитов $V^+ = V$, то $I_{\alpha\beta}$ строго обращается в нуль и соотношение (1.62) принимает вид

$$\int_V dV \{ (H_0 \Psi_\beta)^* \Psi_\alpha - \Psi_\beta^* H_0 \Psi_\alpha \} = 0. \quad (1.63)$$

Так как ядерное взаимодействие между нуклонами характеризуется конечным радиусом действия, то все частицы системы взаимодействуют друг с другом только в ограниченной области конфигурационного пространства. Будем называть эту область внутренней.

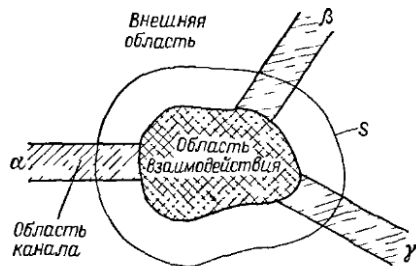


Рис. 1.3. Схема, иллюстрирующая деление конфигурационного пространства системы на внутреннюю область (область взаимодействия) и область открытых каналов

Остальную часть конфигурационного пространства можно разделить на области каналов, где взаимодействие проявляется лишь частично — взаимодействуют только частицы внутри разлетающихся ядер, и внешнюю область, в которой взаимодействие полностью отсутствует (все нуклоны системы находятся на достаточно больших взаимных расстояниях, превышающих радиус действия ядерных сил).

Выберем для интегрирования в (1.63) такую область V , которая включает в себя всю внутреннюю область. При этом поверхность S , ограничивающая V , проходит снаружи от внутренней области, пересекая области каналов и внешнюю область (рис. 1.3).

Учтем явный вид оператора кинетической энергии системы

$$H_0 = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i \equiv -\Delta, \quad (1.64)$$

где Δ_i — оператор Лапласа отдельной частицы в трехмерном пространстве (m_i — масса частицы), а Δ — оператор Лапласа в конфигурационном пространстве всей системы, и перейдем в (1.63) с помо-

щью теоремы Грина от интегрирования по объему V к интегрированию по ограничивающей его гиперповерхности S :

$$\int_S dS \{ \Psi_\alpha \nabla \Psi_\beta^* - (\nabla \Psi_\alpha) \Psi_\beta^* \} = 0 \quad (1.65)$$

(вектор dS направлен по нормали к гиперповерхности).

При нашем рассмотрении, ограничиваемемся только реакциями с образованием двух частиц, волновые функции Ψ_α и Ψ_β на гиперповерхности S во внешней области обращаются в нуль. Следовательно, интегрирование в (1.65) фактически проводится только по участкам пересечения гиперповерхностью S областей каналов.

Выберем гиперповерхность S на достаточном удалении от внутренней области, в этом случае волновые функции Ψ_α и Ψ_β в области каналов имеют вид

$$\Psi_\alpha = \sum_\gamma \psi_{\alpha\gamma}^l(r_\gamma) \chi_\gamma, \quad \Psi_\beta = \sum_{\gamma'} \psi_{\beta\gamma'}^l(r_{\gamma'}) \chi_{\gamma'}. \quad (1.66)$$

Радиальные функции относительного движения $\psi_{\alpha\gamma}^l$ и $\psi_{\beta\gamma'}^l$ с относительным моментом $l = 0$ определяются выражениями (1.43) и (1.44). [При большом удалении гиперповерхности S от внутренней области для функций относительного движения с произвольным моментом l можно воспользоваться их асимптотическими выражениями (1.52) или (1.57).]

Легко видеть, что каналовые волновые функции χ_γ , описывающие внутреннее состояние разлетающихся частиц, взаимно ортогональны:

$$\int_{V_\gamma} dV_\gamma \chi_\gamma^* \chi_{\gamma'} = \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (1.67)$$

Интегрирование в (1.67) проводится по всем переменным конфигурационного пространства, за исключением относительного расстояния r_γ . Соотношение (1.67) очевидно, если функции χ_γ и $\chi_{\gamma'}$ отвечают одному способу разделения системы на две части при произвольных их внутренних состояниях. Это соотношение справедливо и в общем случае, когда функции χ_γ и $\chi_{\gamma'}$ отвечают различным способам разделения системы, так как в области каналов эти функции не перекрываются: $\chi_\gamma^* \chi_{\gamma'} = |\chi_\gamma|^2 \delta_{\gamma\gamma'}$.

Замечая, что в области канала элемент площади гиперсферической поверхности $dS = r_\gamma^2 d\theta_\gamma dV_\gamma$ ($d\theta_\gamma$ — элемент телесного угла вдоль направления вектора r_γ), подставим в формулу волновые функции Ψ_α и Ψ_β в виде (1.66) и выполним интегрирование по $d\theta_\gamma dV_\gamma$, используя свойство ортогональности каналových волновых функций (1.67):

$$\sum_\gamma \frac{\hbar^2 r_\gamma^2}{2\mu_\gamma} \left\{ \psi_{\alpha\gamma}^l(r_\gamma) \frac{d\psi_{\beta\gamma}^{l*}(r_\gamma)}{dr_\gamma} - \frac{d\psi_{\alpha\gamma}^l(r_\gamma)}{dr_\gamma} \psi_{\beta\gamma}^{l*}(r_\gamma) \right\} = 0. \quad (1.68)$$

Выбирая r_γ достаточно большими (что соответствует значительному удалению гиперповерхности S от внутренней области) и подставляя в (1.68) асимптотические выражения для радиальных функций относи-

тельного движения (1.52), находим, что соотношение (1.68) выполняется при условии

$$\sum_{\gamma} S'_{\gamma\beta} S'_{\gamma\alpha} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.69)$$

которое в матричном обозначении можно переписать в виде

$$S^+ S = 1. \quad (1.70)$$

Условие (1.70) означает, что матрица столкновений унитарна (эрмитовски сопряженная матрица совпадает с обратной: $S^+ = S^{-1}$). Напомним, что *унитарность матрицы столкновений* является прямым следствием эрмитовости оператора взаимодействия.

Унитарность S -матрицы имеет простой физический смысл. Условие (1.70) выражает закон сохранения вероятности в системе и эквивалентно требованию равенства суммарных потоков вероятности, связанных со сходящимися и расходящимися волнами для произвольной суперпозиции функций $\sum_{\alpha} c_{\alpha} \Psi_{\alpha}$. Унитарность S -матрицы приводит к уменьшению числа независимых параметров, описывающих реакции. В общем случае N -рядная квадратная матрица содержит $2N^2$ вещественных параметров. Условие унитарности (1.69), представляющее собой $\frac{1}{2} N(N+1)$ соотношений, сокращает число независимых вещественных параметров до $2N^2 - \frac{1}{2} N(N+1) = \frac{1}{2} N(3N-1)$.

Сечения. Матрица столкновений описывает связь между различными каналами в системе. Если известны элементы матрицы столкновений, то можно рассчитать вероятности различных процессов при произвольном входном канале (или при их суперпозиции).

Сечение какого-либо процесса $\sigma_{\alpha\beta}$ определяется как отношение вероятности перехода за единицу времени $\omega_{\alpha\rightarrow\beta}$ к плотности потока падающих частиц j_{α}^0 :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\rightarrow\beta} / j_{\alpha}^0. \quad (1.71)$$

Рассматривая реакцию с образованием частицы b и ядра B в конечном канале β и интересуясь вылетом частицы b внутрь элемента телесного угла do вдоль заданного направления $\mathbf{n}' = \mathbf{r}_{\beta}/r_{\beta}$, вероятность перехода за единицу времени $d\omega_{\alpha\rightarrow\beta}$ нетрудно найти, определив поток, связанный с расходящейся волной Ψ'_{α} , через участок поверхности сферы большого радиуса, ограниченный элементом телесного угла:

$$d\omega_{\alpha\rightarrow\beta} = j_{\beta} ds_{\beta}, \quad (1.72)$$

где $ds_{\beta} = r_{\beta}^2 do$ и

$$j_{\beta} = \frac{i\hbar}{2\mu_{\beta}} \left(\Psi'_{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi'_{\alpha\beta}^*}{\partial r_{\beta}} - \frac{\partial \Psi'_{\alpha\beta}}{\partial r_{\beta}} \Psi'_{\alpha\beta}^* \right), \quad r_{\beta} \rightarrow \infty. \quad (1.73)$$

Воспользуемся формулой (1.53), определяющей асимптотику рассеянной волны в выходном канале. (В случае упругого рассеяния $\alpha = \beta$ функция $\Psi'_{\alpha\alpha}$ отличается от полной функции $\Psi_{\alpha\alpha}$ на падающую плос-

кую волну $\psi_{\alpha\alpha}^0 = \exp ik_{\alpha}r (\psi'_{\alpha\beta} \equiv \psi_{\alpha\alpha} - \psi_{\alpha\alpha}^0)$, в случае реакций $\alpha \neq \beta$ в выходном канале присутствует только рассеянная волна $\psi'_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}$. В результате для плотности потока разлетающихся частиц j_{β} находим выражение

$$j_{\beta} = \frac{\hbar k_{\beta}}{\mu_{\beta}} |f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vartheta)|^2 \frac{1}{r_{\beta}^2},$$

где $f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vartheta)$ — амплитуда процесса $\alpha \rightarrow \beta$, определяемая формулой (1.56). Так как плотность потока падающих частиц j_{α}^0 (при выбранной нормировке волновых функций ψ^0) равна $\hbar k_{\alpha}/\mu_{\alpha}$, то для *дифференциального сечения* (отнесенного к элементу телесного угла do) *процесса* $\alpha \rightarrow \beta$ получим следующую общую формулу:

$$d\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) do; \quad \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) = \frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}} \frac{k_{\beta}}{k_{\alpha}} |f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vartheta)|^2. \quad (1.74)$$

Интегральное сечение процесса $\alpha \rightarrow \beta$ найдем, выполнив интегрирование по полному телесному углу:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) do. \quad (1.75)$$

Дифференциальное и интегральное сечения непосредственно выражаются через элементы матрицы столкновений. Воспользовавшись формулой (1.56) для амплитуды $f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vartheta)$, дифференциальное сечение процесса $\alpha \rightarrow \beta$ представим в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) = \frac{1}{4k_{\alpha}^2} \left| \sum_l (2l+1) (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l) P_l(\cos \vartheta) \right|^2. \quad (1.76)$$

Учитывая ортогональность полиномов Лежандра и выполняя интегрирование по полному телесному углу, для интегрального сечения процесса $\alpha \rightarrow \beta$ получаем следующую формулу

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) |\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l|^2. \quad (1.77)$$

При $\alpha = \beta$ эта формула описывает упругое рассеяние. Согласно (1.77) интегральное *сечение упругого рассеяния* σ_e выражается через диагональные элементы матрицы столкновений $S_{\alpha\alpha}^l$:

$$\sigma_e \equiv \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_{\alpha\alpha}^l|^2. \quad (1.78)$$

Интегральное сечение всех неупругих процессов или *сечение реакций* σ_r получим, просуммировав выражение для $\sigma_{\alpha\beta}$ по всем конечным каналам β , отличным от входного α :

$$\sigma_r \equiv \sum_{\beta \neq \alpha} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) \sum_{\beta \neq \alpha} |S_{\beta\alpha}^l|^2. \quad (1.79)$$

Из условия унитарности (1.69) следует

$$|S_{\alpha\alpha}^l|^2 + \sum_{\beta \neq \alpha} |S_{\beta\alpha}^l|^2 = 1. \quad (1.80)$$

Поэтому сечение реакций σ_r , так же как и сечение упругого рассеяния σ_e , можно выразить только через диагональные элементы матрицы столкновений:

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_{\alpha\alpha}^l|^2). \quad (1.81)$$

Согласно (1.78) и (1.81) полные сечения упругого рассеяния σ_e и реакций σ_r представляются в виде сумм парциальных сечений $\sigma_e^{(l)}$ и $\sigma_r^{(l)}$, описывающих соответственно упругое рассеяние и реакции в состоянии с определенным моментом l :

$$\sigma_e = \sum_l \sigma_e^{(l)}; \quad \sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} (2l+1) |1 - S_{\alpha\alpha}^l|^2; \quad (1.82)$$

$$\sigma_r = \sum_l \sigma_r^{(l)}; \quad \sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} (2l+1) (1 - |S_{\alpha\alpha}^l|^2). \quad (1.83)$$

Если в системе возможно только упругое рассеяние, то S -матрица диагональна, т. е.

$$S_{\beta\alpha}^l = S_{\alpha\alpha}^l \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.84)$$

Используя условие унитарности (1.80), находим $|S_{\alpha\alpha}^l| = 1$, т. е.

$$S_{\alpha\alpha}^l = \exp [2i\delta_l(E_\alpha)], \quad (1.85)$$

где $\delta_l(E_\alpha)$ — вещественная функция энергии E_α , называемая фазой рассеяния. В этом случае сечение реакций (1.81) обращается в нуль, а сечение упругого рассеяния непосредственно выражается через фазы рассеяния

$$\sigma_e = \sum_l \sigma_e^{(l)}; \quad \sigma_e^{(l)} = \frac{4\pi}{k_\alpha^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (1.86)$$

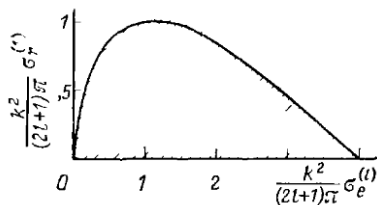
Если в системе возможны неупругие переходы, то $|S_{\alpha\alpha}^l| < 1$. В этом случае сечение реакций (1.81) отлично от нуля. Заметим, что при наличии неупругих переходов всегда имеет место упругое рассеяние, так как при $|S_{\alpha\alpha}^l| < 1$ сечение (1.78) отлично от нуля.

Условие унитарности (1.80) накладывает ограничения на допустимые значения парциальных сечений упругого рассеяния $\sigma_e^{(l)}$ и реакций $\sigma_r^{(l)}$. На рис. 1.4 представлена область допустимых значений $\sigma_e^{(l)}$ и $\sigma_r^{(l)}$. Верхняя граница области определяется соотношением

$$\sigma_r^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{k_\alpha^2} (2l+1) \sigma_e^{(l)} - \sigma_e^{(l)}},$$

следующим из (1.82) и (1.83) при $\arg S_{\alpha\alpha}^l = 0$. Значения вне заштрихованной области невозможны.

Рис. 1.4. Область допустимых значений парциальных сечений $\sigma_e^{(l)}$ и $\sigma_r^{(l)}$



В заключение приведем более детальные формулы для дифференциальных сечений рассеяния и реакций. Используя теорему сложения для полиномов Лежандра

$$P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) = \sum_L (l0l'0/L0)^2 P_L(\cos \vartheta),$$

где $(l0l'0/L0)$ — коэффициент Клебша — Гордана, дифференциальное сечение процесса (1.74) можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) = \frac{1}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} B^{(L)}(\alpha, \beta) P_L(\cos \vartheta), \quad (1.87)$$

где коэффициенты $B^{(L)}(\alpha, \beta)$ выражаются через матрицу столкновений

$$B^{(L)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=|l-L|}^{l+L} (2l+1)(2l'+1)(l0l'0/L0)^2 \times \\ \times (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l)^* (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^{l'}). \quad (1.88)$$

Коэффициент $(l0l'0/L0)$ обращается в нуль, если $l+l'+L$ равно нечетному числу. Поэтому суммирование в (1.88) ограничено условием: $l+l'+L$ — четное число. В случае реакций $\alpha \neq \beta$ выражение для коэффициентов $B^{(L)}(\alpha, \beta)$ несколько упрощается:

$$B^{(L)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=|l-L|}^{l+L} (2l+1)(2l'+1) \times \\ \times (l0l'0/L0)^2 S_{\beta\alpha}^{l*} S_{\beta\alpha}^{l'}. \quad (1.89)$$

Если открыт только упругий канал, то, выражая диагональный элемент S -матрицы через фазу рассеяния δ_l , для дифференциального сечения упругого рассеяния получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e(\vartheta) &= \frac{1}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} B^{(L)} P_L(\cos \vartheta); \\ B^{(L)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=|l-L|}^{l+L} (2l+1)(2l'+1)(l0l'0/L0)^2 \times \\ &\quad \times \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}). \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Формулы (1.87) и (1.88) устанавливают в общем виде угловую зависимость распределений частиц при упругом рассеянии и ядерных реакциях.

Предположим, что энергия сталкивающихся частиц мала, тогда в сумме (1.90) можно удержать только слагаемые, соответствующие значениям l и l' , равным 0 и 1. В этом случае

$$\sigma_e(\vartheta) = \frac{1}{k^2} \{B^{(0)} + B^{(1)} \cos \vartheta + B^{(2)} P_2(\cos \vartheta)\};$$

где

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= \sin^2 \delta_0; & B^{(1)} &= 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1); \\ B^{(2)} &= 9 \sin^2 \delta_1. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Коэффициенты $B^{(L)}$ подбирают так, чтобы описывалось экспериментальное угловое распределение при заданной энергии. Затем решают уравнения (1.91) и находят фазы рассеяния δ_0 и δ_1 . Очевидно, с увеличением энергии необходимо учитывать большее число парциальных волн. При этом сложнее становятся уравнения для нахождения фаз из экспериментальных данных, а сами решения допускают неоднозначность.

Теорема взаимности и детальное равновесие. Как уже отмечалось выше, свойства матрицы столкновений непосредственно связаны с трансформационными свойствами гамильтониана системы. Выясним, к каким следствиям приводит обратимость времени. Напомним, что обратимость времени имеет место, если система описывается гамильтонианом, не изменяющимся при изменении знака времени. Из инвариантности гамильтониана относительно обращения времени непосредственно следует также инвариантность оператора столкновений S .

При обращении времени преобразуются волновые функции и операторы различных величин [20]. Обращенная во времени волновая функция χ'_α с точностью до фазового множителя совпадает с функцией $\chi_{-\alpha}$, описывающей состояние, отличающееся от χ_α только знаками величин, которые изменяются при обращении времени:

$$\chi'_\alpha = \beta_{-\alpha} \chi_{-\alpha}, \quad (1.92)$$

где $\beta_{-\alpha}$ — фазовый множитель, $|\beta_{-\alpha}| = 1$. Хотя явная зависимость фазового множителя от величины, изменяющейся при обращении времени, определяется свойствами самой величины, однако для полного определения фазового множителя необходимо задание некоторых дополнительных условий. Например, фазовые множители для волновых функций, отвечающих определенным значениям квадрата и проекции момента, находят из требования, чтобы при обращении времени правила сложения моментов не изменялись. При таком выборе фазового множителя волновая функция для состояния с определенным моментом при обращении времени преобразуется по закону

$$\chi'_{jm} = (-1)^{-j+m} \chi_{j-m}. \quad (1.93)$$

Матричный элемент любого оператора между двумя какими-либо состояниями (например, χ_α и χ_β) равен матричному элементу от обращенного во времени оператора между обращенными во времени состояниями (χ'_α и χ'_β), поэтому

$$(\chi_\beta, S\chi_\alpha) = (\chi'_\alpha, S'\chi'_\beta), \quad (1.94)$$

где S' — обращенный во времени оператор столкновений. Так как оператор столкновений инвариантен относительно обращения времени, то в правой части (1.94) оператор S' можно заменить на S . Используя формулу для преобразования волновых функций при обращении времени, нетрудно получить следующее соотношение, называемое обычно теоремой или *условием взаимности*:

$$S_{\beta\alpha} = \beta^*_{-\alpha}\beta_{-\beta} S_{-\alpha, -\beta}. \quad (1.95)$$

Теорема взаимности устанавливает общую связь между матричными элементами матрицы столкновений для прямых ($\alpha \rightarrow \beta$) и обращенных во времени ($-\beta \rightarrow -\alpha$) переходов. Теорема взаимности является непосредственным следствием инвариантности матрицы столкновений относительно обращения времени.

Согласно (1.77) сечение неупругого перехода системы из состояния α в состояние β пропорционально квадрату модуля матричного элемента $S_{\beta\alpha}$. Поэтому, воспользовавшись условием взаимности (1.95), получим следующее соотношение, связывающее сечения прямого ($\alpha \rightarrow \beta$) и обращенного во времени ($-\beta \rightarrow -\alpha$) переходов:

$$k_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta} = k_\beta^2 \sigma_{-\beta, -\alpha}. \quad (1.96)$$

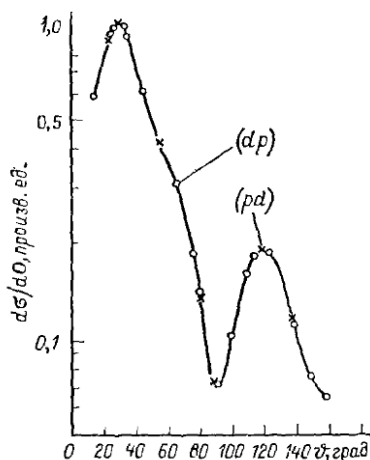
Заметим, что под обращенным во времени переходом ($-\beta \rightarrow -\alpha$) понимают переход из состояния $-\beta$ в состояние $-\alpha$, которые отличаются от конечного β и начального α состояний прямого перехода ($\alpha \rightarrow \beta$) знаками всех величин, изменяющихся при обращении времени.

Для примера рассмотрим какой-либо переход в системе, когда начальное и конечное состояния определяются заданием импульса относительного движения, спинов и проекций спинов частиц: $\alpha \equiv \mathbf{k}; s_1, \mu_1; s_2, \mu_2$ и $\beta \equiv \mathbf{k}'; s'_1, \mu'_1; s'_2, \mu'_2$. (При упругом рассеянии $k = k'$; $s_1 = s'_1$ и $s_2 = s'_2$; в общем случае какой-либо реакции $k \neq k'$; $s_1 \neq s'_1$; $s_2 \neq s'_2$). Если гамильтониан системы инвариантен относительно обращения времени, то условие взаимности для рассматриваемого и обращенного во времени переходов записывается в виде

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'; s'_1, \mu'_1; s'_2, \mu'_2 | S | \mathbf{k}; s_1, \mu_1; s_2, \mu_2 \rangle = \\ & = (-1)^{-s_1 - s_2 - s'_1 - s'_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu'_1 + \mu'_2} \times \\ & \times \langle -\mathbf{k}; s_1, -\mu_1; s_2, -\mu_2 | S | -\mathbf{k}'; s'_1, -\mu'_1; s'_2, -\mu'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Нами учтено определение фазовых множителей (1.93).

Рис. 1.5. Угловые зависимости сечений для прямой и обратной реакций $^{24}\text{Mg} + d \rightleftharpoons ^{26}\text{Mg} + p$ [21]



Если гамильтониан системы инвариантен также относительно пространственного отражения, то вместо (1.97) получим

$$\begin{aligned} \langle k'; s'_1, \mu'_1; s'_2, \mu'_2 | S | k; s_1, \mu_1; s_2, \mu_2 \rangle = \\ = (-1)^{-s_1 - s_2 - s'_1 - s'_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu'_1 + \mu'_2} \times \\ \times \langle k; s_1 - \mu_1; s_2, -\mu_2 | S | k'; \\ s'_1, -\mu'_1; s'_2, -\mu'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Это соотношение по-прежнему можно записывать в виде (1.95), если под состояниями $-\alpha$ и $-\beta$ понимать состояния, отличающиеся от состояний α и β только знаками проекций спинов. Очевидно, при таком определении состояний сечения для переходов $-\beta \rightarrow -\alpha$ и $\beta \rightarrow \alpha$, усредненные по проекциям спинов начальных и конечных состояний, совпадают:

$$\Sigma \sigma_{-\beta, -\alpha} = \Sigma \sigma_{\beta\alpha}. \quad (1.99)$$

Поэтому для систем, инвариантных по отношению к отражению времени и отражению пространственных координат, имеет место *полудетальное равновесие*, при котором сечения прямого и обратного переходов σ и σ' , усредненные по проекциям начальных спинов и просуммированные по проекциям конечных спинов,

$$\sigma \equiv \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{\mu_1 \mu_2} \sigma_{\alpha\beta}; \quad \sigma' \equiv \frac{1}{(2s'_1 + 1)(2s'_2 + 1)} \sum_{\mu_1 \mu_2} \sigma'_{\beta\alpha},$$

связаны между собой соотношением

$$(2s_1 + 1)(2s_2 + 1) k^2 \sigma = (2s'_1 + 1)(2s'_2 + 1) k'^2 \sigma'. \quad (1.100)$$

Сечения для прямого и обратного процессов σ и σ' относятся к одной и той же энергии и одному и тому же углу в с. ц. и. На рис. 1.5 приведены результаты измерения функций возбуждения и угловых зависимостей сечений для прямой и обратной реакций $^{24}\text{Mg} + d \rightleftharpoons ^{26}\text{Mg} + p$ [21], которые подтверждают соотношение (1.100) с точностью до долей процента.

Если гамильтониан системы инвариантен также относительно пространственных вращений, то в представлении полного момента количества движения матрица столкновений диагональна и не зависит от проекции момента. Поэтому из условия взаимности в этом случае не-

посредственно следует связь между матричными элементами оператора столкновений для прямого и обратного переходов

$$S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta}. \quad (1.101)$$

Это условие означает, что матрица столкновений симметрична, т. е. в системе имеет место *детальное равновесие*, при котором сечения прямого и обратного переходов связаны соотношением

$$k_{\alpha}^2 \sigma_{\alpha\beta} = k_{\beta}^2 \sigma_{\beta\alpha}. \quad (1.102)$$

Детальное равновесие имеет место в системах, свойства которых инвариантны по отношению к вращениям и отражению пространственных координат и обращению времени.

Условие взаимности сокращает число независимых параметров, характеризующих матрицу столкновений. Если открыто N каналов, то матрица столкновений, являющаяся комплексной, в общем случае может содержать $2N^2$ вещественных параметров. Как уже было показано выше, условие унитарности уменьшает это число до $\frac{1}{2}N(3N-1)$ параметров. Так как условие (1.101) включает в себя $N(N-1)$ независимых соотношений, то матрица столкновений может содержать только $\frac{1}{2}N(N+1)$ независимых вещественных параметров.

§ 1.3. Матрица столкновений при наличии спинов у частиц (нецентральное взаимодействие)

Сложение спинового и орбитального моментов. Рассмотрим столкновения частиц, обладающих собственными моментами (спинами). Если частицы обладают спинами, то взаимодействие между ними в общем случае является нецентральным, т. е. потенциал взаимодействия между частицами зависит не только от относительного расстояния между ними, но и от взаимной ориентации спинов и вектора относительного расстояния между частицами. Столкновение частиц в случае нецентрального взаимодействия может сопровождаться изменением ориентации спинов частиц.

Волновая функция частицы, обладающей спином, зависит не только от пространственных координат, но и от спиновой переменной. В качестве спиновой переменной можно выбрать значение проекции спина частицы на определенное направление (обычно спиновую переменную принято обозначать буквой σ). Так как для свободной частицы пространственные координаты и спиновая переменная независимы, то волновую функцию свободной частицы можно представить в виде произведения пространственной и спиновой волновых функций:

$$\psi(\mathbf{r}, \sigma) = \psi(\mathbf{r}) \chi(\sigma). \quad (1.103)$$

Обозначим $\chi_{s\mu}$ собственную функцию операторов квадрата спина s^2 и проекции спина на выделенное направление s_z :

$$s^2 \chi_{s\mu} = s(s+1) \chi_{s\mu}; \quad s_z \chi_{s\mu} = \mu \chi_{s\mu}.$$

Функции $\chi_{s\mu}$ нормируем согласно условию

$$\sum_{\sigma} \chi_{s\mu}^*(\sigma) \chi_{s\mu}(\sigma) = \delta_{\mu\mu'}$$

Пусть спин падающей частицы s_1 , а спин рассеивающего ядра s_2 . Введем волновые функции для каналового спина s с помощью обычных правил сложения:

$$\chi_{s\mu} = \sum_{\mu_1 \mu_2} (s_1 \mu_1 s_2 \mu_2 | s\mu) \chi_{s_1 \mu_1} \chi_{s_2 \mu_2}, \quad (1.104)$$

где μ — проекция каналового спина; $(s_1 \mu_1 s_2 \mu_2 | s\mu)$ — коэффициенты Клебша—Гордана. Возможные значения каналового спина s определяются правилами сложения спинов сталкивающихся частиц s_1 и s_2 : $s = |s_1 - s_2|, |s_1 - s_2| + 1, \dots, s_1 + s_2$. Спинные функции, отвечающие различным значениям каналового спина s , ортогональны друг другу, поэтому рассеяние и реакции для различных входных каналов происходят независимым образом и могут быть описаны подобно рассеянию и реакциям под действием частицы со спином s на бесспиновой частице.

В случае нецентрального взаимодействия орбитальный и спиновый моменты в отдельности не сохраняются. Если потенциал взаимодействия инвариантен относительно вращений, интегралом движения является полный момент системы \mathbf{j} , определяемый как векторная сумма орбитального и спинного моментов \mathbf{l} и \mathbf{s} : $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Введем спин-угловые функции

$$\mathcal{Y}_{lsjM}(\mathbf{n}, \sigma) = \sum_{m\mu} (lm\mu | jM) Y_{lm}(\mathbf{n}) \chi_{s\mu}(\sigma), \quad (1.105)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении радиус-вектора \mathbf{r} . Эти функции являются собственными функциями квадрата полного момента системы и его проекции, а также квадратов орбитального момента и спина. Спин-угловые функции удовлетворяют условию ортонормировки

$$\sum_{\sigma} \int d\sigma \mathcal{Y}_{i' s' j' M'}^* \mathcal{Y}_{lsjM} = \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{jj'} \delta_{MM'}$$

Заметим, что при обращении времени правильно преобразуются спин-угловые функции с добавочным фазовым множителем

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{lsjM} = i^l \mathcal{Y}_{lsjM}. \quad (1.106)$$

Асимптотика волновой функции и амплитуды рассеяния и реакций. Для простоты рассмотрим вначале задачу о рассеянии. Запишем падающую волну во входном канале в виде произведения плоской волны, характеризующей относительное движение частиц с определенным импульсом \mathbf{k} , на спиновую функцию, отвечающую определенным значениям каналового спина s и его проекции на выделенное направление μ :

$$\psi_{ks\mu}^0(\mathbf{r}, \sigma) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \chi_{s\mu}(\sigma). \quad (1.107)$$

Разложим волновую функцию входного канала (1.107) по полному набору спин-угловых функций $\tilde{\mathcal{Y}}_{l's'jM}$:

$$\Psi_{k\sigma\mu}^0(\mathbf{r}, \sigma) = \sum_{l's'jM} a_{l's'jM}^0(k\sigma\mu; \mathbf{r}) \tilde{\mathcal{Y}}_{l's'jM}(\mathbf{n}, \sigma).$$

Коэффициенты разложения $a_{l's'jM}^0$ нетрудно найти, воспользовавшись разложением плоской волны по сферическим функциям (1.47) и ортонормировкой сферических и спиновых функций:

$$a_{l's'jM}^0(k\sigma\mu; \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{lm} j_l(kr) (lms\mu | jM) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_k) \delta_{ll'} \delta_{ss'}.$$

В результате получим

$$\Psi_{k\sigma\mu}^0(\mathbf{r}, \sigma) = 4\pi \sum_{lm} \sum_{jM} j_l(kr) (lms\mu | jM) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_k) \tilde{\mathcal{Y}}_{l's'jM}(\mathbf{n}, \sigma). \quad (1.108)$$

Аналогичным образом можно разложить волновую функцию $\Psi_{k\sigma\mu}$, описывающую рассеяние:

$$\Psi_{k\sigma\mu}(\mathbf{r}, \sigma) = \sum_{l's'jM} a_{l's'jM}(k\sigma\mu; \mathbf{r}) \tilde{\mathcal{Y}}_{l's'jM}(\mathbf{n}, \sigma),$$

при этом

$$a_{l's'jM}(k\sigma\mu; \mathbf{r}) = \sum_{lm} \psi_{l's'}^j(l's'; r) (lms\mu | jM) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_k),$$

а следовательно,

$$\Psi_{k\sigma\mu}(\mathbf{r}, \sigma) = \sum_{lm} \sum_{l's'jM} \psi_{l's'}^j(l's'; r) (lms\mu | jM) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_k) \tilde{\mathcal{Y}}_{l's'jM}(\mathbf{n}, \sigma). \quad (1.109)$$

Так как в результате взаимодействия орбитальный и спиновый моменты в отдельности не сохраняются, то коэффициенты разложения $\psi_{l's'}^j$ в (1.109) в отличие от (1.108) не имеют диагонального вида. Индексы l' и s' при коэффициенте разложения $\psi_{l's'}^j$ указывают, что соответствующая составляющая в (1.109) отвечает определенным значениям орбитального и спинового моментов, т. е. определяет амплитуду вероятности обнаружить систему с данными моментами l' и s' . Индексы l и s указывают значения орбитального и спинового моментов во входном канале и связаны с начальными условиями задачи. В случае центрального взаимодействия

$$\psi_{l's'}^j = \delta_{ll'} \delta_{ss'} \psi_{ls}^j$$

и разложение (1.109) переходит в (1.108).

Радиальные функции $\psi_{l's'}^j$ удовлетворяют следующей системе зацепляющихся уравнений:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l'(l'+1)}{r^2} + k^2 \right\} \psi_{l's'}^j(r) = \sum_{l''s''} v_{l''s''}^j(r) \psi_{l''s''}^j(r), \quad (1.110)$$

где

$$\mathcal{J}_{l', s', l s}^j(r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{\sigma} \int d\sigma \tilde{\mathcal{J}}_{l', s', l M}^*(r, \sigma) V(r, \sigma) \tilde{\mathcal{J}}_{l s j M}.$$

Независимость матричного элемента потенциала V от проекции полного момента M есть следствие инвариантности взаимодействия относительно вращений. Допустимые значения каналовых спинов s и s' определяются спинами сталкивающихся частиц s_1 и s_2 . При заданном значении j допустимые значения l и l' определяются правилами сложения, вытекающими из свойств коэффициентов Клебша—Гордана.

Обобщим теперь полученные формулы таким образом, чтобы они описывали кроме рассеяния и различные реакции. Для этого введем дополнительные квантовые числа γ и γ' , характеризующие соответственно входной и выходной каналы. Тогда падающую волну во входном канале можно записать в виде

$$\Psi_{\gamma}^0 = \Psi_{k s \mu}^0(r, \sigma) \chi_{\gamma}, \quad (1.111)$$

где χ_{γ} — внутренняя функция входного канала, а полная волновая функция Ψ_{γ} в области конфигурационного пространства, соответствующей открытому каналу γ' , представляется в виде

$$\Psi_{\gamma} = \Psi_{\gamma k s \mu, \gamma'}(r, \sigma) \chi_{\gamma'}, \quad (1.112)$$

где функция относительного движения в выходном канале $\Psi_{\gamma k s \mu, \gamma'}$ отличается от (1.109) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma k s \mu, \gamma'}(r, \sigma) = & \sum_{l m l' s'} \sum_{j M} \Psi_{\gamma l s, \gamma' l' s'}^j(r) \times \\ & \times (l m s \mu | j M) Y_{l m}^*(\mathbf{n}_k) \tilde{\mathcal{J}}_{l' s' j M}^*(\mathbf{n}, \sigma). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Включим в определение каналов значения полного момента системы, орбитального момента и каналового спина, т. е. входной и выходной каналы будем характеризовать наборами квантовых чисел $\alpha \equiv \gamma, l, s, j$ и $\beta \equiv \gamma', l', s', j$; при этом под внутренними функциями входного и выходного каналов подразумеваем

$$\chi_{\alpha} = \tilde{\mathcal{J}}_{l s j M}^*(\mathbf{n}, \sigma) \chi_{\gamma}; \quad \chi_{\beta} = \tilde{\mathcal{J}}_{l' s' j M}^*(\mathbf{n}, \sigma) \chi_{\gamma'}. \quad (1.114)$$

Вместо функций Ψ_{γ} введем функции Ψ_{α} , определяемые следующим образом:

$$\Psi_{\alpha} = \sum_{\mu} \int d\sigma_k (l m s \mu | j M) Y_{l m}(\mathbf{n}_k) \Psi_{\gamma}. \quad (1.115)$$

В соответствии с формулами (1.112) и (1.113) волновую функцию Ψ_{α} в области какого-либо открытого канала β представим в виде

$$\Psi_{\alpha} = \Psi_{\alpha \beta}^j(r) \chi_{\beta}, \quad (1.116)$$

где

$$\Psi_{\alpha \beta}^j \equiv \Psi_{\gamma l s, \gamma' l' s'}^j;$$

в частности, во входном канале

$$\Psi_{\alpha} = \psi_{\alpha\alpha}^j(r) \chi_{\alpha}.$$

Волновая функция Ψ_{α} описывает различные процессы, вызываемые через входной канал α . Функция $\psi_{\alpha\beta}^j(r)$ описывает относительное движение частиц в канале β . Если $\alpha = \beta$, то функция $\psi_{\alpha\alpha}^j(r)$ описывает рассеяние во входном канале.

Согласно (1.108) падающей волне во входном канале соответствует функция относительного движения

$$\psi_{\alpha\alpha}^{j0}(r) = 4\pi j_l(kr). \quad (1.117)$$

Разность между функцией $\psi_{\alpha\alpha}^j(r)$ и падающей волной (1.117) определяет рассеянную волну, которая на больших расстояниях представляет собой расходящуюся сферическую волну. В общем случае асимптотическое выражение для радиальной волновой функции $\psi_{\alpha\beta}^j(r)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}^j(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & \frac{2\pi i}{\sqrt{k_{\alpha} k_{\beta}}} \sqrt{\frac{\mu_{\beta}}{\mu_{\alpha}}} \frac{1}{r} \left\{ \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[-i \left(k_{\alpha} r - \frac{l\pi}{2} \right) \right] - S_{\beta\alpha}^j \exp \left[i \left(k_{\beta} r - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \right\}, \quad (1.118) \end{aligned}$$

где $S_{\beta\alpha}^j$ — матрица столкновений:

$$S_{\beta\alpha}^j \equiv S_{\gamma' l' s' \gamma l s}. \quad (1.119)$$

Матрица столкновений диагональна в представлении полного момента вследствие допущения об инвариантности взаимодействия относительно вращений. Элементы матрицы столкновений не зависят от проекции полного момента, поскольку проекция изменяется при поворотах системы координат, оставляющих неизменным гамильтониан системы. Вследствие нецентрального характера взаимодействия матрица столкновений недиагональна по квантовым числам орбитального момента l и каналовой спина s . Допустимые значения каналовой спина s и s' определяются спинами сталкивающихся частиц s_1 и s_2 . При заданном значении j допустимые значения l и l' определяются правилами сложения моментов. Если взаимодействие инвариантно относительно пространственной инверсии и, следовательно, сохраняет четность, то l и l' в (1.118) должны быть одинаковой четности. Если взаимодействие инвариантно и относительно обращения времени, то из условия взаимности следует *симметричность матрицы столкновений*, т. е.

$$S_{\gamma' l' s' \gamma l s}^j = S_{\gamma l s \gamma' l' s'}^j. \quad (1.120)$$

Очевидно, чем больше спины сталкивающихся частиц, тем сложнее структура матрицы столкновений, и это связано с увеличением количества квантовых чисел, от которых зависит S -матрица.

Величины $S_{\gamma' l' s' \gamma l s}^j$ непосредственно определяют амплитуды рассеяния и реакций. Выделяя из (1.112) падающую волну (1.111), находим

рассеянную волну в области конфигурационного пространства, соответствующей открытому каналу γ' :

$$\Psi_{\gamma'} \equiv \{ \Psi_{\gamma k s \mu, \gamma'}(\mathbf{r}, \sigma) - \delta_{\gamma \gamma'} \Psi_{k s \mu}^0(\mathbf{r}, \sigma) \} \chi_{\gamma'} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(ik'r)}{r} \sum_{s' \mu'} f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \chi_{s' \mu'}(\sigma) \chi_{\gamma'}, \quad (1.121)$$

где $f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — амплитуда рассеяния или реакции

$$f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi i}{\sqrt{kk'}} \sqrt{\frac{\mu_{\gamma'}}{\mu_{\gamma}}} \sum_{l m l'} \sum_{m' j M} (l m s \mu | j M) \times \\ \times (l' m' s' \mu' | j M) \{ \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} - S_{\gamma' l' s' \mu'}^j Y_{l m}^*(\mathbf{n}_k) Y_{l' m'}(\mathbf{n}_{k'}) \} \quad (1.122)$$

(μ — начальная проекция каналового спина и μ' — проекция каналового спина в конечном состоянии).

Каналовый спин не сохраняется при рассеянии, поэтому в общем случае $s \neq s'$. Так как наблюдаемыми величинами являются проекции спинов взаимодействующих частиц, а не каналовые спины, то физический смысл имеет амплитуда $f_{\gamma \mu_1 \mu_2 \rightarrow \gamma' \mu'_1 \mu'_2}$, а не $f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}$. Воспользовавшись соотношением (1.104), амплитуду $f_{\gamma \mu_1 \mu_2 \rightarrow \gamma' \mu'_1 \mu'_2}$ нетрудно выразить через найденные амплитуды $f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}$:

$$f_{\gamma \mu_1 \mu_2 \rightarrow \gamma' \mu'_1 \mu'_2}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum (s_1 \mu_1 s_2 \mu_2 | s \mu) (s'_1 \mu'_1 s'_2 \mu'_2 | s' \mu') \times \\ \times f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (1.123)$$

(суммирование производится по всем допустимым значениям каналовых спинов s и s').

Параметризация матрицы столкновений. В случае рассеяния бесспиновых частиц матрица столкновений полностью определяется заданием вещественных фаз рассеяния. Возможность *параметризации матрицы столкновений* посредством задания набора фаз следует из законов сохранения и свойства унитарности матрицы столкновений. При этом характер взаимодействия между частицами сказывается на фазах и их зависимости от энергии. Если радиус взаимодействия сравним с длиной волны, то рассеяние с высокой точностью описывается небольшим числом фаз. Поэтому с помощью фазового анализа экспериментальных данных по рассеянию можно получить непосредственные сведения о взаимодействии между частицами.

Для возможности получения аналогичной информации в случае столкновений частиц, обладающих спинами, необходимо прежде всего выяснить вопрос о параметризации S -матрицы при наличии спинов у взаимодействующих частиц. В отличие от рассеяния бесспиновых частиц в этом случае состояние системы задается не только энергией E и направлением движения частиц (вектор \mathbf{n}_k), но еще и значениями проекций спинов частиц μ_1 и μ_2 . Количество квантовых чисел, характеризующих состояние, определяется числом степеней свободы системы и не зависит от представления. Для двух частиц со спинами в ка-

честве таких квантовых чисел (кроме энергии E) можно выбрать ϕ , φ , μ_1 , μ_2 или какой-либо из наборов: l, m, μ_1, μ_2 ; l, m, s, μ ; l, s, j, M . Матрица столкновений принимает наиболее простой вид в представлении, которое задается интегралами движения (она диагональна по квантовым числам, отвечающим интегралам движения). Переход в любое другое представление осуществляется с помощью функций преобразования.

Если взаимодействие инвариантно относительно вращений, то матрица столкновений диагональна по квантовым числам полного момента. Поэтому для бесспиновых частиц

$$\langle l', m' | S | l, m \rangle = S^l \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

при этом условии унитарности позволяет выразить S^l через единственный вещественный параметр — фазу рассеяния δ_l : $S^l = \exp(2i\delta_l)$. Для частиц со спинами матрица столкновений в представлении l, s, j, M принимает вид

$$\langle l', s', j', M' | S | l, s, j, M \rangle = S_{l's', ls}^j \delta_{jj'} \delta_{MM'}, \quad (1.124)$$

где $S_{l's', ls}^j$ — матрица по квантовым числам орбитального момента l и суммарного спина s . Если взаимодействие центральное, то матрица столкновений диагональна по квантовым числам l и s : $S_{l's', ls}^j = S_{ls}^j \delta_{ll'} \delta_{ss'}$, при этом S_{ls}^j выражается через вещественную фазу рассеяния. В общем случае нецентрального взаимодействия матрица $S_{l's', ls}^j$ не имеет диагонального вида и для ее параметризации недостаточно задания фаз.

Исключение представляет случай рассеяния частицы со спином $1/2$ на бесспиновой мишени. При фиксированном значении j согласно правилам сложения моментов l и l' могут принимать только два значения: $j - 1/2$ и $j + 1/2$. Поэтому $S_{l'1/2, l1/2}^j$ является двухрядной матрицей. Однако если взаимодействие инвариантно относительно пространственной инверсии, то в силу закона сохранения четности квантовые числа l и l' имеют одинаковую четность. Поэтому недиагональные элементы матрицы $S_{l'1/2, l1/2}^j$ равны нулю и, следовательно,

$$S_{l'1/2, l1/2}^j = S_{ll'}^j \delta_{ll'} \quad (l = j \pm 1/2). \quad (1.125)$$

При этом из условия унитарности имеем $S_{ll'}^j = \exp(2i\delta_l^j)$, где δ_l^j — вещественная фаза. Таким образом, и при рассеянии частицы со спином $1/2$ на бесспиновой частице понятие фазы сохраняет свой смысл, однако фазы δ_l^j зависят не только от орбитального момента l , но и от полного момента j .

Рассмотрим еще один простейший пример — рассеяние частицы со спином $1/2$ на частице также со спином $1/2$. Выберем l, s, j, M -представление. Суммарный спин s может принимать два значения: 0 и 1 . Если $s = 0$, то $l = j$; если $s = 1$, то l принимает значения $j - 1$, j и $j + 1$. Вследствие сохранения четности возможны переходы только между $l = j - 1$ и $l = j + 1$, а также переходы без изменения l .

Поэтому при заданном значении полного момента и заданной четности состояний $S_{l's', l s}^j$ можно записать в виде двухрядной матрицы, индексы строк и столбцов которой соответствуют состояниям ($l = j - 1, s = 1$) и ($l = j + 1, s = 1$) или ($l = j, s = 0$) и ($l = j, s = 1$). Матричные элементы каждой из двух матриц выражаются через восемь вещественных параметров. Учитывая условия унитарности и взаимности, число независимых параметров можно свести к трем. В результате каждая из матриц $S_{l'1, l1}^j$ и $S_{l's', l s}^j$ может быть представлена в виде

$$S_{l's', l s}^j = \begin{pmatrix} \cos \epsilon^j \exp(2i\delta^j) & i \sin \epsilon^j \exp[i(\delta^j + \eta^j)] \\ i \sin \epsilon^j \exp[i(\delta^j + \eta^j)] & \cos \epsilon^j \exp(2i\eta^j) \end{pmatrix}, \quad (1.126)$$

где δ^j, η^j и ϵ^j — независимые вещественные параметры. Таким образом, уже в этом случае параметризовать S -матрицу заданием одних фаз не удастся. С увеличением спинов сталкивающихся частиц структура S -матрицы усложняется и соответственно увеличивается число независимых параметров, характеризующих ее. Следует отметить, что сам выбор независимых параметров оказывается неоднозначным.

Если матрица столкновений задана в представлении l, s, j, M , то с помощью функций преобразования нетрудно получить для амплитуды рассеяния или реакции выражение, совпадающее с (1.122). Действительно, используя связь между амплитудой и матрицей столкновений

$$f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(k, k') = \frac{2\pi i}{\sqrt{kk'}} \sqrt{\frac{\mu_{\gamma'}}{\mu_{\gamma}}} \langle \gamma', s', \mu', n | 1 - S | \gamma, s, \mu, n \rangle$$

и переходя к представлению, задаваемому l, s, j, M , имеем

$$\begin{aligned} f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(k, k') &= \frac{2\pi i}{\sqrt{kk'}} \sqrt{\frac{\mu_{\gamma'}}{\mu_{\gamma}}} \times \\ &\times \sum_{\substack{lmjM \\ l' m' j' M'}} \langle n' | l' m' \rangle \langle l' m' s' \mu' | l' s' j' M' \rangle \times \\ &\times \langle \gamma', l', s' j' M' | 1 - S | \gamma, l, s, M \rangle \langle l s j M | l m s \mu \rangle \langle l m | n \rangle. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Замечая, что $\langle n' | l' m' \rangle \equiv Y_{l' m'}(n')$, $\langle l m | n \rangle \equiv Y_{l m}^*(n)$, и используя (1.124), получаем для амплитуды формулу (1.122).

Угловое распределение продуктов ядерных реакций. Дифференциальное сечение рассеяния или реакции при фиксированных значениях проекций спинов взаимодействующих частиц до и после столкновения непосредственно определяется квадратом модуля амплитуды (1.123):

$$\sigma_{\gamma \mu_1 \mu_2, \gamma' \mu'_1 \mu'_2}(\vartheta, \varphi) = \frac{\mu_{\gamma'}}{\mu_{\gamma}} \frac{k'}{k} \left| f_{\gamma \mu_1 \mu_2 \rightarrow \gamma' \mu'_1 \mu'_2}(k, k') \right|^2. \quad (1.128)$$

Если проекции спинов взаимодействующих частиц не фиксированы, то сечение (1.128) следует усреднить по значениям начальных проекций спинов и просуммировать по значениям проекций спинов в конеч-

ном состоянии. Используя условие ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана, получаем

$$\sigma_{\gamma\gamma'}(\theta) = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{s\mu s'\mu'} \frac{\mu_\gamma}{\mu_{\gamma'}} \frac{k'}{k} \left| f_{\gamma s\mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}(k, k') \right|^2. \quad (1.129)$$

Так как в случае неполяризованных частиц выделенное направление отсутствует, то усредненное сечение (1.129) может зависеть только от угла рассеяния.

Используя выражение для амплитуды (1.122), можно найти явную угловую зависимость дифференциального сечения для произвольной ядерной реакции с участием частиц, обладающих спинами. Выберем систему координат, в которой ось z направлена вдоль импульса падающей частицы, тогда

$$Y_{lm}(\theta) \rightarrow \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}.$$

Используя это соотношение в выражении для амплитуды (1.122) и подставляя последнее в формулу для сечения (1.129), получаем

$$\sigma_{\gamma\gamma'}(\theta) = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{s\mu s'\mu'} \frac{\pi}{k^2} \left| \sum_{l' m' j M} \sqrt{2l+1} (l_0 s\mu | j M) \times \right. \\ \left. \times (l' m' s' \mu' | j M) \langle \gamma' l' s' | 1 - S^j | \gamma l s \rangle Y_{l' m'}(\theta') \right|^2. \quad (1.130)$$

Воспользовавшись формулой сложения для сферических функций

$$Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2}^* = (-1)^{m_2} \sum_{L m} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} (l_1 0 l_2 0 | L 0) \times \\ \times (l_1 m_1 l_2 -m_2 | L m) Y_{L m}, \quad (1.131)$$

проведем суммирование в (1.130) по всем магнитным квантовым числам. Такое суммирование можно выполнить с помощью правила сумм Рака:

$$\sum_M (l_1 m_1 j_1 M | s m_1 + M) (s m_1 + M j_2 m_2 - m_1 - M | l_2 m_2) \times \\ \times (j_1 M j_2 m_2 - m_1 - M | L m_2 - m_1) = \sqrt{(2s+1)(2L+1)} \times \\ \times (l_1 m_1 L m_2 - m_1 | l_2 m_2) W(l_1 j_1 l_2 j_2; sL), \quad (1.132)$$

где $W(l_1 j_1 l_2 j_2; sL)$ — так называемый коэффициент Рака. Двукратное применение этого правила позволяет просуммировать по всем магнитным квантовым числам:

$$\sum_{\mu\mu' m_1' M_1 m_2' M_2} (-1)^{m_2'} (l_1' m_1' l_2' -m_2' | L m) (l_1 0 s\mu | j_1 M_1) \times \\ \times (l_2 0 s\mu' | j_2 M_2) (l_1' m_1' s' \mu' | j_1 M_1) (l_2' m_2' s' \mu' | j_2 M_2) = \\ = (-1)^{s'-s} (2j_1+1)(2j_2+1) (l_1 0 l_2 0 | L 0) W(l_1 j_1 l_2 j_2; sL) \times \\ \times W(l_1' j_1 l_2' j_2; s' L) \delta_{m_0}.$$

В результате для дифференциального сечения получим так называемую формулу Блатта и Биденхарна, которая в общем виде определяет *угловое распределение продуктов* рассеяния и ядерных реакций при столкновениях частиц со спинами:

$$\sigma_{\gamma\gamma'}(\vartheta) = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{ss'} (2s+1) \sigma_{\gamma s, \gamma' s'}(\vartheta); \quad (1.133)$$

$$\sigma_{\gamma s, \gamma' s'}(\vartheta) = \frac{1}{2s+1} \frac{1}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} B^{(L)}(\gamma s, \gamma' s') P_L(\cos \vartheta), \quad (1.134)$$

где $P_L(\cos \vartheta)$ — полиномы Лежандра, а вещественные коэффициенты $B^{(L)}(\gamma s, \gamma' s')$ выражаются через S -матрицу посредством соотношений¹

$$\begin{aligned} B^{(L)}(\gamma s, \gamma' s') &= \frac{(-1)^{s'-s}}{4} \Sigma \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l'_1+1)(2l'_2+1)} \times \\ &\times (2j_1+1)(2j_2+1)(l_1 0 l_2 0 | L 0)(l'_1 0 l'_2 0 | L 0) \times \\ &\times W(l_1 j_1 l_2 j_2; s L) W(l'_1 j_1 l'_2 j_2; s' L) (\delta_{\gamma\gamma'} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{l_2 l'_2} - S)^* \times \\ &\times (\delta_{\gamma\gamma'} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{s s'} - S_{\gamma' l'_2 s', \gamma l_2 s}). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Коэффициенты $B^{(L)}(\gamma s, \gamma' s')$ симметричны относительно своих аргументов, т. е.

$$B^{(L)}(\gamma s, \gamma' s') = B^{(L)}(\gamma' s', \gamma s).$$

Суммирование в (1.135) распространяется по всем допустимым значениям квантовых чисел $l_1, l_2, l'_1, l'_2, j_1$ и j_2 . Неограниченным является суммирование только по одному из чисел, в качестве такого числа удобно взять j_1 . Тогда при заданном значении j_1 суммирование по пяти другим квантовым числам l_1, l_2, l'_1, l'_2 и j_2 ограничено правилами отбора, которые следуют из свойств коэффициентов Рака. Наряду с ограничением пределов суммирования число слагаемых в (1.135) много сокращается в результате выполнения следующих условий: $l_1 + l_2 - L$ и $l'_1 + l'_2 - L$ — четные числа [это вытекает из свойств коэффициентов $(l_1 0 l_2 0 | L 0)$], $l_1 + l'_1$ и $l_2 + l'_2$ — четные или нечетные числа в зависимости от того, имеют ли каналы γ и γ' одинаковую или противоположную четность (четность канала определяется как произведение внутренних четностей сталкивающихся или разлетающихся частиц). Существуют также ограничения на L , известные под названием правил о сложности угловых распределений [24]:

$$L \leq 2j_{1,2}^{\max}, 2l'_{1,2}^{\max}, 2j_{1,2}^{\max}$$

(в правых частях неравенств, которые должны одновременно выполняться, стоят наибольшие значения моментов, участвующих в реакции). Эти правила также следуют из свойств коэффициентов Рака.

¹ Формула для дифференциального сечения (1.134) впервые получена в [22], однако в выражении для коэффициента $B^{(L)}(\gamma s, \gamma' s')$ содержался неправильный фазовый множитель, который был исправлен в [23].

Обычно формула для углового распределения (1.134) применяется, когда существенны только малые значения орбитального момента или когда спины сталкивающихся частиц малы: 0, 1/2 или 1, либо когда реакция осуществляется через состояние с определенным полным моментом. В этих случаях формула (1.134) существенным образом упрощается.

Для случая $s = s' = 0$ коэффициенты Рака, входящие в (1.135), приводятся к виду

$$W(l_1 j_1 l_2 j_2; 0L) = \frac{(-1)^{2L}}{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}} \delta_{l_1 j_1} \delta_{l_2 j_2},$$

при этом из (1.134) получаем дифференциальное сечение упругого рассеяния в центральном поле или же дифференциальное сечение реакции для бесспиновых частиц (1.87).

Домножив (1.133) на элемент телесного угла do и проинтегрировав по полному телесному углу, получим общую формулу для интегрального сечения процесса:

$$\sigma_{\gamma\gamma'} \equiv \int d\Omega \sigma_{\gamma\gamma'}(\Theta) = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{ss'} \frac{4\pi}{k^2} B^{(0)}(\gamma s, \gamma' s'). \quad (1.136)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} W(l_1 j_1 l_2 j_2; s0) &= \frac{(-1)^{-l_1-l_1+s}}{\sqrt{(2l_1+1)(2j_1+1)}} \delta_{l_1 l_2} \delta_{j_1 j_2}, \quad (l_1 0 l_2 00) = \\ &= \frac{(-1)^{l_1}}{\sqrt{2l_1+1}} \delta_{l_1 l_2}, \end{aligned}$$

находим

$$B^{(0)}(\gamma s, \gamma' s') = \frac{1}{4} \sum_{ll'j} (2j+1) |\delta_{ll'} \delta_{ss'} - S_{\gamma'l's', \gamma ls}^j|^2$$

и, таким образом, из (1.136) получаем следующие формулы для интегрального сечения упругого рассеяния σ_e и интегрального сечения реакции $\sigma_{\gamma\gamma'}$:

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k^2} \sum_{ss' ll' j} g(j) |\delta_{ll'} \delta_{ss'} - S_{\gamma'l's', \gamma ls}^j|^2; \quad (1.137)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma'} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{ss' ll' j} g(j) |S_{\gamma'l's', \gamma ls}^j|^2 \quad (\gamma' \neq \gamma), \quad (1.138)$$

где $g(j) = \frac{2j+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)}$ — статистический фактор.

В случае упругого рассеяния частицы со спином 1/2 на бесспиновой мишени из (1.137) следует

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \{(l+1) \sin^2 \delta_l^{l+1/2} + l \sin^2 \delta_l^{l-1/2}\}, \quad (1.139)$$

если воспользоваться (1.125). Формулы (1.137) и (1.138) являются обобщением обычных формул (1.78) и (1.79) на случай нецентрального взаимодействия.

§ 1.4. Поляризационные явления в ядерных реакциях

Поляризация продуктов ядерной реакции. Как уже отмечалось, столкновение частиц при нецентральном взаимодействии сопровождается изменением ориентации их спинов. Поэтому рассеянные частицы и продукты реакции могут характеризоваться поляризацией, отличной от нуля, даже в случае взаимодействия пучка неполяризованных падающих частиц с неполяризованными ядрами мишени.

Поляризацией P по определению называется отношение среднего значения в заданном состоянии вектора спина \mathbf{s} к спину s :

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{s} \rangle / s. \quad (1.140)$$

Направление вектора поляризации определяет направление ориентации спина частицы, а значение вектора \mathbf{P} определяет степень поляризации, т. е. относительную вероятность ориентации спина в заданном направлении. Очевидно, что поляризация частиц, образующихся в результате ядерной реакции в каком-либо канале β , будет определяться асимптотическим выражением для рассеянной волновой функции в соответствующем канале (1.121). Амплитуда реакции $f_{\nu\mu_1\mu_2 \rightarrow \nu'\mu'_1\mu'_2}(k, k')$ характеризует вероятность перехода из начального в конечное состояние системы с фиксированными значениями проекций спинов взаимодействующих частиц. Выберем составляющие вектора спина одной из частиц, образующихся в результате реакции (например, частицы 1), в представлении, задаваемом значениями проекций спинов. Тогда, воспользовавшись обычным определением среднего для составляющих вектора спина частицы \mathbf{s}'_1 , введем так называемую *дифференциальную поляризацию*

$$d\mathbf{P} = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\substack{\mu_1 \mu_2 \\ \mu'_1 \mu'_2 \mu'_2}} \frac{\mu_\nu}{\mu_{\nu'}} \frac{k'}{k} \frac{1}{s'_1} \times \\ \times \langle \mu'_1 | \mathbf{s}'_1 | \mu'_1 \rangle f_{\nu\mu_1\mu_2 \rightarrow \nu'\mu'_1\mu'_2}(k, k') f_{\nu\mu_1\mu_2 \rightarrow \nu'\mu''_1\mu'_2}^*(k, k') d\sigma. \quad (1.141)$$

Так как сталкивающиеся частицы предполагаются неполяризованными, то в (1.141) проведено усреднение по значениям начальных проекций спинов. Кроме того, если не интересоваться спиновым состоянием второй частицы, образующейся в результате реакции, то в (1.141) необходимо также просуммировать по конечным значениям проекций спина второй частицы. Величина $d\mathbf{P}$ имеет смысл, аналогичный смыслу дифференциального сечения $d\sigma$. Проинтегрировав (1.141) по углам, найдем среднее значение вектора поляризации для образующихся частиц, называемое иногда *полной поляризацией*.

Разделив дифференциальную поляризацию (1.141) на дифференциальное сечение реакции, найдем *относительную поляризацию*

$$P(\theta) \equiv \frac{1}{\sigma(\theta)} \frac{dP}{d\theta}. \quad (1.142)$$

Относительная поляризация характеризует среднее значение вектора спина частиц, образующихся в реакции и вылетающих в определенном направлении (под углом θ к направлению падающих частиц).

Вычисление дифференциальной поляризации удобно провести, перейдя от декартовых составляющих вектора спина к сферическим составляющим

$$s'_0 = s'_2; s'_{\pm 1} = \mp (s'_x \pm i s'_y) / \sqrt{2}.$$

Совокупность величин s'_v ($v = 0, \pm 1$) образует сферический тензор ранга 1. Согласно теореме Вигнера—Экарта матричный элемент от сферического тензора q_{Iv} по состояниям с определенными значениями момента представляется в виде произведения двух множителей, один из которых содержит в явном виде всю зависимость матричного элемента от магнитных квантовых чисел, а второй представляет собой так называемый приведенный матричный элемент¹:

$$\langle s' \mu' | q_{Iv} | s \mu \rangle = \frac{(-1)^{2I}}{\sqrt{2s'+1}} (s \mu I v | s' \mu') \langle s' || q_I || s \rangle. \quad (1.143)$$

Для вектора спина $I = 1$, а приведенный матричный элемент выражается через собственное значение квадрата спина

$$\langle s' || s || s \rangle = \sqrt{2s+1} \sqrt{s(s+1)} \delta_{ss'}.$$

Таким образом,

$$\langle \mu'_1 | s'_{1v} | \mu'_1 \rangle = \sqrt{s'_1(s'_1+1)} (s'_1 \mu'_1 1v | s'_1 \mu'_1).$$

Подставляя это выражение в (1.141) и переходя к представлению канального спина с помощью соотношения (1.123), представим дифференциальную поляризацию в виде

$$dP_v = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{s \mu s' \mu' s'' \mu''} \frac{\mu_v}{\mu_{v'}} \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{s'_1+1}{s'_1}} \times \\ \times (s'_1 \mu'_1 s'_2 \mu'' - \mu'_1 | s'' \mu'') (s'_1 \mu'_1 1v | s'_1 \mu'_1) \times \\ \times (s'_1 \mu'_1 s'_2 \mu' - \mu'_1 | s' \mu') j_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'} f_{\gamma s \mu \rightarrow \gamma' s' \mu'}^* d\Omega. \quad (1.144)$$

Замечая, что

$$\sum_{\mu'_1 \mu''_1} (s'_1 \mu'_1 s'_2 \mu'' - \mu'_1 | s'' \mu'') (s'_1 \mu'_1 1v | s'_1 \mu'_1) (s'_1 \mu'_1 s'_2 \mu' - \\ - \mu'_1 | s' \mu') = (-1)^{s'_2 - s'_1 + \mu' - v} \sqrt{\frac{1}{3} (2s'_1 + 1) (2s' + 1) (2s'' + 1)} \times \\ \times (s' \mu' s'' - \mu'' | 1 - v) W(s'_1 s' s'_1 s''; s'_2 1),$$

¹ Более детально см. в [25].

выражение (1.144) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 dP_{\nu} = & \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\pi}{k^2} \sqrt{\frac{2s'_1+1}{3} \frac{s'_1+1}{s'_1}} \times \\
 & \times \sum_{s\mu s'\mu' s''\mu''} \sum_{l_1 l_2 l'_1 l'_2} (-1)^{s'_2 - s'_1 + \mu' - \nu} \times \\
 & \times \sqrt{(2s'+1)(2s''+1)(2l_1+1)(2l_2+1)} (l_1 0 s \mu | j_1 \mu) (l_2 0 s \mu | j_2 \mu) \times \\
 & \times (l'_1 \mu - \mu' s' \mu' | j_1 \mu) (l'_2 \mu - \mu'' s'' \mu'' | j_2 \mu) (s' \mu' s'' - \mu'' | 1 - \nu) \times \\
 & \times W(s'_1 s' s'_1 s''; s'_2 1) (\delta_{\nu\nu'} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{s s'} - S_{\nu' l'_1 s' \nu l_1 s}) \times \\
 & \times (\delta_{\nu\nu'} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{s s''} - S_{\nu' l'_2 s'' \nu l_2 s})^* Y_{l'_1, \mu - \mu'} Y_{l'_2, \mu - \mu''}^* d\Omega. \quad (1.145)
 \end{aligned}$$

Оставшееся суммирование по магнитным квантовым числам можно выполнить по аналогии с тем, как это было сделано при выводе формулы для дифференциального сечения. Окончательная формула для сферических составляющих вектора поляризации принимает вид

$$dP_{\nu} = \sum_L (L 0 1 \nu | L \nu) A^{(L)}(\gamma s, \gamma' s') Y_{L\nu}(\vartheta, \varphi) d\Omega, \quad (1.146)$$

где $A^{(L)}(\gamma s, \gamma' s')$ не зависит от ν . Коэффициент $(L 0 1 \nu | L \nu)$ при $\nu = 0$ обращается в нуль, поскольку $2L + 1$ — нечетное число. Поэтому в выбранной системе координат (в которой ось z направлена вдоль вектора относительного импульса сталкивающихся частиц) имеем

$$\left. \begin{aligned}
 dP_z/d\Omega &= dP_0/d\Omega = 0; \\
 \frac{dP_x}{d\Omega} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dP_{-1}}{d\Omega} - \frac{dP_1}{d\Omega} \right) \sim \frac{1}{2} (Y_{L,-1} + Y_{L,1}) \sim \\
 &\sim i \sin \varphi P_L^1(\cos \vartheta); \\
 \frac{dP_y}{d\Omega} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{dP_{-1}}{d\Omega} + \frac{dP_1}{d\Omega} \right) \sim \frac{i}{2} (Y_{L,-1} - Y_{L,1}) \sim \\
 &\sim i \cos \varphi P_L^1(\cos \vartheta),
 \end{aligned} \right\} \quad (1.147)$$

где P_L^1 — присоединенные полиномы Лежандра. Выберем далее ось x так, чтобы она лежала в плоскости реакции (в этом случае азимутальный угол $\varphi = 0$). Тогда в этой системе координат

$$dP_x/d\Omega = dP_z/d\Omega = 0,$$

и, следовательно, вектор поляризации направлен вдоль оси y , т. е. перпендикулярен плоскости реакции. Из общих соображений нетрудно убедиться, что вектор поляризации продуктов ядерной реакции всегда направлен перпендикулярно плоскости реакции. Действительно, вектор поляризации \mathbf{P} на самом деле является псевдовектором, а единственный псевдовектор, который можно составить из векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}' , описывающих реакцию, — это векторное произведение $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$. По-

этому вектор поляризации должен быть направлен вдоль этого псевдовектора:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{n} \times \mathbf{n}') P. \quad (1.148)$$

Таким образом, для составляющей дифференциальной поляризации вдоль направления $(\mathbf{n} \times \mathbf{n}')$ имеем следующее общее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vartheta)}{d\Omega} = & \frac{1}{2k^2} \frac{2s'_1 + 1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sqrt{\frac{s'_1 + 1}{2s'_1}} \times \\ & \times \sum_L \sum_{s s' s''} (-1)^{s'_2 - s'_1 - s + s'' + l'_2 + l_1} (2j_2 + 1) \times \\ & \times \sqrt{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l'_1 + 1)(2l'_2 + 1)(2s' + 1)(2s'' + 1)(2j_1 + 1)} \times \\ & \times (l_1 0 l_2 0 | L 0) (l'_1 0 l'_2 0 | L 0) W(l_1 j_1 l_2 j_2; sL) \times \\ & \times W(s'_1 s' s'_1 s''; j_2 1) X(j_1 l'_1 s'; j_2 l'_2 s''; LL1) \times \\ & \times \text{Im} \left\{ (\delta_{\nu\nu'} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{ss'} - S_{\nu' l'_1 s', \nu l_1 s}^{j_1})^* \times \right. \\ & \left. \times (\delta_{\nu\nu'} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{ss''} - S_{\nu' l'_2 s'', \nu l_2 s}^{j_2}) \right\} P_L^1(\cos \vartheta), \quad (1.149) \end{aligned}$$

где X — функция Фано. Основные закономерности поляризации частиц, образующихся в ядерных реакциях, непосредственно следуют из полученного выражения¹.

Сформулируем кратко некоторые из этих закономерностей.

1. Вектор поляризации направлен перпендикулярно плоскости реакции.

2. Так как поляризация представляет собой интерференционный эффект, то она обращается в нуль, если отличен от нуля только один матричный элемент S -матрицы.

3. Поляризация отсутствует, если начальное и конечное состояния являются s -состояниями, реакция осуществляется через промежуточные состояния с определенной четностью и полным моментом $j = 1/2$ (или $j = 0$, четность произвольна), в конечном состоянии суммарный спин равен 0 и отсутствует спин-орбитальное взаимодействие.

Относительная поляризация $P(\vartheta)$ существенным образом зависит от угла ϑ . Для $\vartheta = 0$ и 180° присоединенные полиномы Лежандра P_L^1 равны нулю и поляризация отсутствует. Если в реакции участвуют частицы с небольшими спинами и вклад вносит небольшое число состояний с различными орбитальными моментами, то формула (1.149) значительно упрощается.

Матрица плотности. В экспериментальных условиях обычно приходится изучать не рассеяние определенной частицы на частице, а рас-

¹ Общее выражение для поляризации продуктов ядерной реакции получено в [26]. Формула (1.149) отличается от приведенной в [26] фазовым множителем (см. [9]). Впервые поляризация нейтронов при резонансном рассеянии на ядрах (обусловленная спин-орбитальным расщеплением резонансных уровней) была рассмотрена Швингером [27].

сеяние пучка, состоящего из большого числа частиц, на мишени, содержащей также большое число частиц. Описание систем, содержащих большое число частиц, с помощью волновых функций практически невозможно. Поскольку на опыте измеряются только усредненные (по большому числу частиц) значения физических величин, то применимым оказывается описание, основанное на введении матрицы плотности.

Как известно, наиболее полное описание системы в квантовой механике достигается заданием волновой функции. Если задана волновая функция $\psi^{(a)}$, то среднее значение какой-либо величины, относящейся к системе и характеризуемой оператором \hat{q} , равно:

$$\bar{q} = \left(\psi^{(a)}, \hat{q} \psi^{(a)} \right).$$

Состояния, описываемые волновыми функциями, называются чистыми. Однако в квантовой механике кроме чистых состояний рассматриваются также состояния, описываемые некогерентной смесью волновых функций $\psi^{(a)}$ ($a = 1, 2, \dots, N$) с определенными статическими весами $w(a)$. Среднее значение величины в таком состоянии определяется соотношением

$$\bar{q} = \sum_{a=1}^N w(a) \left(\psi^{(a)}, \hat{q} \psi^{(a)} \right) / \sum_{a=1}^N w(a) \left(\psi^{(a)}, \psi^{(a)} \right). \quad (1.150)$$

Состояние системы, для которого среднее значение физической величины определяется равенством (1.150), называют смешанным состоянием. Состояние системы, являющейся частью некоторой большей замкнутой системы, всегда является смешанным.

Введем полный ортонормированный набор собственных функций ψ_α для некоторого оператора или набора операторов, относящихся к системе. Разлагая функцию $\psi^{(a)}$ по этому набору

$$\psi^{(a)} = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(a)} \psi_{\alpha}, \quad (1.151)$$

равенство (1.150) представим в виде

$$\bar{q} = \sum_{\alpha, \beta} q_{\alpha\beta} \rho_{\beta\alpha} / \sum_{\alpha} \rho_{\alpha\alpha}, \quad (1.152)$$

где ρ — матрица плотности в представлении α :

$$\rho_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^N w(a) c_{\alpha}^{(a)} c_{\beta}^{(a)*}. \quad (1.153)$$

Равенство (1.152) перепишем в более компактной форме:

$$\bar{q} = \text{Sp}(q\rho) / \text{Sp} \rho, \quad (1.154)$$

где Sp обозначает сумму диагональных элементов соответствующей матрицы. Используя (1.153), матрицу плотности можно непосредственно записать в представлении, в котором заданы волновые функции $\psi^{(a)}$:

$$\rho(x, x') = \sum_a w(a) \psi^{(a)}(x) \psi^{(a)*}(x'). \quad (1.155)$$

Зная матрицу плотности, можно вычислить среднее значение любой величины, характеризующей систему. Хотя матрица плотности не содержит переменных, не относящихся к данной системе, тем не менее она зависит от состояния всей замкнутой системы в целом [эта зависимость определяется набором статистических весов $\omega(a)$]. Чистое состояние является частным случаем смешанного, когда вероятность одного состояния равна единице, а остальных — нулю. Поэтому описание с помощью матрицы плотности является наиболее общим в квантовой механике¹.

Если система состоит из двух не взаимодействующих подсистем, то матрица плотности ρ , описывающая всю систему, образуется прямым произведением матриц плотности ρ_1 и ρ_2 , относящихся к каждой подсистеме:

$$\rho = \rho_1 \rho_2. \quad (1.156)$$

Согласно определению (1.153) матрица плотности эрмитова и положительно определена, поэтому с помощью унитарного преобразования ее всегда можно привести к диагональному виду. Если волновые функции $\psi^{(a)}$ нормированы на единицу и статистические веса $\omega(a)$ выбраны так, что $\sum_{a=1}^N \omega(a) = 1$, то матрица плотности удовлетворяет условию нормировки

$$\text{Sp } \rho = 1. \quad (1.157)$$

Вводя для описания спиновых свойств пучка частиц спиновую матрицу плотности

$$\rho = \overline{\chi \chi^\dagger}, \quad (1.158)$$

где черта означает статистическое усреднение, поляризацию частиц в пучке можно определить с помощью равенства

$$P = \frac{1}{s} \frac{\text{Sp}(s \rho)}{\text{Sp } \rho}. \quad (1.159)$$

В случае частиц со спином $1/2$ квадратичная комбинация из оператора спина сводится к линейной комбинации, поэтому векторная поляризация P полностью определяет спиновое состояние системы. В отличие от чистых состояний, для которых $P = 1$, в смешанных состояниях, описываемых матрицей плотности, поляризация P может принимать любое значение от 0 до 1. В общем случае матрицу плотности для частиц со спином $1/2$ представим в виде

$$\rho = \frac{I}{2} (1 + P \sigma), \quad (1.160)$$

где I — плотность частиц в пучке; σ — матрица Паули. Пучок называют полностью поляризованным, если поляризация равна единице ($P = 1$). Если же поляризация равна нулю ($P = 0$), то говорят о неполяризованном пучке. В общем случае пучок частиц со спином $1/2$ характеризуется четырьмя вещественными и измеримыми величинами I и P .

¹ См. более детально в [28].

Для частиц с произвольным спином s спиновое состояние пучка определяется заданием поляризационного тензора ранга $2s$. Обычно при описании поляризационных явлений матрицу плотности разлагают по спин-тензорам и задают спиновое состояние системы набором коэффициентов в таком разложении [12].

Амплитуда реакции и матрица плотности конечного состояния. Так же как и для частиц падающего пучка, спиновое состояние рассеянных частиц или продуктов ядерной реакции описывается матрицей плотности. Обозначим спиновую матрицу плотности падающего пучка частиц через ρ , а матрицу плотности для рассеянных или образовавшихся в результате реакции частиц — через ρ' . Связь между спиновыми матрицами плотности системы до столкновения ρ и после столкновения ρ' можно установить, введя операторную амплитуду рассеяния или реакции $\hat{f}(k, k')$. Для определения амплитуды $\hat{f}(k, k')$ воспользуемся асимптотикой волновой функции системы в конечном канале (1.121). Пусть входной и выходной каналы совпадают, т. е. имеет место рассеяние. Тогда асимптотику волновой функции можно записать в виде

$$\psi_{ks\mu}(r, \sigma) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left\{ \exp(ikr) + \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{f}(k, k') \right\} \chi_{s\mu}(\sigma), \quad (1.161)$$

где $\hat{f}(k, k')$ — операторная амплитуда рассеяния и $\chi_{s\mu}$ — спиновая функция начального состояния. (Для простоты выписываем формулы для случая рассеяния частицы со спином s на бесспиновой частице, обобщение на общий случай не представляет труда.) Амплитуда $\hat{f}(k, k')$ является матрицей в спиновом пространстве.

Функция, получаемая в результате действия оператора $\hat{f}(k, k')$, на начальную спиновую функцию $\chi_{s\mu}$,

$$\chi' = \hat{f}(k, k') \chi_{s\mu} \quad (1.162)$$

может рассматриваться как спиновая функция частицы после рассеяния, т. е. оператор рассеяния $\hat{f}(k, k')$ переводит начальное спиновое состояние $\chi_{s\mu}$ в конечное спиновое состояние χ' . Раскладывая спиновую функцию χ' по полному набору функций $\chi_{s\mu'}$, находим

$$\chi' = \sum_{\mu'} \langle \mu' | \hat{f}(k, k') | \mu \rangle \chi_{s\mu'}, \quad (1.163)$$

где $\langle \mu' | \hat{f}(k, k') | \mu \rangle$ — амплитуда упругого рассеяния, сопровождающегося изменением проекции спина частицы (μ — проекция спина в начальном состоянии; μ' — проекция спина в конечном состоянии):

$$\langle \mu' | \hat{f}(k, k') | \mu \rangle \equiv \hat{f}_{\mu \rightarrow \mu'}(k, k').$$

Аналогичным образом операторная амплитуда реакции $\hat{f}(k, k')$ переводит начальное состояние системы, характеризуемое спином s и проекцией спина μ , в конечное состояние, характеризуемое спином s' и каким-либо значением проекции спина μ' (значения s' определяются правилами отбора).

Таким образом, как в случае рассеяния, так и в случае реакции оператор $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ устанавливает общую связь между начальной и конечной спиновыми функциями системы

$$\chi' = f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \chi. \quad (1.164)$$

Используя это соотношение, нетрудно установить связь между матрицами плотности системы до и после столкновения. Если падающий пучок описывается спиновой матрицей плотности $\rho = \overline{\chi\chi^+}$ (черта означает статистическое усреднение), то спиновая матрица плотности системы после столкновения определяется выражением

$$\rho' = \overline{\chi'\chi'^+} = f\rho f^+. \quad (1.165)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при нормировке волновой функции χ' согласно (1.164) шпур матрицы плотности ρ' определяет дифференциальное сечение рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \text{Sp } \rho' / \text{Sp } \rho = \text{Sp } (f\rho f^+) / \text{Sp } \rho. \quad (1.166)$$

Если падающие частицы неполяризованы, то начальная матрица плотности сводится к единичной матрице, при этом дифференциальное сечение рассеяния

$$\sigma(\theta) = \text{Sp } (ff^+) / \text{Sp } \rho. \quad (1.167)$$

Как нетрудно убедиться, эта формула совпадает с (1.129). Если падающие частицы поляризованы, то сечение рассеяния (1.166) оказывается зависящим от направления вектора поляризации.

В общем случае даже при отсутствии поляризации падающих частиц в результате рассеяния возникает поляризация рассеянных частиц. Поляризация рассеянных частиц определяется общей формулой

$$\mathbf{P} = \frac{1}{s} \frac{\text{Sp } (\mathbf{s} \rho')}{\text{Sp } \rho'}. \quad (1.168)$$

В том случае, если падающие частицы неполяризованы и начальная матрица плотности сводится к единичной матрице, формула (1.168) определяет поляризацию частиц, возникающую в результате рассеяния. Формулы (1.166) и (1.168) справедливы для рассеяния частиц со спином на бесспиновых частицах и на частицах со спином. В последнем случае матрица плотности представляет собой прямое произведение матриц плотности для падающих и рассеивающих частиц. Формулой типа (1.168) будет определяться и поляризация частиц отдачи при рассеянии¹.

При рассеянии частицы со спином 1/2 на бесспиновой частице амплитуду рассеяния f , так же как и матрицу плотности ρ , можно записать в виде линейной комбинации единичной матрицы и матриц Паули:

$$f = g + h\mathbf{n}\sigma, \quad (1.169)$$

¹ См., например, [29].

где g и h — скалярные амплитуды (комплексные), зависящие от угла рассеяния, энергии частиц и характера взаимодействия. Скалярные амплитуды g и h выражаются через фазы рассеяния:

$$g(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} \{2l+1 - (l+1) \exp(2i\delta_l^{l+1/2}) - l \exp(2i\delta_l^{l-1/2})\} P_l(\cos\theta); \quad (1.170)$$

$$h(\theta) = -\frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} \{\exp(2i\delta_l^{l+1/2}) - \exp(2i\delta_l^{l-1/2})\} \frac{\partial}{\partial\theta} P_l(\cos\theta). \quad (1.171)$$

Центральная часть амплитуды g описывает рассеяние без изменения ориентации спина частицы, в то время как спиновая часть h описывает рассеяние с изменением ориентации спина частицы.

Если падающий пучок неполяризован, то, используя (1.165) и (1.169), получаем

$$\sigma(\theta) = |g(\theta)|^2 + |h(\theta)|^2. \quad (1.172)$$

Проинтегрировав дифференциальное сечение по полному телесному углу, для интегрального сечения рассеяния находим формулу (1.139). Поляризация частиц при рассеянии возможна только вдоль направления, перпендикулярного плоскости рассеяния, и определяется выражением

$$P = nP, \quad P = 2 \operatorname{Re} gh^* / (|g|^2 + |h|^2). \quad (1.173)$$

Так как поляризация представляет собой интерференционный эффект, то она исчезает, если одна из амплитуд g или h обращается в нуль. Поляризация отсутствует также в том случае, если одна из амплитуд g или h вещественна, а другая чисто мнимая. Отметим, что аналогичным образом описывается рассеяние частиц со спином $1/2$ на неполяризованных частицах с произвольным спином. В частности, сечение рассеяния и поляризация, возникающая при рассеянии на неполяризованной мишени, определяются выражениями типа (1.172) и (1.173).

Представление спиральностей. До сих пор нами рассматривались столкновения частиц со спинами в представлении, задаваемом орбитальными и спиновыми моментами системы. Такой выбор был связан не только с обеспечением сохранения полного момента, но и предопределялся в значительной степени учетом динамических особенностей системы (в частности, удобством параметризации взаимодействия в таком представлении). Хотя матрица столкновений и оказывалась диагональной по квантовым числам полного момента, однако сама процедура сложения моментов и последующие преобразования, вызываемые необходимостью перехода в представление, соответствующее условиям эксперимента, приводили к тому, что окончательные результаты как для амплитуд, так и для сечений (не говоря уже о поляризационных характеристиках) оказывались из-за проведения многократных суммирований по промежуточным состояниям очень громоздкими.

Однако если ограничиться рассмотрением только кинематических особенностей процесса, то оказывается возможным существенно упростить результаты с помощью выбора специального представления. Для этого вместо элементов матрицы столкновений между состояниями с фиксированными значениями орбитального момента, канального спина и полного момента следует ввести ее элементы между состояниями, характеризуемыми полным моментом и проекциями спинов частиц на направления начального и конечного импульсов относительного движения. В результате окончательные выражения для амплитуд и сечений оказываются не сложнее, чем аналогичные выражения в случае бесспиновых частиц, за исключением того, что вместо полиномов Лессандра в эти выражения входят несколько более сложные, но легко расщитаемые функции угла рассеяния. (Такое представление введено в [30].)

Проекция спина на направление импульса частицы называется *спиральностью* (обозначим ее λ). В отличие от проекции спина на произвольную ось в пространстве спиральность для свободной частицы сохраняется (проекция спина на импульс не изменяется при поворотах). Динамическая переменная $\hat{\lambda}$ коммутирует с импульсом и с оператором полного момента. Поскольку составляющая орбитального момента вдоль направления движения равна нулю, то спиральность может считаться также проекцией полного момента частицы на направление импульса. Таким образом, состояния можно классифицировать, задавая как обычно значения полного момента и в то же время приписывая им точные значения спиральности.

Рассмотрим произвольную двухчастичную реакцию

$$a + A \rightarrow B + b.$$

В представлении спиральностей начальное и конечное состояния системы в с. ц. и. будем характеризовать значениями энергии, полного момента и его проекции, а также спиральностей частиц. На энергетической поверхности матрицу столкновений запишем в виде

$$\langle j' M' \lambda'_1 \lambda'_2 | S | j M \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \delta_{jj'} \delta_{MM'}. \quad (1.174)$$

Выше в схеме спин-орбитальной связи спины начальных частиц складывались в каналовой спин s , спины конечных частиц — в s' и вводился матричный элемент $S^I_{l's', ls}$, где l и l' — соответственно начальный и конечный орбитальные моменты. При введении полного спина очень усложнились формулы, описывающие поляризационные эффекты, поэтому для упрощения рассмотрения необходимо отказаться от сложения спинов. В соотношении (1.174) для характеристики спиновых состояний введены индексы спиральности. Хотя спиновые моменты частиц в начальном и конечном состояниях проектируются на различные направления (направления начального и конечного импульсов относительного движения), однако это не приводит к затруднениям. Элементы матрицы столкновений по индексам спиральности

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | S^I | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \equiv S^I_{\lambda'_1 \lambda'_2, \lambda_1 \lambda_2}$$

являются инвариантными величинами. Достоинством использования представления спиральностей является также то, что получаемые результаты допускают непосредственное обобщение на релятивистский случай.

Считая $S_{\lambda_1' \lambda_2', \lambda_1 \lambda_2}^j$ заданными, осуществим переход из $jM\lambda_1\lambda_2$ -представления в $n\lambda_1\lambda_2$ -представление (\mathbf{n} — единичный вектор в направлении импульса относительного движения частиц в с. ц. и.). Согласно общему правилу преобразования матриц

$$\begin{aligned} \langle n' \lambda_1' \lambda_2' | S | n \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \sum_{jM} \langle n' \lambda_1' \lambda_2' | jM \lambda_1' \lambda_2' \rangle \times \\ &\times S_{\lambda_1' \lambda_2', \lambda_1 \lambda_2}^j \langle jM \lambda_1 \lambda_2 | n \lambda_1 \lambda_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.175)$$

где $\langle n' \lambda_1' \lambda_2' | jM \lambda_1' \lambda_2' \rangle$ — функция преобразования, при этом

$$\langle jM \lambda_1 \lambda_2 | n \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle n \lambda_1 \lambda_2 | jM \lambda_1 \lambda_2 \rangle^*$$

[при написании (1.175) мы воспользовались диагональностью матрицы столкновений по полному моменту]. Функция преобразования $\langle n \lambda_1 \lambda_2 | jM \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ представляет собой собственную функцию в импульсном представлении для состояния системы с заданным значением полного момента, характеризующегося квантовыми числами j и M , при заданных значениях спиральностей частиц λ_1 и λ_2 .

Спиральности λ_1 и λ_2 каждой из частиц определяются как проекции спинов частиц на направления их импульсов. Так как нами рассматривается столкновение в с. ц. и., то импульсы частиц равны и противоположно направлены: $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}$ (\mathbf{k} — импульс относительного движения). Поэтому для первой частицы λ_1 — проекция спина на направление $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, в то время как для второй частицы λ_2 — проекция ее спина на направление $-\mathbf{n}_2$. Если рассматривать всю систему как одну частицу, то ей следует приписать спиральность в направлении \mathbf{n} , равную $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Волновая функция для состояния с заданным значением полного момента, характеризующимся квантовыми числами j и M (M — проекция полного момента на неподвижную ось z), и заданным значением спиральности Λ (Λ — проекция полного момента на подвижную ось z' , которая направлена вдоль направления импульса \mathbf{n}) выражается через обобщенную сферическую функцию

$$\langle n \Lambda | j M \Lambda \rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda M}^j(\varphi, \vartheta, 0) \quad (1.176)$$

(φ и ϑ — углы, определяющие ориентацию вектора \mathbf{n}). В функции $D_{\Lambda M}^j(\varphi, \vartheta, 0)$ явно разделяется зависимость от углов ϑ и φ :

$$D_{\Lambda M}^j(\varphi, \vartheta, 0) = \exp(i M \varphi) d_{\Lambda M}^j(\vartheta), \quad (1.177)$$

где $d_{\Lambda M}^j(\vartheta)$ — вещественная функция. Воспользовавшись обозначением [17]

$$D_{\Lambda M}^j(\varphi, \vartheta, 0) \equiv D_{\Lambda M}^j(\mathbf{n}),$$

функцию преобразования запишем в виде

$$\langle n \lambda_1 \lambda_2 | j M \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\lambda_1 - \lambda_2, M}^j(n). \quad (1.178)$$

Используя явный вид функции преобразования, из (1.175) находим

$$\begin{aligned} & \langle n' \lambda'_1 \lambda'_2 | S | n \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ & = \frac{1}{4\pi} \sum_{jM} (2j+1) S_{\lambda'_1 \lambda'_2, \lambda_1 \lambda_2}^j \cdot D_{\Lambda' M}^j(n') D_{\Lambda M}^{j*}(n), \end{aligned} \quad (1.179)$$

где $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ и $\Lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$. Выберем направление начального импульса \mathbf{n} в качестве оси z , тогда

$$D_{\Lambda M}^j(n) = \delta_{\Lambda M},$$

и в результате имеем

$$\langle n' \lambda'_1 \lambda'_2 | S | n \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_j (2j+1) S_{\lambda'_1 \lambda'_2, \lambda_1 \lambda_2}^j D_{\Lambda' \Lambda}^j(n'). \quad (1.180)$$

Таким образом, разложение матрицы столкновений по парциальным составляющим в представлении спиральностей осуществляется с помощью функций $D_{\Lambda' \Lambda}^j(n')$ в качестве коэффициентов.

Аналогичным образом можно определить амплитуду рассеяния или реакции для перехода с фиксированными значениями спиральностей в начальном и конечном состояниях:

$$f_{\gamma \lambda_1 \lambda_2 \rightarrow \gamma' \lambda'_1 \lambda'_2}(k, k') = \sum_j (2j+1) \langle \gamma' \lambda'_1 \lambda'_2 | f^j | \gamma \lambda_1 \lambda_2 \rangle D_{\Lambda' \Lambda}^j(n'), \quad (1.181)$$

где $\langle \gamma' \lambda'_1 \lambda'_2 | f^j | \gamma \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ — так называемая *спиральная амплитуда реакции*:

$$\langle \gamma' \lambda'_1 \lambda'_2 | f^j | \gamma \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{i}{2 \sqrt{k k'}} \sqrt{\frac{\mu_{\gamma'}}{\mu_\gamma}} \{ \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} - S_{\gamma' \lambda'_1 \lambda'_2, \gamma \lambda_1 \lambda_2}^j \}. \quad (1.182)$$

Формула (1.181) представляет собой обобщение обычного разложения амплитуды по полиномам Лежандра для бесспиновых частиц (1.56).

Разложение амплитуды (1.181) полностью описывает все свойства углового распределения частиц, образующихся в результате реакции, связанные с симметрией по отношению к пространственным вращениям. Эти свойства симметрии обусловлены сохранением момента количества движения и отражены в структуре матрицы столкновений (1.175). Для дальнейшего упрощения S -матрицы (выделения независимых параметров) необходимо учесть другие законы сохранения. Инвариантность по отношению к пространственной инверсии приводит к соотношению

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | S^j | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = (-1)^{s_1 + s_2 - s'_1 - s'_2} \eta \langle -\lambda'_1, -\lambda'_2 | S^j | -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle, \quad (1.183)$$

где η — произведение внутренних четностей частиц. Следовательно, при учете закона сохранения четности вдвое сокращается число независимых параметров. Инвариантность по отношению к обращению времени приводит к условию взаимности, которое принимает вид

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | S^I | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1 \lambda_2 | S^I | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle. \quad (1.184)$$

Эти два матричных элемента относятся к различным процессам (прямая и обратная реакции). Однако в случае упругого рассеяния оба процесса совпадают и тогда условие (1.184) налагает связь на матрицу рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния непосредственно определяется квадратом модуля амплитуды (1.181):

$$d\sigma_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = |f_{\lambda_1 \lambda_2 \rightarrow \lambda'_1 \lambda'_2}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 d\Omega, \quad (1.185)$$

а дифференциальное сечение реакции включает еще добавочный множитель

$$d\sigma_{\nu \lambda_1 \lambda_2; \nu' \lambda'_1 \lambda'_2} = \frac{\mu_{\nu'}}{\mu_{\nu}} \frac{k'}{k} |f_{\nu \lambda_1 \lambda_2 \rightarrow \nu' \lambda'_1 \lambda'_2}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 d\Omega. \quad (1.186)$$

Если в (1.185) и (1.186) подставить амплитуду в явном виде (1.181), то сечения рассеяния и реакции описываются единой формулой:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\nu \lambda_1 \lambda_2; \nu' \lambda'_1 \lambda'_2} &\equiv \sigma_{\nu \lambda_1 \lambda_2; \nu' \lambda'_1 \lambda'_2}(\vartheta) d\Omega, \\ \sigma_{\nu \lambda_1 \lambda_2; \nu' \lambda'_1 \lambda'_2}(\vartheta) &= \frac{1}{4k^2} \sum_i \sum_{i'} (2j+1)(2j'+1) \times \\ &\times \{ \delta_{\nu\nu'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} - S^j_{\nu' \lambda'_1 \lambda'_2, \nu \lambda_1 \lambda_2} \} \times \\ &\times \{ \delta_{\nu\nu'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} - S^{j'*}_{\nu' \lambda'_1 \lambda'_2, \nu \lambda_1 \lambda_2} \} d^j_{\Lambda\Lambda'}(\vartheta) d^{j'}_{\Lambda\Lambda'}(\vartheta). \end{aligned} \quad (1.187)$$

Сечение (1.187) относится к случаю, когда и в начальном, и в конечном состояниях частицы имеют определенные спиральности. Отметим, что дифференциальное сечение для переходов между состояниями с определенными спиральностями не зависит от азимутального угла φ .

Используя формулу приведения для обобщенных сферических функций

$$\begin{aligned} d^j_{\lambda\mu} d^{j'}_{\lambda'\mu'} &= (-1)^{\lambda'-\mu'} \sum_l (j\lambda j' - \lambda' | l\lambda - \lambda') \times \\ &\times (j\mu j' - \mu' | l\mu - \mu') d^l_{\lambda-\lambda', \mu-\mu'} \end{aligned} \quad (1.188)$$

и замечая, что $d^l_{00}(\vartheta) = P_l(\cos \vartheta)$, дифференциальное сечение рассеяния или реакции непосредственно выразим через полиномы Лежандра:

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu \lambda_1 \lambda_2; \nu' \lambda'_1 \lambda'_2}(\vartheta) &= \frac{1}{4k^2} \sum_i \sum_{i'} (-1)^{\Lambda-\Lambda'} (2j+1)(2j'+1) \times \\ &\times \{ \delta_{\nu\nu'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} - S^j_{\nu' \lambda'_1 \lambda'_2, \nu \lambda_1 \lambda_2} \} \{ \delta_{\nu\nu'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} - S^{j'*}_{\nu' \lambda'_1 \lambda'_2, \nu \lambda_1 \lambda_2} \} \times \\ &\times \sum_l (j\Lambda j' - \Lambda | l0)(j\Lambda' j' - \Lambda' | l0) P_l(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (1.189)$$

где $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; $\Lambda' = \lambda_1' - \lambda_2'$ и суммирование по l включает все целочисленные значения, возникающие при векторном сложении j и j' .

Если начальные частицы неполяризованы и мы не интересуемся поляризацией конечных частиц, то сечение $d\sigma_{\gamma\lambda_1\lambda_2; \gamma'\lambda_1'\lambda_2'}$ следует усреднить по начальным и просуммировать по всем конечным спиральностям:

$$d\sigma_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{(2s_1+2)(2s_2+1)} \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'} d\sigma_{\gamma\lambda_1\lambda_2; \gamma'\lambda_1'\lambda_2'} \quad (1.190)$$

Пронтегрировав дифференциальное сечение (1.189) по полному телесному углу, нетрудно получить общую формулу для интегрального сечения, соответствующего переходу из начального в конечное состояние с определенными спиральностями частиц. Вклад в интегральное сечение вносит только слагаемое в (1.189) с $l=0$. Замечая, что

$$\langle j\Lambda j' - \Lambda | 00 \rangle = \frac{(-1)^{j-\Lambda}}{\sqrt{2j+1}} \delta_{j\Lambda j'},$$

для интегрального сечения получаем простое выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\lambda_1\lambda_2; \gamma'\lambda_1'\lambda_2'} &= \frac{\pi}{k^2} \sum_i (2j+1) |\delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta_{\lambda_2\lambda_2'} - \\ &- S_{\gamma'\lambda_1'\lambda_2'; \gamma\lambda_1\lambda_2}^j|^2. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Следует отметить, что в интегральном сечении нет интерференции между слагаемыми, соответствующими разным значениям полного момента j . Усреднив (1.191) по начальным и просуммировав по конечным спиральностям, получим полное сечение для неполяризованных частиц

$$\sigma_{\gamma\gamma'} = \sum_j \sigma_{\gamma\gamma'}^{(j)}, \quad (1.192)$$

где величина $\sigma_{\gamma\gamma'}^{(j)}$ называется парциальным сечением и соответствует состоянию с полным моментом j :

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma'}^{(j)} &= \frac{2j+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\pi}{k^2} \sum_i |\delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta_{\lambda_2\lambda_2'} - \\ &- S_{\gamma'\lambda_1'\lambda_2'; \gamma\lambda_1\lambda_2}^j|^2 \end{aligned} \quad (1.193)$$

(суммирование проводится по всем допустимым значениям начальных и конечных спиральностей).

Можно также определить полное сечение для переходов из определенного спинового состояния начальных частиц:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\lambda_1\lambda_2; \gamma'} &= \frac{\pi}{k^2} \sum_i (2j+1) \sum_{\lambda_1'\lambda_2'} |\delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta_{\lambda_2\lambda_2'} - \\ &- S_{\gamma'\lambda_1'\lambda_2'; \gamma\lambda_1\lambda_2}^j|^2. \end{aligned} \quad (1.194)$$

Очевидно, что полное сечение (1.192) представляет собой среднее значение сечения (1.194):

$$\sigma_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sigma_{\gamma\lambda_1 \lambda_2; \gamma'} \quad (1.195)$$

В представлении спиральностей нетрудно получить простые формулы, описывающие различные поляризационные эффекты при рассеянии и реакциях. Пусть поляризация начальных частиц описывается матрицей плотности ρ , удовлетворяющей условию нормировки $\text{Sp } \rho = 1$. Тогда, если мы не интересуемся поляризацией конечных частиц, для дифференциального сечения получим формулу

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma'}(\vartheta, \varphi) = & \frac{\mu_{\gamma}}{\mu_{\gamma'}} \frac{k'}{k} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_1' \lambda_2'} \sum_{\lambda_1'' \lambda_2''} f_{\gamma\lambda_1 \lambda_2 \rightarrow \gamma' \lambda_1' \lambda_2'} \times \\ & \times \rho_{\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1'' \lambda_2''} f_{\gamma\lambda_1'' \lambda_2'' \rightarrow \gamma' \lambda_1' \lambda_2'} \end{aligned} \quad (1.196)$$

Очевидно, что (1.190) является частным случаем (1.196), когда все начальные поляризационные состояния равновероятны, т. е. начальная матрица плотности ρ сводится к единичной матрице. Для того чтобы определить поляризацию продуктов реакции или же среднее значение каких-либо спиновых характеристик, относящихся к этим продуктам, надо найти конечную матрицу плотности ρ' . В представлении спиральностей элементы матрицы плотности ρ' определяются выражением

$$\begin{aligned} \rho'_{\lambda_1' \lambda_2', \lambda_1'' \lambda_2''} = & (\text{Sp } f f^{\dagger})^{-1} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1'' \lambda_2''}} f_{\gamma\lambda_1 \lambda_2 \rightarrow \gamma' \lambda_1' \lambda_2'} \times \\ & \times \rho_{\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1'' \lambda_2''} f_{\gamma\lambda_1'' \lambda_2'' \rightarrow \gamma' \lambda_1' \lambda_2'}^* \end{aligned} \quad (1.197)$$

Воспользовавшись разложением по спиральным амплитудам (1.181), получим

$$\begin{aligned} \rho'_{\lambda_1' \lambda_2', \lambda_1'' \lambda_2''}(\vartheta, \varphi) = & (\sigma_{\gamma\gamma'}(\vartheta, \varphi))^{-1} \frac{1}{4k^2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1'' \lambda_2''}} \sum_{j j'} (2j+1) \times \\ & \times (2j'+1) \{ \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\lambda_1 \lambda_1'} \delta_{\lambda_2 \lambda_2'} - S_{\gamma' \lambda_1' \lambda_2', \gamma \lambda_1 \lambda_2}^j \} \times \\ & \times \rho_{\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1'' \lambda_2''} \{ \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\lambda_1'' \lambda_1''} \delta_{\lambda_2'' \lambda_2''} - S_{\gamma' \lambda_1'' \lambda_2'', \gamma \lambda_1'' \lambda_2''}^{j'} \} \times \\ & \times d_{\Lambda\Lambda'}^j(\vartheta) d_{\Lambda''\Lambda''}^{j'}(\vartheta) \exp[i(\Lambda - \Lambda'')\varphi], \end{aligned} \quad (1.198)$$

где $\Lambda'' = \lambda_1'' - \lambda_2''$ и $\Lambda''' = \lambda_1''' = \lambda_2'''$. Формула приведения для обобщенных сферических функций (1.188) позволяет заменить произведение $d_{\Lambda\Lambda'}^j d_{\Lambda''\Lambda''}^{j'}$ более простыми функциями $d_{\Lambda-\Lambda'', \Lambda'-\Lambda'''}^j$. Однако индексы $\Lambda - \Lambda''$ и $\Lambda' - \Lambda'''$ теперь отличны от нуля, поэтому функции $d_{\Lambda-\Lambda'', \Lambda'-\Lambda'''}^j$ не сводятся к полиномам Лежандра. Следует подчеркнуть, что матрица плотности (1.198), так же как и сечение (1.196), в общем случае зависит от азимутального угла φ .

В заключение еще раз отметим, что представление спиральностей наиболее удобно для выделения кинематических особенностей процессов. Причиной такого удобства является простая связь спиральностей с поляризациями отдельных частиц. Однако для описания динамики процессов удобнее использовать другое представление. В частности, параметризация S -матрицы наиболее просто осуществляется в представлении, когда фиксируется орбитальный момент относительного движения частиц.

ГЛАВА 2

Ж-МАТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

§ 2.1. Условия на волновую функцию на границе области взаимодействия и матрица столкновений

Волновые функции во внешней области. Так как сечения различных реакций полностью определяются матричными элементами S -матрицы, то важнейшей задачей теории является нахождение S -матрицы. Сечение упругого рассеяния σ_e и сечение реакций σ_r выражаются через диагональные элементы S -матрицы согласно (1.78) и (1.81). Нетрудно убедиться, что элементы S -матрицы не только характеризуют асимптотики волновых каналовых функций, но и полностью определяют эти функции в области конфигурационного пространства, где отсутствует взаимодействие. Очевидно, для нахождения S -матрицы необходимо найти волновую функцию во внутренней области. В силу короткодействующего характера ядерных сил будем предполагать, что для каждого канала существует точно определенная поверхность, разграничивающая область взаимодействия от области свободного движения разлетающихся частиц. В случае центрально-симметричного взаимодействия в канале указанная поверхность представляет собой сферу, радиус которой для канала α обозначим через R_α , при этом область взаимодействия соответствует значениям относительного расстояния $r_\alpha < R_\alpha$ и область свободного движения — $r_\alpha > R_\alpha$. Так как волновая функция должна удовлетворять требованиям непрерывности, то на граничной поверхности $r_\alpha = R_\alpha$ внутренняя и внешняя волновые функции, а также их производные должны быть равными друг другу. Используя эти условия, S -матрицу можно выразить через значение логарифмической производной от внутренней волновой функции на поверхности области взаимодействия.

Волновую функцию относительного движения в определенном канале $\psi_{k\alpha}(k_\alpha, r_\alpha) \equiv \psi_{k\alpha}(r_\alpha)$ (r_α — вектор относительного расстояния и k_α — волновой вектор) вне области взаимодействия ($r_\alpha > R_\alpha$) представим в виде разложения по состояниям с различными значениями орбитального момента

$$\psi_k(r) = \sum_{lm} i^l \psi_l(r) Y_{lm}^*(n) Y_{lm}(n'), \quad (2.1)$$

где $n = k/k$ и $n' = r/r$ (здесь и в дальнейшем для упрощения записи индекс α опущен). Введем обозначение

$$\psi_l(r) \equiv u_l(r)/r.$$

Радиальная функция $u_l(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} VC(r) \right] u_l = 0, \quad (2.2)$$

где $VC(r)$ — потенциальная энергия кулоновского взаимодействия частицы и ядра:

$$VC(r) = zZe^2/r$$

(ze и Ze — электрические заряды соответственно частицы и ядра). Уравнение (2.2) справедливо только для внешней области $r > R$, так как в области ядерного взаимодействия движение системы нельзя описать волновой функцией, зависящей от одной координаты.

Уравнение (2.2) допускает два линейно-независимых решения, в качестве которых можно выбрать регулярное (не содержащее особенность при малых значениях r) решение $F_l(r)$ и нерегулярное (содержащее особенность) решение $G_l(r)$. [Так как потенциал $VC(r)$ веществен, то $F_l(r)$ и $G_l(r)$ можно выбрать в виде вещественных функций]. При малых значениях r решения $F_l(r)$ и $G_l(r)$ характеризуются асимптотиками

$$F_l(r) \rightarrow r^{l+1}, G_l(r) \rightarrow r^{-l}, r \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

В отсутствие кулоновского взаимодействия (для нейтронов) решения $F_l(r)$ и $G_l(r)$ непосредственно выражаются через сферические функции Бесселя и Неймана:

$$F_l(r) = krj_l(kr), G_l(r) = krn_l(kr). \quad (2.4)$$

При больших значениях r эти функции имеют асимптотический вид

$$F_l(r) \rightarrow \sin(kr - l\pi/2), G_l(r) \rightarrow -\cos(kr - l\pi/2), r \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

В случае заряженных частиц решения $F_l(r)$ и $G_l(r)$ при $r \rightarrow \infty$ характеризуются более сложным асимптотическим поведением

$$\left. \begin{aligned} F_l(r) &\rightarrow \sin(kr - l\pi/2 - \xi \ln 2kr + \eta_l); \\ G_l(r) &\rightarrow -\cos(kr - l\pi/2 - \xi \ln 2kr + \eta_l), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где η_l — кулоновская фаза рассеяния, определяемая равенством

$$\exp(2i\eta_l) = \Gamma(1 + l + i\xi) / \Gamma(1 + l - i\xi) \quad (2.7)$$

($\xi = zZe^2/\hbar v$ — кулоновский параметр). Асимптотики решений $F_l(r)$ и $G_l(r)$ с учетом кулоновского взаимодействия отличаются от асимптотик (2.5) наличием кулоновской фазы η_l и добавочной фазы $\xi \ln 2kr$, обусловленной дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия.

Вронскиан, составленный из решений уравнения (2.2), не зависит от r , поэтому для его нахождения можно воспользоваться асимптотическим видом решений. Используя (2.5) или (2.6), находим

$$F_l dG_l/dr - G_l dF_l/dr = k. \quad (2.8)$$

Общее решение уравнения (2.2) можно представить в виде суперпозиции двух независимых решений $F_l(r)$ и $G_l(r)$. Однако при рассмотрении ядерных реакций более удобными оказываются линейные комбинации функций $F_l(r)$ и $G_l(r)$, соответствующие на больших расстояниях расходящимся и сходящимся сферическим волнам. Обозначим функции с указанными асимптотиками $u_l^+(r)$ и $u_l^-(r)$ и определим их с помощью соотношения

$$u_l^\pm(r) \equiv \{F_l(r) \pm iG_l(r)\} \exp(\mp i\eta_l). \quad (2.9)$$

Так как функции $F_l(r)$ и $G_l(r)$ вещественны, то

$$u_l^{l^+}(r) = (u_l^{l^-}(r))^*. \quad (2.10)$$

При $r \rightarrow \infty$ функции $u_l^+(r)$ и $u_l^-(r)$ характеризуются асимптотиками

$$u_l^{(\pm)}(r) \rightarrow \mp i \exp\left[\pm i\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \xi \ln 2kr\right)\right]. \quad (2.11)$$

В случае нейтральных частиц решения $u_l^+(r)$ и $u_l^-(r)$ непосредственно выражаются через сферические функции Ханкеля первого и второго рода

$$u_l^+(r) = krh_l^+(kr); \quad u_l^-(r) = krh_l^-(kr). \quad (2.12)$$

Нормируем волновую функцию (2.1) таким образом, чтобы в отсутствие взаимодействия эта функция сводилась к плоской волне с единичной амплитудой. Плоскую волну можно представить в виде ряда по парциальным составляющим

$$\exp(ikr) = \sum_{lm} i^l \psi_l^0(r) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}'), \quad \psi_l^0(r) \equiv u_l^0(r)/r, \quad (2.13)$$

при этом

$$u_l^0(r) = \frac{2\pi}{k} \{u_l^{l^-}(r) + u_l^{l^+}(r)\}, \quad (2.14)$$

т. е. радиальная функция $u_l^0(r)$ представлена в виде суперпозиции сходящейся и расходящейся сферических волн. В общем случае при учете взаимодействия между частицей и ядром радиальную функцию $u_l(r)$ во внешней области также можно представить в виде суперпозиции сходящейся и расходящейся сферических волн

$$u_l(r) = a_l u_l^-(r) + b_l u_l^+(r), \quad r > R, \quad (2.15)$$

однако коэффициент при расходящейся волне отличается от коэффициента при сходящейся волне. При сравнении (2.15) с асимптотикой волновой функции на больших расстояниях (1.52) непосредственно находим

$$a_l - 2\pi/k, \quad b_l - S_l a_l (S_l \equiv S_{l\alpha\alpha}^l). \quad (2.16)$$

Таким образом, каналовая функция во внешней области полностью определяется заданием S -матрицы.

Связь между S -матрицей и логарифмической производной от волновой функции. Свяжем теперь величину S_l с граничными условиями, накладываемыми на волновую функцию на поверхности области взаимодействия $r = R$:

$$f_l \equiv R \frac{du_l(r)/dr}{u_l(r)} \Big|_{r=R}. \quad (2.17)$$

Предположим, что значение логарифмической производной f_l определяется внутренней волновой функцией. Тогда, подставляя в правую часть равенства (2.17) волновую функцию в виде (2.15), получаем общее соотношение, связывающее матричный элемент S_l со значением логарифмической производной f_l :

$$f_l = R \frac{du_l^{(-)}(R)/dR + S_l du_l^{(+)}(R)/dR}{u_l^{(-)}(R) + S_l u_l^{(+)}(R)}. \quad (2.18)$$

Преобразуем это соотношение. Введем вещественные величины Δ_l и s_l , определив их соотношением

$$R \frac{du_l^{(+)}(R)/dR}{u_l^{(+)}(R)} \equiv L(k) \equiv \Delta_l + is_l. \quad (2.19)$$

Величины Δ_l и s_l зависят от волнового числа k , радиуса канала R , момента количества движения l и кулоновского параметра ξ . Используя явный вид функции $u_l^{\pm}(r)$ (2.9), величины Δ_l и s_l непосредственно выражаем через регулярное и нерегулярное решения $F_l(R)$ и $G_l(R)$:

$$\Delta_l \equiv R \frac{F_l(R) F_l'(R) + G_l(R) G_l'(R)}{[F_l(R)]^2 + [G_l(R)]^2}; \quad (2.20)$$

$$s_l \equiv R \frac{F_l(R) G_l'(R) - G_l(R) F_l'(R)}{[F_l(R)]^2 + [G_l(R)]^2} = \frac{kR}{[F_l(R)]^2 + [G_l(R)]^2}. \quad (2.21)$$

Величина $F_l^2 + G_l^2$, стоящая в знаменателях выражений (2.20) и (2.21), равна единице для нейтронов с нулевым орбитальным моментом $l = 0$ и больше единицы для состояний $l \neq 0$ и для заряженных частиц. Обратная величина

$$v_l \equiv 1/(F_l^2 + G_l^2) \quad (2.22)$$

обычно называется *проницаемостью*. Малое $v_l \ll 1$ означает, что частицы слабо проникают в область ядерного взаимодействия, и, следовательно, ядерные реакции характеризуются малой интенсивностью.

Кроме Δ_l и s_l введем также вещественную фазу ζ_l , связывающую значения функций $u_l^{(-)}(r)$ и $u_l^{(+)}(r)$ при $r = R$:

$$u_l^{(-)}(R)/u_l^{(+)}(R) \equiv -\exp(2i\zeta_l). \quad (2.23)$$

Для нейтральных частиц абсолютное значение фазы ζ_l уменьшается с уменьшением проницаемости v_l и стремится к нулю при очень малых значениях v_l . Предельные значения фазы ζ_l для нейтральных частиц при очень малых и больших энергиях соответственно равны:

$$\zeta_l \approx \begin{cases} -\frac{(kR)^{2l+1}}{(2l-1)!!(2l+1)!!}, & kR \ll l; \\ -\left(kR - \frac{l\pi}{2}\right), & kR \gg l. \end{cases} \quad (2.24)$$

В случае заряженных частиц фаза ζ_l стремится при высоких энергиях к тому же пределу, а при малых энергиях сводится к чисто кулоновской фазе:

$$\zeta_l \approx \begin{cases} \eta_l, & kR \ll l; \\ -\left(kR - \frac{l\pi}{2}\right), & kR \gg l. \end{cases} \quad (2.25)$$

Используя определения (2.19) и (2.23) и решая (2.18) относительно S_l , получаем

$$S_l = \frac{f_l - \Delta_l + is_l}{f_l - \Delta_l - is_l} \exp(2i\zeta_l). \quad (2.26)$$

Это соотношение полностью определяет S_l по заданному значению логарифмической производной волновой функции на поверхности области взаимодействия f_l .

Логарифмическая производная от волновой функции и сечения. Если логарифмическая производная f_l вещественна, то из (2.26) следует, что $|S_l| = 1$. В этом случае сечение реакций (1.83) обращается в нуль. Таким образом, вещественное значение логарифмической производной означает, что в системе возможно только упругое рассеяние, не сопровождающееся какими-либо реакциями (отсутствует уход частиц из выходного канала). В общем случае (при наличии неупругих процессов) S_l должна удовлетворять условию $|S_l| < 1$. Это условие выполняется, если логарифмическая производная f_l комплексна, причем мнимая часть логарифмической производной — отрицательная величина ($\text{Im } f_l < 0$).

Согласно общему выражению (1.82) максимальное сечение упругого рассеяния получается при $S_l = -1$, т. е. когда расходящаяся волна имеет ту же интенсивность, что и сходящаяся, но смещена по фазе на π . Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться, что это значение S_l достигается, если логарифмическая производная описывается выражением

$$f_l = \Delta_l - s_l \operatorname{tg} \zeta_l. \quad (2.27)$$

В предельном случае рассеяния на непроницаемой сфере радиуса R логарифмическая производная f_l обращается в бесконечность, при этом

$$S_l = \exp(2i\zeta_l) \quad (f_l \rightarrow \infty).$$

Следовательно, введенная фаза ζ_l имеет смысл фазы потенциального рассеяния на непроницаемой сфере.

Выражение (2.26) удобно переписать в виде

$$S_l = \left\{ 1 + \frac{2is_l}{f_l - \Delta_l - is_l} \right\} \exp(2i\zeta_l). \quad (2.28)$$

Первое слагаемое описывает чисто *потенциальное рассеяние*, в то время как второе слагаемое — рассеяние, связанное с взаимодействием во внутренней области. Используя (2.28), общее выражение для парциального сечения упругого рассеяния запишем в виде

$$\sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) \left| \exp(-2i\zeta_l) - 1 - \frac{2is_l}{f_l - \Delta_l - is_l} \right|^2. \quad (2.29)$$

Заметим, что потенциальное рассеяние и рассеяние, связанное с взаимодействием во внутренней области, в общем случае не разделяются, так как имеет место интерференция. Аналогичным образом, используя (2.28), выражение для парциального сечения реакций запишем в виде

$$\sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) \frac{-4s_l \operatorname{Im} f_l}{(\operatorname{Re} f_l - \Delta_l)^2 + (\operatorname{Im} f_l - s_l)^2}. \quad (2.30)$$

Согласно (2.30) мнимая часть f_l должна быть отрицательной или равной нулю. Наличие множителя s_l в числителе выражения (2.30) находится в соответствии с высказанным ранее утверждением о том, что малая проницаемость v_l приводит к очень малому значению сечения реакций.

При взаимодействии незаряженных частиц с орбитальным моментом относительного движения, равным нулю ($l = 0$), формулы (2.29) и (2.30) упрощаются. Замечая, что при $l = 0$ для незаряженных частиц $\Delta_0 = 0$, $s_0 = kR$ и $\zeta_0 = -kR$, сечение упругого рассеяния и сечение реакции можно представить в виде

$$\sigma_e^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \left| \exp(2ikR) - 1 - \frac{2ikR}{f_0 - ikR} \right|^2; \quad (2.31)$$

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \frac{-4kR \operatorname{Im} f_0}{(\operatorname{Re} f_0)^2 + (\operatorname{Im} f_0 - kR)^2}. \quad (2.32)$$

Этими формулами обычно описываются упругое рассеяние и поглощение медленных нейтронов ядрами, когда выполняется условие $kR \ll 1$. Формулы (2.29) и (2.30) устанавливают общую связь между парциальными сечениями упругого рассеяния и реакций $\sigma_e^{(l)}$ и $\sigma_r^{(l)}$ и логарифмической производной от радиальной волновой функции на поверхности области взаимодействия f_l . Следовательно, задача о нахождении сечений непосредственно сводится к определению логарифмической производной и ее зависимости от энергии на основе каких-либо правдоподобных допущений о характере взаимодействия во внутренней области. Такой подход для описания ядерных реакций был предложен в [3], [32]. Феноменологическая теория ядерных реакций, основанная на таком подходе, детально разработана и изложена в книге Блатта и Вайскопфа [5].

Строгая формулировка теории ядерных реакций на основе метода граничных условий впервые предложена в работе Канура и Пайерлса [33]. В дальнейшем строгая теория ядерных реакций получила развитие в рамках так называемого \mathfrak{R} -матричного формализма, разработанного Вигнером и сотрудниками [34, 35]. В \mathfrak{R} -матричной теории вместо логарифмической производной от радиальной волновой функции на поверхности области взаимодействия f_l вводится обратная величина $\mathfrak{R}_l \equiv f_l^{-1}$, называемая \mathfrak{R} -функцией (если открыто несколько каналов, вводится \mathfrak{R} -матрица), которая определяется взаимодействием во внутренней области и сопоставляется с возможными состояниями системы, при этом в самом общем виде устанавливается ее энергетическая зависимость, а тем самым и зависимость S -матрицы от энергии системы. Детальное изложение \mathfrak{R} -матричного формализма содержится в [36]. Энергетическая зависимость сечений вблизи порогов исследована в [37—39].

§ 2.2. \mathfrak{R} -функция

Дисперсионная формула в случае одного канала. Ознакомимся с формальным аппаратом \mathfrak{R} -матричной теории на простейшем примере потенциального рассеяния бесспиновых незаряженных частиц, когда открыт только канал упругого рассеяния. Радиальная волновая функция $u_l(r)$ в состоянии с определенным моментом l удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u_l = 0, \quad (2.33)$$

где $V(r)$ — потенциал взаимодействия, отличный от нуля только в области $r < R$. Выберем два произвольных значения энергии E_1 и E_2 и обозначим соответствующие волновые функции $u_l^{(1)}(r)$ и $u_l^{(2)}(r)$ [каждая из функций удовлетворяет уравнению (2.33)]. Умножим уравнение для первой функции на вторую функцию, а уравнение для второй функции на первую функцию и вычтем второй результат из первого. Интегрируя затем полученную разность по r от нуля до радиуса взаимодействия R и замечая, что волновые функции $u_l^{(1)}(r)$ и $u_l^{(2)}(r)$ при $r = 0$ обращаются в нуль, получаем следующее общее соотношение (формулу Грина):

$$\left(\frac{du_l^{(1)}}{dr} u_l^{(2)} - u_l^{(1)} \frac{du_l^{(2)}}{dr} \right) \Big|_{r=R} = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_2 - E_1) \int_0^R dr u_l^{(1)} u_l^{(2)}. \quad (2.34)$$

Рассмотрим далее некоторую полную систему состояний, заданных внутри области взаимодействия $r \leq R$. Выберем в качестве состояний решения уравнения (2.33), характеризующиеся нулевой производной на поверхности $r = R$. Очевидно, что производная от решения уравнения (2.33) может обращаться в нуль только при определенных значениях энергии. Назовем эти значения энергии собственными значениями E_λ , а соответствующие решения — собственными функциями

$u_i^{(\lambda)}(r)$. Итак, собственные функции $u_i^{(\lambda)}(r)$ — решения уравнения (2.33), удовлетворяющие при $r = R$ граничному условию

$$\left. \frac{du_i^{(\lambda)}(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad (2.35)$$

[при $r = 0$ функции $u_i^{(\lambda)}(r)$ обращаются в нуль]. Если взаимодействие инвариантно относительно обращения времени, то волновые функции $u_i^{(\lambda)}(r)$ могут быть выбраны вещественными. Действительно, так как обращенная во времени функция $u_i^{(\lambda)}(r)^*$ является решением уравнения (2.33), то вещественная функция $u_i^{(\lambda)}(r) + u_i^{(\lambda)*}(r)$ представляет собой также решение. Поскольку граничное условие (2.35) вещественно, то для описания системы можно пользоваться вещественными функциями $u_i^{(\lambda)}(r)$. Подставляя в соотношение (2.34) собственные функции $u_i^{(\lambda)}(r)$ и $u_i^{(\lambda')}(r)$, соответствующие разным собственным значениям энергии E_λ и $E_{\lambda'}$, нетрудно убедиться, что во внутренней области функции ортогональны:

$$\int_0^R dr u_i^{(\lambda)}(r) u_i^{(\lambda')}(r) = 0, \lambda \neq \lambda'.$$

Пронормируем эти функции согласно условию

$$\int_0^R dr u_i^{(\lambda)}(r) u_i^{(\lambda')}(r) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.36)$$

Собственные вещественные функции $u_i^{(\lambda)}(r)$ в области взаимодействия образуют полную систему.

Решение уравнения (2.33) при произвольной энергии E обозначим $u_i^E(r)$. Это решение в области взаимодействия можно разложить в ряд по собственным функциям $u_i^{(\lambda)}(r)$:

$$u_i^E(r) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} u_i^{(\lambda)}(r) \quad (0 < r \leq R),$$

где

$$c_{\lambda} = \int_0^R dr u_i^E(r) u_i^{(\lambda)}(r).$$

Воспользовавшись формулой Грина (2.34), найдем

$$c_{\lambda} = \frac{\hbar^2}{2\mu} u_i^{(\lambda)}(R) \left(\frac{du_i^E(r)}{dr} \right)_R \Big/ (E_{i\lambda} - E),$$

и, следовательно,

$$u_i^E(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{du_i^E(r)}{dr} \right)_R \sum_{\lambda} \frac{u_i^{(\lambda)}(r) u_i^{(\lambda)}(R)}{E_{i\lambda} - E}. \quad (2.37)$$

Это соотношение связывает значение волновой функции при произвольной энергии E в области взаимодействия со значением производной этой же функции на поверхности, ограничивающей область взаимодействия. Заметим, что ряд (2.37) не является равномерно сходящимся вблизи поверхности $r = R$, поэтому находить значение производной функции $u_l^E(r)$ при $r = R$ путем непосредственного дифференцирования правой части (2.37) нельзя.

Введем \mathfrak{R} -функцию для состояния с определенным орбитальным моментом l , которую обозначим через $\mathfrak{R}_l(E)$ и определим следующим образом:

$$u_l^E(R) = R \frac{du_l^E(R)}{dR} \mathfrak{R}_l(E). \quad (2.38)$$

Согласно определению \mathfrak{R} -функция связывает значение волновой функции системы и ее производную на поверхности области взаимодействия. Величина $\mathfrak{R}_l(E)$ равна обратному значению логарифмической производной волновой функции на поверхности области взаимодействия $f_l(E)$:

$$\mathfrak{R}_l(E) = \frac{1}{f_l(E)}.$$

Используя разложение (2.37), для \mathfrak{R} -функции нетрудно получить так называемую *дисперсионную формулу*

$$\mathfrak{R}_l(E) = \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - E}, \quad (2.39)$$

где введено обозначение

$$\theta_{l\lambda}^2 \equiv \frac{\hbar^2 j_l}{2\mu R} [u_l^{(j_l)}(R)]^2. \quad (2.40)$$

Величина $\theta_{l\lambda}$ называется амплитудой приведенной ширины, а $\theta_{l\lambda}^2$ — *приведенной шириной уровня* энергии $E_{l\lambda}$. Приведенная ширина определяется значением внутренней волновой функции на поверхности, ограничивающей область взаимодействия, и характеризует вероятность обнаружения частицы на этой поверхности.

Соотношение (2.37) перепишем в виде

$$u_l^E(r) = G_l^E(r, R) R \frac{du_l^E(R)}{dR},$$

воспользовавшись определением функции Грина для уравнения (2.33):

$$G_l^E(r, R) = \frac{\hbar^2}{2\mu R} \sum_{\lambda} \frac{u_l^{(j_l)}(r) u_l^{(j_l)}(R)}{E_{l\lambda} - E}. \quad (2.41)$$

\mathfrak{R} -функция непосредственно выражается через граничное значение функции Грина

$$\mathfrak{R}_l(E) = G_l^E(R, R). \quad (2.42)$$

Формула (2.39) в общем виде устанавливает зависимость \mathfrak{R} -функции от энергии. Величины $E_{1\lambda}$ и $\theta_{1\lambda}^0$ определяются физическими свойствами системы и от энергии E не зависят. Согласно (2.39) \mathfrak{R} -функция полностью определяется состояниями внутри области взаимодействия, характеризуемыми определенными собственными значениями энергии $E_{1\lambda}$ и приведенными ширинами $\theta_{1\lambda}^0$. Формула (2.39) определяет \mathfrak{R} -функцию при вещественных и при комплексных значениях энергии E . На комплексной плоскости E функция $\mathfrak{R}_l(E)$ является аналитической функцией с простыми полюсами, значения которых совпадают с собственными значениями энергии $E_{1\lambda}$, а вычеты выражаются через приведенные ширины $\theta_{1\lambda}^0$. Заметим, что собственные значения энергии $E_{1\lambda}$ вещественны, а приведенные ширины $\theta_{1\lambda}^0$ — вещественны и положительны. На вещественной оси E (т. е. при физических значениях энергии) \mathfrak{R} -функция вещественна.

Заметим, что полюсам функции $\mathfrak{R}_l(E)$ соответствуют простые нули логарифмической производной волновой функции на поверхности области взаимодействия $f_l(E)$:

$$f_l(E)|_{E=E_{1\lambda}} = 0. \quad (2.43)$$

Значение производной по энергии от логарифмической производной волновой функции на поверхности области взаимодействия при $E = E_{1\lambda}$ непосредственно выражается через приведенную ширину $\theta_{1\lambda}^0$

$$\left. \frac{df_l(E)}{dE} \right|_{E=E_{1\lambda}} = -\frac{1}{\theta_{1\lambda}^0}. \quad (2.44)$$

Связь между \mathfrak{R} -функцией и матрицей столкновений. Установим связь между \mathfrak{R} -функцией и матрицей столкновений. Так как в рассматриваемом случае (открыт только канал упругого рассеяния) \mathfrak{R} -функция совпадает с обратным значением логарифмической производной от волновой функции на поверхности области взаимодействия, то из (2.26) непосредственно находим

$$S_l = \frac{1 - (\Delta_l - is_l) \mathfrak{R}_l}{1 - (\Delta_l + is_l) \mathfrak{R}_l} \exp(2i\zeta_l). \quad (2.45)$$

Поскольку \mathfrak{R}_l вещественна, то числитель и знаменатель в (2.45) комплексно сопряжены, поэтому модуль S_l равен единице. Следовательно, S_l можно представить в виде

$$S_l = \exp(2i\delta_l),$$

где δ_l — вещественная фаза рассеяния. (Вещественность δ_l отражает тот факт, что из рассмотрения исключены реакции.) Используя (2.45), находим фазу рассеяния

$$\delta_l = \arctg \frac{s_l \mathfrak{R}_l}{1 - \Delta_l \mathfrak{R}_l} + \zeta_l, \quad (2.46)$$

где величины Δ_l , s_l и ζ_l заданы соотношениями (2.20), (2.21) и (2.23). Зависимость фазы рассеяния δ_l от энергии E определяется энергетической зависимостью \mathfrak{R} -функции (2.39). С помощью (2.45) нетрудно

показать, что сечение рассеяния в зависимости от энергии E может характеризоваться максимумами (резонансами).

Однорезонансное приближение. Рассмотрим простейший случай. Пренебрежем потенциальным рассеянием и предположим, что энергия E достаточно близка к энергии одного из уровней $E_{l\lambda}$, так что в разложении (2.39) можно пренебречь вкладом всех уровней, за исключением $E_{l\lambda}$:

$$\mathfrak{R}_l(E) \approx \theta_{l\lambda}^2 / (E_{l\lambda} - E). \quad (2.47)$$

В таком однорезонансном приближении фаза рассеяния принимает вид

$$\delta_l = \arctg \frac{s_l \theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - \Delta_l \theta_{l\lambda}^2 - E} \quad (2.48)$$

и соответственно сечение рассеяния описывается формулой

$$\sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\gamma_{l\lambda}^2}{(E - \tilde{E}_{l\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{l\lambda}^2}, \quad (2.49)$$

где

$$\gamma_{l\lambda} = 2s_l \theta_{l\lambda}^2; \quad (2.50)$$

$$\tilde{E}_{l\lambda} = E_{l\lambda} - \Delta_l \theta_{l\lambda}^2. \quad (2.51)$$

Согласно (2.49) сечение рассеяния в зависимости от энергии E характеризуется максимумом при *резонансной энергии* $\tilde{E}_{l\lambda}$, ширина резонансного максимума определяется $\gamma_{l\lambda}$ ($\gamma_{l\lambda}$ называется *шириной резонанса*)*. Заметим, что резонансные значения энергии $\tilde{E}_{l\lambda}$ не совпадают с собственными значениями $E_{l\lambda}$. Сдвиг резонансной энергии $\tilde{E}_{l\lambda}$ относительно собственного значения $E_{l\lambda}$ зависит от вещественной части логарифмической производной внешней волновой функции и приведенной ширины уровня $\theta_{l\lambda}^2$:

$$\tilde{E}_{l\lambda} - E_{l\lambda} = -\Delta_l \theta_{l\lambda}^2. \quad (2.52)$$

Однорезонансная формула для сечения рассеяния (2.49) справедлива, если ширина резонанса $\gamma_{l\lambda}$ намного меньше расстояния между отдельными резонансами $\tilde{E}_{l\lambda}$. Для применимости формулы необходимо также, чтобы энергия E была близка к резонансной энергии $\tilde{E}_{l\lambda}$. Кроме того, для применимости представления \mathfrak{R} -функции в виде (2.47) необходимо, чтобы энергия E была близка к собственному значению $E_{l\lambda}$. Эти условия означают, что резонансный сдвиг (2.52) должен быть намного меньше расстояния между уровнями.

Ширина резонанса $\gamma_{l\lambda}$ пропорциональна мнимой части логарифмической производной внешней волновой функции s_l и приведенной ширине уровня $\theta_{l\lambda}^2$. Очевидно, ширина резонанса $\gamma_{l\lambda}$ зависит от энергии E . Ширина резонанса $\gamma_{l\lambda}$ при $E \approx E_{l\lambda}$ совпадает с шириной уров-

* Резонансная формула для сечения впервые была получена Брейтом и Вигнером [40].

ния $E_{l\lambda}$. Действительно, состояние $u_l^{(\lambda)}(r)$ при $E_{l\lambda} = E$ ($E > 0$) является квазистационарным, поэтому во внешней области ($r > R$) это состояние будет описываться функцией $u_l^{(+)}(r)$. Ширину уровня $\Gamma_{l\lambda}$ нетрудно найти, вычислив вероятность испускания частицы из области взаимодействия во внешнюю область за единицу времени. Эта вероятность определяется потоком через граничную поверхность $r = R$:

$$\omega_{l\lambda} = \frac{i\hbar}{2\mu} \sum_m \int d\Omega \left(u_l^{(+)} \frac{du_l^{(+)*}}{dr} - u_l^{(+)*} \frac{du_l^{(+)}}{dr} \right)_{r=R} |Y_{lm}|^2, \quad (2.53)$$

где $u_l^{(+)}$ — радиальная волновая функция частицы во внешней области и интегрирование проводится по полному телесному углу. Ширина уровня $\Gamma_{l\lambda}$ связана с вероятностью $\omega_{l\lambda}$ соотношением

$$\Gamma_{l\lambda} = \hbar\omega_{l\lambda}. \quad (2.54)$$

Используя нормировку шаровых функций и определение (2.19), находим

$$\Gamma_{l\lambda} = \frac{\hbar^2}{\mu R} s_l(E) |u_l^{(+)}(R)|^2, \quad E = E_{l\lambda}. \quad (2.55)$$

Так как внутренняя и внешняя волновые функции $u_l^{(\lambda)}(r)$ и $u_l^{(+)}(r)$ при $r = R$ совпадают, то эту формулу перепишем в виде

$$\Gamma_{l\lambda} = 2s_l(E_{l\lambda}) \theta_{l\lambda}^2.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\Gamma_{l\lambda} = \gamma_{l\lambda}(E_{l\lambda}). \quad (2.56)$$

Учитывая малость сдвига резонансной энергии $\tilde{E}_{l\lambda}$ относительно собственного значения $E_{l\lambda}$ и монотонный характер зависимости ширины резонанса от энергии, приближенно можно считать, что

$$\gamma_{l\lambda}(E_{l\lambda}) \approx \gamma_{l\lambda}(\tilde{E}_{l\lambda}).$$

Поэтому ширину уровня $\Gamma_{l\lambda}$ приближенно можно сопоставлять с шириной резонанса при резонансной энергии $\gamma_{l\lambda}(\tilde{E}_{l\lambda})$.

Если отказаться от пренебрежения потенциальным рассеянием, то в выражении для фазы (2.48) необходимо учесть дополнительное слагаемое ξ_i :

$$\delta_l = \arctg \frac{s_l \theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - \Delta_l \theta_{l\lambda}^2 - E} + \xi_l. \quad (2.57)$$

В этом случае для сечения рассеяния получим более сложное выражение

$$\sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left\{ 4 \sin^2 \xi_l - \frac{\gamma_{l\lambda} [2(E - \tilde{E}_{l\lambda}) \sin 2\xi_l + \gamma_{l\lambda} (1 - \cos 2\xi_l)]}{(E - \tilde{E}_{l\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{l\lambda}^2} + \frac{\gamma_{l\lambda}^2}{(E - \tilde{E}_{l\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{l\lambda}^2} \right\}. \quad (2.58)$$

Первое слагаемое в (2.58) описывает потенциальное рассеяние, второе — интерференцию между потенциальными и резонансными рассеяниями, третье — *резонансное рассеяние*.

Однорезонансное приближение (2.47) можно существенно улучшить, положив

$$\Re_l(E) = \frac{\theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - E} + \Re_l^0(E), \quad (2.59)$$

где $\Re_l^0(E)$ описывает вклад всех остальных уровней, кроме $E_{l\lambda}$. В отличие от резонансного слагаемого $\Re_l^0(E)$ слабо зависит от энергии E . Используя (2.59), для фазы рассеяния δ_l можно получить выражение вида (2.57), однако с измененными параметрами и добавочной нерезонансной фазой. Заметим, что нерезонансная фаза, обусловленная вкладом всех уровней, кроме резонансного, по порядку величины совпадает с фазой потенциального рассеяния.

Зависимость \Re -функции от граничного условия. Формула (2.39) в общем виде устанавливает зависимость \Re -функции от энергии, при этом расположение полюсов и значения вычетов определяются физическими свойствами системы. Если потенциал взаимодействия $V(r)$ известен, то параметры $E_{l\lambda}$ и $\theta_{l\lambda}^2$, входящие в \Re -функцию, можно определить, найдя систему собственных решений уравнения (2.33) с граничным условием (2.35). Очевидно, собственные значения $E_{l\lambda}$ и величины $\theta_{l\lambda}^2$ будут зависеть от выбора граничного условия. Рассмотрим вместо (2.35) граничное условие более общего вида

$$R \left. \frac{du_l(r)/dr}{u_l(r)} \right|_{r=R} = B, \quad (2.60)$$

где B — некоторое вещественное число. Решения уравнения (2.33), удовлетворяющие граничному условию (2.60), также образуют во внутренней области полную систему ортонормированных функций. Используя формулу Грина (2.34), для коэффициентов разложения волновой функции $u_l^E(r)$ по новым собственным функциям $u_l^{(\lambda)}(r)$ находим

$$c_\lambda = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(u_l^{(\lambda)} \frac{du_l^E}{dr} - u_l^E \frac{du_l^{(\lambda)}}{dr} \right)_R \bigg/ (E_{l\lambda} - E),$$

поэтому само разложение можно представить в виде

$$u_l^E(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu R} \left(R \frac{du_l^E(r)}{dr} - B u_l^E(r) \right)_R \sum_\lambda \frac{u_l^{(\lambda)}(r) u_l^{(\lambda)}(R)}{E_{l\lambda} - E}. \quad (2.61)$$

Положив в этом соотношении $r = R$ и потребовав, чтобы \Re -функция с новым граничным условием по-прежнему определялась выражением

$$\Re_l^B(E) = \sum_\lambda \frac{\theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - E}, \quad (2.62)$$

получим

$$\Re_l^B(E) = (f_l - B)^{-1}, \quad (2.63)$$

где f_l — логарифмическая производная от радиальной волновой функции при заданной энергии E :

$$f_l = R \frac{du_l^E(R)/dR}{u_l^E(R)}.$$

(Логарифмическая производная f_l не зависит от B .)

Введя \mathfrak{R} -функцию, отвечающую граничному условию с нулевой логарифмической производной $B = 0$,

$$\mathfrak{R}_l^{B=0}(E) = 1/f_l, \quad (2.64)$$

соотношение (2.63) можно переписать в виде

$$\mathfrak{R}_l^B(E) = \frac{\mathfrak{R}_l^{B=0}(E)}{1 - B\mathfrak{R}_l^{B=0}(E)}. \quad (2.65)$$

Легко видеть, что выражение для фазы рассеяния при выборе нового граничного условия не изменится, если одновременно с выбором нового граничного условия уменьшить фактор сдвига Δ_l на B , т. е. произвести замену $\Delta_l \rightarrow \tilde{\Delta}_l = \Delta_l - B$. Действительно,

$$\delta_l^B \rightarrow \delta_l'^B = \arctg \frac{s_l \mathfrak{R}_l^B}{1 - (\Delta_l - B) \mathfrak{R}_l^B} = \arctg \frac{s_l \mathfrak{R}_l^{B=0}}{1 - \Delta_l \mathfrak{R}_l^{B=0}} = \delta_l^{B=0}.$$

По этой причине при указанной замене характер энергетической зависимости сечения также не изменится.

Зная положение уровней и приведенные ширины для граничного условия $B = 0$, нетрудно найти соответствующие величины и для граничного условия $B \neq 0$. Из (2.63) непосредственно следует, что энергии являются решениями уравнения

$$\mathfrak{R}_l^{B=0}(E) = 1/B. \quad (2.66)$$

Если известна \mathfrak{R} -матрица, то значение приведенной ширины $\theta_{l\lambda}^B$, отвечающей уровню $E_{l\lambda}$, определяется равенством

$$\theta_{l\lambda}^B = \frac{\mathfrak{R}_l^B}{\frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial E}} \Big|_{E=E_{l\lambda}}. \quad (2.67)$$

Нетрудно проверить, что отношение $\mathfrak{R}_l^2 / \frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial E}$ не зависит от выбора граничного условия. Действительно, используя (2.63), находим

$$\mathfrak{R}_l^2 / \frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial E} = - \left(\frac{\partial f_l}{\partial E} \right)^{-1}.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{R}_l^B)^2 \Big| \frac{\partial \mathfrak{R}_l^B}{\partial E} = (\mathfrak{R}_l^{B=0})^2 \Big| \frac{\partial \mathfrak{R}_l^{B=0}}{\partial E}.$$

Подставляя это соотношение в (2.67) и используя (2.66), для приведенной ширины $\theta_{l\lambda}^B$ получаем следующую формулу:

$$(\theta_{l\lambda}^B)^2 = \left[B^2 \left(\frac{\partial \Re^{B=0}}{\partial E} \right)_{E=E_{l\lambda}^B} \right]^{-1}. \quad (2.68)$$

В заключение отметим, что характер энергетической зависимости \Re -функции совершенно не зависит от выбора граничного условия, накладываемого на внутренние волновые функции. Это граничное условие, так же как и взаимодействие, проявляющееся во внутренней области, сказывается только на величинах собственных уровней энергии и значениях приведенных ширин.

З а д а ч и

1. Вывести дисперсионную формулу для \Re -функции в случае прямоугольной потенциальной ямы.

2. Получить дисперсионную формулу для S -матрицы, описывающую рассеяние в центрально-симметричном поле, воспользовавшись в области взаимодействия системой собственных функций $u_l^{(\lambda)}(r)$, удовлетворяющих граничному условию [33]

$$R \frac{du_l^{(\lambda)}(r)}{dr} \Big|_{r=R} = f_l^{(+)}(E) u_l^{(\lambda)}(R), \quad (2.69)$$

где $f_l^{(+)}(E)$ — логарифмическая производная для расходящейся волны $u_l^{(+)}(r)$:

$$f_l^{(+)}(E) \equiv \frac{R \frac{du_l^{(+)}(r)}{dr} \Big|_{r=R}}{u_l^{(+)}(R)} \times \\ \times \left(u_l^{(+)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -i \exp \left[i \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right], E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} > 0 \right).$$

Волновая функция $u_l^E(r)$, описывающая рассеяние в системе при энергии E , удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u_l = 0, \quad (2.70)$$

где $V(r)$ — потенциал, отличный от нуля в области $r < R$ [в силу обратимости времени $V^*(r) = V(r)$]. Во внешней области ($r > R$) волновая функция $u_l^E(r)$ выражается через сходящуюся и расходящуюся волны $u_l^{(-)}(r)$ и $u_l^{(+)}(r)$:

$$u_l^E(r) = \frac{2\pi}{k} \{ u_l^{(-)}(r) + S_l u_l^{(+)}(r) \}, \quad r > R. \quad (2.71)$$

Введем во внутренней области ($r < R$) систему собственных функций $u_l^{(\lambda)}(r)$, являющихся решениями уравнения (2.70) при фиксированных значениях энергии E и удовлетворяющих граничному условию (2.69), в котором E является параметром. Собственные значения энергии $E_{l\lambda}$ находятся из граничного условия. Так как граничное условие (2.69) комплексно, то собственные значения $E_{l\lambda}$ также комплексны. Заметим, что собственные значения $E_{l\lambda}$ зависят от волнового числа k , т. е. от энергии рассеиваемой частицы E . Используя уравнение (2.70), нетрудно показать, что собственные функции $u_l^{(\lambda)}(r)$ и $u_l^{(\lambda')}(r)$, отвечаю-

щие различным уровням $E_{l\lambda}$ и $E_{l\lambda'}$, ортогональны. Пронормируем собственные функции $u_l^{(\lambda)}(r)$ согласно условию

$$\int dr u_l^{(\lambda)}(r) u_l^{(\lambda')}(r) = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Функции $u_l^{(\lambda)}(r)$ образуют полную систему функций. Отметим, что ортогональность имеет место между функциями $u_l^{(\lambda)}(r)$ и $u_l^{(\lambda')}(r)$, а не между $u_l^{(\lambda)}(r)$ и $u_l^{(\lambda')*}(r)$ [ортогональность существенным образом зависит от того обстоятельства, что функции $u_l^{(\lambda)}(r)$ и $u_l^{(\lambda')}(r)$ подчиняются одному и тому же граничному условию].

Собственные значения $E_{l\lambda}$ зависят от энергии рассеиваемой частицы E . Мнимую часть собственного значения энергии $E_{l\lambda}$ нетрудно найти, воспользовавшись соотношением Грина для уравнения (2.70):

$$E_{l\lambda} = \text{Re } E_{l\lambda} - \frac{i}{2} \gamma_{l\lambda}, \quad \gamma_{l\lambda} = s_l(E) \frac{\hbar^2}{\mu R} |u_l^{(\lambda)}(R)|^2 \int_0^R dr |u_l^{(\lambda)}(r)|^2, \quad (2.72)$$

где $s_l(E)$ — коэффициент проницаемости для рассеиваемой частицы. При малых энергиях E функция $u_l^{(\lambda)}(r)$ содержит небольшую мнимую часть, при этом знаменатель в (2.72) близок к единице. В этом случае

$$\gamma_{l\lambda} \approx s_l(E) \frac{\hbar^2}{\mu R} |u_l^{(\lambda)}(R)|^2. \quad (2.73)$$

Граничное условие (2.69) означает, что при $E_{l\lambda} = E$ собственная функция $u_l^{(\lambda)}(r)$ описывает *распадающееся состояние*. Действительно, при $E_{l\lambda} = E$ функция $u_l^{(\lambda)}(r)$, определенная во внутренней области $r < R$, гладким образом сшивается на поверхности $r = R$ с функцией $u_l^{(+)}(r)$, поэтому на больших расстояниях $r \rightarrow \infty$ асимптотика функции $u_l^{(\lambda)}(r)$ содержит только расходящуюся волну:

$$u_l^{(\lambda)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ik_{l\lambda} r); \quad k_{l\lambda} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} E_{l\lambda}}.$$

Энергия распадающегося состояния комплексна. Мнимая часть энергии определяет ширину уровня распадающегося состояния $\Gamma_{l\lambda}$:

$$\Gamma_{l\lambda} \equiv \gamma_{l\lambda}(E_{l\lambda}) = s_l(E_{l\lambda}) \frac{\hbar^2}{\mu R} |u_l^{(\lambda)}(R)|^2 \int_0^R dr |u_l^{(\lambda)}(r)|^2. \quad (2.74)$$

Это соотношение допускает простую физическую интерпретацию. Числитель в правой части (2.74) равен коэффициенту проницаемости частицы, умноженному на вероятность того, что частица окажется на поверхности области взаимодействия, в то время как знаменатель равен вероятности того, что частица находится в ядре.

Волновую функцию $u_l^E(r)$ во внутренней области ($r < R$) можно разложить по полному набору собственных функций $u_l^{(\lambda)}(r)$:

$$u_l^E(r) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} u_l^{(\lambda)}(r),$$

Воспользовавшись соотношением Грина для уравнения (2.70) и граничным условием (2.69), нетрудно найти коэффициент разложения:

$$c_{\lambda} = \frac{s_l(E)}{2ik} u_l^{(-)}(R) \frac{\hbar^2}{\mu R} \frac{u_l^{(\lambda)}(R)}{E_{l\lambda} - E}.$$

Таким образом, разложение имеет вид

$$u_l^E(r) = \frac{s_l(E)}{2ik} u_l^{(-)}(R) \frac{\hbar^2}{\mu R} \sum_{\lambda} \frac{u_l^{(\lambda)}(r) u_l^{(\lambda)}(R)}{E_{l\lambda} - E}. \quad (2.75)$$

Приравнявая внутреннее решение (2.75) и внешнее решение (2.71) при $r = R$, находим

$$S_l = \left\{ 1 + 2is_l \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - E} \right\} \exp(2i\zeta_l), \quad (2.76)$$

где $\theta_{l\lambda}^2$ — приведенная ширина:

$$\theta_{l\lambda}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu R} [u_l^{(\lambda)}(R)]^2. \quad (2.77)$$

Так как собственные функции $u_l^{(\lambda)}(R)$ комплексны, то приведенная ширина $\theta_{l\lambda}^2$ также является комплексной величиной.

Выражение для S -матрицы (2.76) обычно называют *дисперсионной формулой Капура—Пайерлса*. В отличие от дисперсионной формулы Вигнера—Айзенбуда, содержащей в качестве параметров вещественные уровни $E_{l\lambda}$ и вещественные приведенные ширины $\theta_{l\lambda}^2$, в (2.76) собственные уровни $E_{l\lambda}$ и ширины $\theta_{l\lambda}^2$ — комплексны. Однако важным преимуществом подхода Капура—Пайерлса по сравнению с подходом Вигнера—Айзенбуда является то, что в нем используются собственные функции, отвечающие распадающимся состояниям системы.

§ 2.3. \mathfrak{R} -матрица

Волновые функции во внешней области для случая N открытых каналов. Рассмотрим \mathfrak{R} -матричную теорию в случае, когда открыто несколько каналов, т. е. учтем кроме упругого рассеяния также и ядерные реакции. Для простоты ограничимся реакциями с участием бесспиновых незаряженных частиц с нулевым моментом количества движения. Предположим, что при заданной полной энергии системы E открыто N каналов. В качестве базисной системы независимых волновых функций можно использовать N введенных ранее функций Ψ_{α} , различающихся наличием сходящейся волны в различных каналах. В области конфигурационного пространства, соответствующей открытому каналу β , волновую функцию Ψ_{α} представим в виде

$$\Psi_{\alpha} = \Psi_{\alpha\beta}(r_{\beta}) \chi_{\beta}, \quad (2.78)$$

где χ_{β} — внутренняя функция канала β и $\Psi_{\alpha\beta}(r_{\beta})$ — функция относительного движения в канале β :

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}(r_{\beta}) = & \frac{2\pi i}{\sqrt{k_{\alpha} k_{\beta}}} \sqrt{\frac{\mu_{\beta}}{\mu_{\alpha}}} \frac{1}{r_{\beta}} (\delta_{\alpha\beta} \exp(-ik_{\beta} r_{\beta}) - \\ & - S_{\beta\alpha} \exp(ik_{\beta} r_{\beta})), \quad r_{\beta} \geq R_{\beta}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Если $\alpha = \beta$, то в $\Psi_{\alpha\beta}(r_\beta)$ содержатся сходящаяся и расходящаяся волны, если же $\alpha \neq \beta$ — только расходящаяся волна. Согласно (2.79) волновая функция Ψ_α в области, где отсутствует взаимодействие, полностью определяется заданием N -рядной квадратной матрицы $S_{\beta\alpha}$. Наоборот, матрицу столкновений $S_{\beta\alpha}$ можно найти, если известно асимптотическое поведение волновой функции в различных каналах.

В формальной теории удобно пользоваться понятием составного ядра, которому сопоставляется определенный радиус R_α для каждого канала α . Если относительная координата $r_\alpha > R_\alpha$, то волновая функция описывает относительное движение частицы и ядра под действием сил неядерной природы (кулоновских и центробежных сил). Если же $r_\alpha < R_\alpha$, то ядро и частица образуют составную систему (составное ядро), динамические свойства которой полностью определяются ядерным взаимодействием. Следует иметь в виду, что для нахождения S -матрицы сведения о всех деталях движения внутри составной системы излишни.

Волновую функцию относительного движения в любом канале можно найти по ее значению и значению ее производной при $r_\alpha = R_\alpha$, т. е. на входе канала. Однако поскольку при фиксированной энергии E существует лишь N независимых волновых функций, то произвольно задавать значения волновых функций и их производных на входе каналов нельзя. Достаточно ограничиться заданием значений производных волновых функций на входе каналов (N комплексных чисел), при этом однозначно будут определены и значения самих волновых функций.

Для установления связи между значениями волновых функций и их производных на входе каждого из каналов удобнее воспользоваться системой базисных функций, отличных от (2.79). Выберем новые функции так, чтобы они вместо простого асимптотического поведения обладали простыми свойствами на входе каждого канала. Для этого вместо бегущих волн $\exp(-ik_\beta r_\beta)$ и $\exp(ik_\beta r_\beta)$ используем стоячие волны $\sin k_\beta(r_\beta - R_\beta)$ и $\cos k_\beta(r_\beta - R_\beta)$. (Первая из этих волн обращается в нуль при $r_\beta = R_\beta$, а вторая имеет производную, равную нулю.) Так как существует N линейно независимых функций Ψ_α , то в новой базисной системе необходимо выбрать такое же число линейно независимых функций Φ_α .

Выберем функцию Φ_α таким образом, чтобы она вела себя как стоячая волна $\cos k_\beta(r_\beta - R_\beta)$ во всех каналах β , отличных от α , а в канале α представляла собой линейную суперпозицию стоячих волн $\sin k_\alpha(r_\alpha - R_\alpha)$ и $\cos k_\alpha(r_\alpha - R_\alpha)$, т. е. положим

$$\Phi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(r_\beta) \chi_\beta; \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}(r_\beta) = & \sqrt{R_\alpha R_\beta} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha} \frac{1}{r_\beta}} \times \\ & \times \left\{ \delta_{\alpha\beta} \frac{\sin k_\beta(r_\beta - R_\beta)}{k_\beta R_\beta} + \mathfrak{R}_{\alpha\beta} \cos k_\beta(r_\beta - R_\beta) \right\}, \quad r_\beta \geq R_\beta, \quad (2.81) \end{aligned}$$

где коэффициенты $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ образуют N -рядную квадратную матрицу.

Так как ядерное взаимодействие инвариантно относительно обращения времени, то базисные функции Φ_α можно выбрать вещественными, поэтому вещественными будут и элементы матрицы $R_{\alpha\beta}$ ¹. Функция Φ_α имеет равную нулю производную при $r_\beta = R_\beta$ во всех каналах $\alpha \neq \beta$:

$$\left. \frac{\partial (r_\beta \Phi_{\alpha\beta}(r_\beta))}{\partial r_\beta} \right|_{r_\beta=R_\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad (2.82)$$

и равную единице при $r_\alpha = R_\alpha$ в канале α :

$$\left. \frac{\partial (r_\alpha \Phi_{\alpha\alpha}(r_\alpha))}{\partial r_\alpha} \right|_{r_\alpha=R_\alpha} = 1. \quad (2.83)$$

Функции Φ_α являются решениями уравнения Шредингера

$$H\Phi_\alpha = E\Phi_\alpha, \quad (2.84)$$

где H — полный гамильтониан системы, и определены во всем пространстве. Формулы (2.80) и (2.81) задают явный вид функции Φ_α только во внешней области, т. е. при всех значениях $r_\beta \geq R_\beta$ в каждом из открытых каналов β ($\beta = 1, 2, \dots, N$). Содержащиеся в выражениях для Φ_α коэффициенты $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ зависят от взаимодействия во внутренней области и определяются внутренними свойствами составного ядра.

Собственные функции составной системы. Введем систему собственных функций составного ядра $\Phi^{(\lambda)}$. Будем считать, что эти функции являются решениями уравнения Шредингера

$$H\Phi^{(\lambda)} = E_\lambda \Phi^{(\lambda)} \quad (2.85)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\left. \frac{\partial (r_\alpha \Phi^{(\lambda)})}{\partial r_\alpha} \right|_{r_\alpha=R_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (2.86)$$

Каждому собственному уровню составного ядра E_λ соответствует собственная функция $\Phi^{(\lambda)}$. Собственные функции $\Phi^{(\lambda)}$ заданы во внутренней области, т. е. при $r_\alpha \leq R_\alpha$. В области конфигурационного пространства, соответствующего какому-либо каналу α , функция $\Phi^{(\lambda)}$ представляется в виде

$$\Phi^{(\lambda)} = \varphi_{\lambda\alpha}(r_\alpha) \chi_\alpha.$$

Согласно (2.86) производная от функции $\Phi^{(\lambda)}$ на входе каждого канала, т. е. при $r_\alpha = R_\alpha$, обращается в нуль. Так как гамильтониан H веществен (вследствие инвариантности относительно обращения времени), то собственные функции $\Phi^{(\lambda)}$ также вещественны. Будем считать, что функции $\Phi^{(\lambda)}$ удовлетворяют условиям ортонормировки

$$\int d\tau \Phi^{(\lambda)} \Phi^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.87)$$

где интегрирование проводится во внутренней области.

¹ \mathcal{R} -матрица введена Вигнером и Айзенбудом [41].

Дисперсионная формула в случае многих каналов. Разложим каждую из N функций Φ_α , соответствующих определенному значению энергии E , в ряд по полному набору собственных функций $\Phi^{(\lambda)}$:

$$\Phi_\alpha = \sum_\lambda c_\lambda^\alpha \Phi^{(\lambda)} \quad (2.88)$$

(это разложение законно только во внутренней области $r_\alpha \leq R_\alpha$). Так как собственные функции $\Phi^{(\lambda)}$ ортогональны, то коэффициенты разложения c_λ^α определяются обычным образом:

$$c_\lambda^\alpha = \int d\tau \Phi_\alpha \Phi^{(\lambda)}. \quad (2.89)$$

Используя уравнения (2.84) и (2.85), для коэффициентов c_λ^α нетрудно получить следующее соотношение:

$$(E_\lambda - E) c_\lambda^\alpha = \int d\tau (\Phi_\alpha H \Phi^{(\lambda)} - \Phi^{(\lambda)} H \Phi_\alpha), \quad (2.90)$$

где интегрирование проводится во внутренней области (в каждом из открытых каналов интегрирование проводится по области $r_\beta \leq R_\beta$). Рассмотрим какой-либо открытый канал β . Гамильтониан H в этом канале можно представить в виде суммы кинетической энергии относительного движения частицы и ядра в канале $T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta} \Delta_\beta^2$, энергии их взаимодействия и внутренних гамильтонианов частицы и ядра. Внутренние гамильтонианы и энергия взаимодействия частицы и ядра являются самосопряженными операторами, поэтому они не дают вклада в интеграл. При вычислении интеграла от кинетической энергии относительного движения удобно воспользоваться теоремой Грина, сводящей объемный интеграл к поверхностному:

$$\int dv_\beta (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) = \int ds_\beta \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right). \quad (2.91)$$

Заметим, что $ds_\beta = R_\beta^2 d\omega_\beta$, а производная по нормали совпадает с производной по координате канала r_β при $r_\beta = R_\beta$. Выполняя интегрирование по внутренним координатам и по углам в каждом из каналов, получаем

$$\begin{aligned} & \int d\tau (\Phi_\alpha H \Phi^{(\lambda)} - \Phi^{(\lambda)} H \Phi_\alpha) = \\ & = - \sum_\beta \frac{\hbar^2}{2\mu_\beta} \left\{ (r_\beta \Phi_{\alpha\beta}) \frac{\partial (r_\beta \Phi_{\lambda\beta})}{\partial r_\beta} - (r_\beta \Phi_{\lambda\beta}) \frac{\partial (r_\beta \Phi_{\alpha\beta})}{\partial r_\beta} \right\}_{r_\beta=R_\beta}, \quad (2.92) \end{aligned}$$

Согласно определению производная от собственной функции составного ядра $\partial (r_\beta \Phi_{\lambda\beta}) / \partial r_\beta$ исчезает при $r_\beta = R_\beta$, а производная $\partial (r_\beta \Phi_{\alpha\beta}) / \partial r_\beta$ при $r_\beta = R_\beta$ равна нулю во всех каналах $\alpha \neq \beta$ и равна единице в канале $\alpha = \beta$. Поэтому

$$\int d\tau (\Phi_\alpha H \Phi^{(\lambda)} - \Phi^{(\lambda)} H \Phi_\alpha) = \frac{\hbar^2 R_\alpha}{2\mu_\alpha} \varphi_{\lambda\alpha}(R_\alpha),$$

и, следовательно,

$$c_{\lambda}^{\alpha} = \frac{\hbar^2 R_{\alpha} \varphi_{\lambda\alpha}(R_{\alpha})}{2\mu_{\alpha} E_{\lambda} - E}. \quad (2.93)$$

Согласно (2.81) \mathfrak{R} -матрица непосредственно выражается через значение функции $\varphi_{\alpha\beta}(r_{\beta})$ (соответствующей состоянию Φ_{α} и описывающей относительное движение в канале β) при $r_{\beta} = R_{\beta}$:

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\mu_{\alpha} R_{\beta}}{\mu_{\beta} R_{\alpha}}} \varphi_{\alpha\beta}(R_{\beta}). \quad (2.94)$$

Используя (2.88) и (2.93), представим функцию $\varphi_{\alpha\beta}(r_{\beta})$ в виде разложения по собственным функциям составного ядра $\varphi_{\lambda\beta}(r_{\beta})$:

$$\varphi_{\alpha\beta}(r_{\beta}) = \frac{\hbar^2 R_{\alpha}}{2\mu_{\alpha}} \sum_{\lambda} \frac{\varphi_{\lambda\alpha}(R_{\alpha}) \varphi_{\lambda\beta}(R_{\beta})}{E_{\lambda} - E}. \quad (2.95)$$

Подставляя это выражение при $r_{\beta} = R_{\beta}$ в (2.94), для \mathfrak{R} -матрицы получим дисперсионную формулу Вигнера—Айзенбуда

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta}(E) = \sum_{\lambda} \frac{\theta_{\alpha\lambda} \theta_{\beta\lambda}}{E_{\lambda} - E}, \quad (2.96)$$

где введено обозначение

$$\theta_{\alpha\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar^2 R_{\alpha}}{2\mu_{\alpha}}} \varphi_{\lambda\alpha}(R_{\alpha}). \quad (2.97)$$

Формула (2.96) в общем виде устанавливает энергетическую зависимость \mathfrak{R} -матрицы в случае, когда открыто несколько каналов. Согласно (2.96) энергетическая зависимость \mathfrak{R} -матрицы выражается через не зависящие от энергии E_{λ} и $\theta_{\alpha\lambda}$. Отдельные уровни составного ядра E_{λ} вносят аддитивный вклад в \mathfrak{R} -матрицу. \mathfrak{R} -матрица — вещественна и симметрична. Она является аналитической функцией на комплексной плоскости E . Полюса \mathfrak{R} -матрицы, т. е. собственные значения энергии составного ядра E_{λ} , расположены на вещественной оси. Различным матричным элементам $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}(E)$ соответствуют одни и те же полюса, т. е. E_{λ} не зависят от α и β . Вычеты диагональных элементов $\mathfrak{R}_{\alpha\alpha}(E)$ в каком-либо полюсе $E = E_{\lambda}$ (равны $-\theta_{\alpha\lambda}^2$) связаны с вычетами недиагональных элементов в том же полюсе (равны $\theta_{\alpha\lambda} \theta_{\beta\lambda}$). В дисперсионной теории рассеяния и реакций уровни составного ядра E_{λ} и амплитуды приведенных ширин $\theta_{\alpha\lambda}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) обычно рассматриваются в качестве параметров.

Связь между \mathfrak{R} -матрицей и матрицей столкновений S . Как было показано в предыдущем параграфе, \mathfrak{R} -матрица, определяющая поведение волновых функций Φ_{α} во внешней области, полностью определяется свойствами составного ядра, т. е. взаимодействием во внутренней области. Однако наблюдаемые сечения выражаются через S -матрицу, описывающую асимптотическое поведение волновых функций Ψ_{α} . Очевидно, для того чтобы непосредственно связать на-

блюдаемые сечения со свойствами составной системы, необходимо S -матрицу выразить через \mathfrak{R} -матрицу.

При фиксированном значении энергии E системы функции Ψ_α и Φ_α образуют полные наборы независимых функций (состоящие из N функций). Поэтому любую из функций Φ_α можно представить в виде разложения по функциям Ψ_α :

$$\Phi_\alpha = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} \Psi_\gamma. \quad (2.98)$$

Коэффициенты $a_{\alpha\gamma}$ нетрудно найти, сравнивая поведение левой и правой частей (2.98) в различных каналах β :

$$\Phi_{\alpha\beta}(r_\beta) = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} \Psi_{\gamma\beta}(r_\beta). \quad (2.99)$$

Используя выражения (2.79) и (2.81) и приравняв отдельно коэффициенты при $\exp(-ik_\beta r_\beta)$ и $\exp(ik_\beta r_\beta)$, находим

$$\begin{aligned} \sqrt{R_\alpha R_\beta} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{k_\beta R_\beta} - i\mathfrak{R}_{\alpha\beta} \right) \exp(ik_\beta R_\beta) &= \frac{1}{k_\beta} \sqrt{\frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}} a_{\alpha\beta}; \\ \sqrt{R_\alpha R_\beta} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{k_\beta R_\beta} + i\mathfrak{R}_{\alpha\beta} \right) \exp(-ik_\beta R_\beta) &= \\ &= \sum_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{k_\beta k_\gamma}} \sqrt{\frac{\mu_\alpha}{\mu_\gamma}} a_{\alpha\gamma} S_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Подставляя затем $a_{\alpha\gamma}$ из первого соотношения во второе, получаем

$$\begin{aligned} (\delta_{\alpha\beta} + i\sqrt{k_\alpha R_\alpha} \mathfrak{R}_{\alpha\beta} \sqrt{k_\beta R_\beta}) \exp(-ik_\beta R_\beta) &= \\ = \sum_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} - i\sqrt{k_\alpha R_\alpha} \mathfrak{R}_{\alpha\gamma} \sqrt{k_\gamma R_\gamma}) \exp(ik_\gamma R_\gamma) S_{\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Эта система уравнений полностью определяет матрицу $S_{\alpha\beta}$, если задана матрица $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$.

Введя две диагональные матрицы B и ω :

$$B_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} \sqrt{k_\alpha R_\alpha}; \quad \omega_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} \exp(-ik_\alpha R_\alpha), \quad (2.101)$$

систему уравнений (2.100) удобно переписать в матричном виде:

$$(1 + iB\mathfrak{R}B)\omega = (1 - iB\mathfrak{R}B) \frac{1}{\omega} S^T. \quad (2.102)$$

Решив затем полученное уравнение относительно S , найдем

$$S = \omega \left\{ 1 + 2iB\mathfrak{R}B \frac{1}{1 - iB\mathfrak{R}B} \right\} \omega. \quad (2.103)$$

Эта формула в общем виде устанавливает связь между матрицей столкновений S и \mathfrak{R} -матрицей¹.

¹ Напомним, что формула (2.103) получена в предположении $l = 0$ и при отсутствии спинов. В общем случае связь между S - и \mathfrak{R} -матрицами получена в [41].

Согласно (2.103) связь между S -матрицей и \mathfrak{R} -матрицей нелинейна. Поэтому вклад отдельных уровней составного ядра в матрицу столкновений S (в отличие от \mathfrak{R} -матрицы) оказывается неаддитивным. Если для описания ядерного взаимодействия воспользоваться теорией возмущений, то множитель $(1 - iV\mathfrak{R}B)^{-1}$ приближенно можно заменить на $(1 + iV\mathfrak{R}B)$, при этом матрица столкновений описывается формулой

$$S \approx \omega (1 + 2iV\mathfrak{R}B) \omega. \quad (2.104)$$

В этом случае вклад отдельных уровней будет аддитивным не только в \mathfrak{R} , но и в S -матрицу.

Так как матрица столкновений S унитарна и симметрична (а следовательно, унитарна и симметрична матрица $\omega^{-1}S\omega^{-1}$), то матрица $B\mathfrak{R}B$ должна быть эрмитовой и симметричной, т. е. вещественной и симметричной. Поэтому \mathfrak{R} -матрица также вещественна и симметрична. (Как мы видели, вещественность \mathfrak{R} -матрицы непосредственно следует из использования вещественных функций при ее выводе). Так как N -рядная вещественная и симметричная матрица имеет $\frac{1}{2}N(N + 1)$ независимых вещественных элементов, то матрица столкновений S может зависеть от такого же числа вещественных параметров.

Формула Брейта—Вигнера для изолированного уровня. Дисперсионная формула, определяющая энергетическую зависимость \mathfrak{R} -матрицы, в общем случае учитывает вклад многих уровней составного ядра. Рассмотрим простейший случай, а именно предположим, что в сумму (2.96) существенный вклад вносит только один уровень

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta}(E) \approx \theta_{\alpha\lambda} \theta_{\beta\lambda} / (E_{\lambda} - E). \quad (2.105)$$

Такое предположение оправдано, если значение энергии E находится в достаточно узкой области вблизи резонансного уровня E_{λ} . Очевидно, дисперсионная формула с одним уровнем может приводить к разумным физическим результатам только при малых энергиях, когда расстояние между уровнями составной системы велико по сравнению с ширинами уровней.

Подставив (2.105) в (2.103), нетрудно показать, что матрица столкновений в случае одного изолированного уровня описывается следующим выражением:

$$S_{\alpha\beta} = \exp(-ik_{\alpha} R_{\alpha}) \times \left\{ \delta_{\alpha\beta} - 2i \frac{\sqrt{k_{\alpha} R_{\alpha}} \theta_{\alpha\lambda} \sqrt{k_{\beta} R_{\beta}} \theta_{\beta\lambda}}{E - E_{\lambda} + i \sum_{\gamma} k_{\gamma} R_{\gamma} \theta_{\gamma\lambda}^2} \right\} \exp(-ik_{\beta} R_{\beta}) \quad (2.106)$$

(суммирование в знаменателе проводится по всем каналам, открытым при энергии E).

Используя (2.106), для сечения перехода системы из канала α в канал β получаем формулу Брейта—Вигнера;

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{(E - E_{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{\lambda}^2}. \quad (2.107)$$

где $\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$ и $\gamma_{\beta}^{(\lambda)}$ — парциальные ширины и γ_{λ} — полная ширина уровня энергии E_{λ} :

$$\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} = 2k_{\alpha} R_{\alpha} O_{\alpha\lambda}^2; \quad \gamma_{\lambda} = \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{\alpha}^{(\lambda)}. \quad (2.108)$$

Если частица заряжена или $l \neq 0$, то необходимо учитывать наличие барьера, связанного с кулоновским или центробежным взаимодействием. В этом случае сечение перехода $\sigma_{\alpha\beta}$ по-прежнему определяется формулой (2.107), однако в выражениях для парциальных ширин $\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$ вместо множителя $k_{\alpha} R_{\alpha}$ необходимо ввести проницаемость барьера s_l и, кроме того, учесть возникновение сдвига резонансной энергии E_{λ} относительно уровня составного ядра E_{λ} .

Формула (2.107) при $\alpha = \beta$ описывает сечение упругого рассеяния через составное ядро

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)2}}{(E - E_{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{\lambda}^2}. \quad (2.109)$$

Если все каналы, за исключением канала упругого рассеяния, закрыты, то $\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$ совпадает с полной шириной уровня γ_{λ} . В общем случае парциальная ширина $\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$ меньше полной ширины γ_{λ} . Согласно (2.109) наличие открытых каналов (кроме канала упругого рассеяния) проявляется в уменьшении сечения упругого рассеяния через составное ядро в $(\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}/\gamma_{\lambda})^2$ раз.

Введем сечение образования составного ядра по каналу α $\sigma_C(\alpha)$, которое определим равенством

$$\sigma_C(\alpha) \equiv \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.110)$$

Используя (2.107) и (2.108), получаем

$$\sigma_C(\alpha) = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\lambda}}{(E - E_{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{\lambda}^2}. \quad (2.111)$$

Отношение парциальной ширины $\gamma_{\beta}^{(\lambda)}$ к полной ширине γ_{λ} характеризует относительную вероятность распада составного ядра по определенному каналу β :

$$G_C(\beta) \equiv \gamma_{\beta}^{(\lambda)}/\gamma_{\lambda}. \quad (2.112)$$

Поэтому сечение перехода $\sigma_{\alpha\beta}$ можно представить в виде произведения сечения образования составного ядра по каналу α на относительную вероятность распада составного ядра по каналу β :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_G(\alpha) G_C(\beta). \quad (2.113)$$

Таким образом, в резонансной области энергий, когда применима дисперсионная формула для одного уровня, в ядерном процессе можно выделить две стадии (образование составного ядра и распад составного ядра), которые независимы друг от друга.

Задачи

1. Показать, что при разделении конфигурационного пространства на внутреннюю и внешнюю области гамильтониан системы во внутренней области не является эрмитовым. Для обеспечения эрмитовости гамильтониана необходимо задать условия на граничной поверхности.

Разделим все конфигурационное пространство системы на две части— внутреннюю область, в которой частицы сильно взаимодействуют друг с другом, и внешнюю область, в которой между разлетающимися частицами (ограничиваемся только рассмотрением реакций бинарного типа) может проявляться лишь взаимодействие неядерного типа. Запишем гамильтониан:

$$H = - \sum \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V,$$

где m — масса нуклона; Δ — оператор Лапласа для соответствующего нуклона; V — энергия ядерного взаимодействия. Рассмотрим два произвольных состояния системы Ψ_1 и Ψ_2 . В области какого-либо открытого канала β функции Ψ_1 и Ψ_2 имеют вид

$$\Psi_1 = \Psi_{1\beta}(r) \chi_\beta \quad \text{и} \quad \Psi_2 = \Psi_{2\beta}(r) \chi_\beta,$$

где r — относительное расстояние между частицами. Воспользовавшись теоремой Грина, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \int_V dv (\Psi_1^* (H\Psi_2) - (H\Psi_1)^* \Psi_2) &= - \int_V dv \sum \frac{\hbar^2}{2m} (\Psi_1^* (\Delta\Psi_2) - (\Delta\Psi_1)^* \Psi_2) = \\ &= - \sum_{\beta} \frac{\hbar^2}{2\mu_{\beta}} \left\{ r\Psi_{1\beta}^* \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi_{2\beta}) - \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi_{1\beta})^* r\Psi_{2\beta} \right\} \Big|_{r=R_{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

где μ_{β} — приведенная масса; R_{β} — радиус для канала β . Суммирование в правой части (2.114) проводится по всем открытым каналам.

Для эрмитовости гамильтониана необходимо, чтобы выражение (2.114) обращалось в нуль. При нахождении собственных состояний системы мы налагали на волновые функции определенные граничные условия (логарифмические производные приравняли одной и той же величине), это обеспечивало обращение в нуль (2.114). Однако для произвольных решений такие граничные условия задавать нельзя (значение логарифмической производной на граничной поверхности будет определяться самим решением). Как показано в [42], для обеспечения эрмитовости гамильтониана к H необходимо добавить некоторый поверхностный оператор, который выберем в виде

$$\mathcal{E} = \sum_{\beta} \frac{\hbar^2}{2\mu_{\beta} R_{\beta}} \delta(r - R_{\beta}) \left(\frac{\partial}{\partial r} r - L_{\beta} \right) \pi_{\beta}, \quad (2.115)$$

где L_β — некоторая постоянная; π_β — проекционный оператор, выделяющий канал β . Таким образом, под гамильтонианом системы во внутренней области будем подразумевать

$$\mathcal{H} = H + \mathcal{L}. \quad (2.116)$$

Легко проверить, что вклад оператора \mathcal{L} точно компенсирует (2.114), поэтому

$$\int_V du \{ \Psi_1^* (\mathcal{H} \Psi_2) - (\mathcal{H} \Psi_1)^* \Psi_2 \} = 0,$$

и, следовательно, \mathcal{H} является эрмитовым оператором. Оператор \mathcal{L} равен нулю всюду, кроме граничной поверхности. Для каждого из каналов он принимает определенные значения. Оператор \mathcal{L} обычно называют оператором Блоха или оператором граничных условий, так как с помощью выбора L_β можно задавать граничные условия для рассматриваемых решений Ψ . Если в качестве L_β выбрать значение логарифмической производной для расходящейся волны $\psi_\beta^{(+)}$ на граничной поверхности, т. е.

$$L_\beta = \frac{d}{dr} (r \psi_\beta^{(+)}) \Big|_{r=R_\beta} = R_\beta \frac{d u_\beta^{(+)}}{dr} \Big|_{r=R_\beta}, \quad (2.117)$$

то оператор \mathcal{L} будет выделять из любого состояния Ψ только сходящуюся волну.

2. С помощью оператора граничных условий найти решение уравнения Шредингера во внутренней области и построить матрицу столкновений [42].

В области конфигурационного пространства, отвечающей свободному движению частиц, волновую функцию системы можно записать в виде

$$\Psi = \sum_\beta \psi_\beta(r) \chi_\beta, \quad r \geq R_\beta,$$

при этом радиальные функции можно представить в виде суммы сходящихся и расходящихся волн:

$$\psi_\beta(r) = a_\beta \psi_\beta^{(-)}(r) + b_\beta \psi_\beta^{(+)}(r).$$

Амплитуды сходящихся волн a_β определяются падающим потоком. Так как уравнение Шредингера линейно, то амплитуды расходящихся волн b_β зависят линейным образом от амплитуд сходящихся волн, поэтому

$$b_\beta = \sum_\alpha S_{\beta\alpha} a_\alpha,$$

где $S_{\beta\alpha}$ — матрица столкновений. Матрица столкновений S полностью определяет радиальную функцию во внешней области, однако для определения самой матрицы столкновений необходимо знать волновую функцию во внутренней области.

Для нахождения решения уравнения Шредингера во внутренней области с граничными условиями, соответствующими рассеянию, т. е. заданным амплитудам сходящихся волн a_α , введем с помощью оператора граничных условий \mathcal{L} обобщенный гамильтониан

$$\mathcal{H} = H + \mathcal{L}.$$

Поскольку $\mathcal{L}\Psi$ зависит только от амплитуд сходящихся волн, то $\mathcal{L}\Psi$ можно рассматривать как заданную величину:

$$\mathcal{L}\Psi = \mathcal{L} \sum_\alpha a_\alpha \psi_\alpha^{(-)} \chi_\alpha = - \sum_\alpha \frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha R_\alpha} \delta(r - R_\alpha) 2i s_\alpha a_\alpha \psi_\alpha^{(-)}(R_\alpha) \chi_\alpha, \quad (2.118)$$

где s_α определено согласно (2.21). Следовательно, волновая функция Ψ во внутренней области определяется решением неоднородного уравнения

$$(\mathcal{H} - E) \Psi = \mathcal{L} \Psi. \quad (2.119)$$

Можно показать, что \mathcal{H} не имеет вещественных собственных значений, поэтому однородное уравнение

$$(\mathcal{H} - E) \Psi = 0$$

обладает решениями, тождественно равными нулю. Поэтому для оператора $\mathcal{H} - E$ можно ввести строго определенный обратный оператор и, таким образом, решение уравнения (2.119) представить в виде

$$\Psi = \frac{1}{\mathcal{H} - E} \mathcal{L} \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(-)} \chi_{\alpha}. \quad (2.120)$$

Это выражение определяет волновую функцию Ψ во всей внутренней области и на граничной поверхности. Взяв значение волновой функции на граничной поверхности, нетрудно найти амплитуду расходящейся волны:

$$b_{\beta} \psi_{\beta}^{(+)}(R_{\beta}) = -a_{\beta} \psi_{\beta}^{(-)}(R_{\beta}) - \sum_{\alpha} \left\langle \beta \left| \frac{1}{E - \mathcal{H}} \mathcal{L} \right| \alpha \right\rangle \times \\ \times a_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(-)}(R_{\alpha}) \Big|_{r=R_{\beta}}. \quad (2.121)$$

Во внутренней области введем полный ортонормированный набор собственных функций $|\lambda\rangle$. С помощью этого набора запишем

$$\frac{1}{E - \mathcal{H}} = \sum_{\lambda \mu} |\lambda\rangle \langle \lambda | \frac{1}{E - \mathcal{H}} | \mu \rangle \langle \mu|. \quad (2.122)$$

В окрестности граничной поверхности функции $|\lambda\rangle$ представим в виде

$$|\lambda\rangle = \sum_{\alpha} \varphi_{\lambda\alpha}(r) \chi_{\alpha}. \quad (2.123)$$

Используя (2.122), (2.123), а также (2.118), соотношение (2.121) перепишем в виде

$$b_{\beta} \psi_{\beta}^{(+)}(R_{\beta}) = -a_{\beta} \psi_{\beta}^{(-)}(R_{\beta}) + \sum_{\alpha} \sum_{\lambda \mu} \left\langle \lambda \left| \frac{1}{E - \mathcal{H}} \right| \mu \right\rangle 2i s_{\alpha} \theta_{\alpha\mu}^* \theta_{\beta\lambda} a_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(-)}(R_{\alpha}),$$

где $\theta_{\alpha\mu} = \sqrt{\frac{\hbar^2 R_{\alpha}}{2\mu_{\alpha}}} \varphi_{\mu\alpha}(R_{\alpha})$ — амплитуда приведенной ширины. Замечая

$$\text{далее, что } \psi_{\beta}^{(+)}(R_{\alpha}) = -i(s_{\beta})^{-\frac{1}{2}} \exp(-i\xi_{\beta}) \text{ и } \psi_{\beta}^{(-)}(R_{\beta}) = [\psi_{\beta}^{(+)}(R_{\beta})]^*,$$

окончательно получаем следующее общее выражение для матрицы столкновений в пространстве открытых каналов:

$$S_{\beta\alpha} = \exp(i\xi_{\beta}) \left\{ \delta_{\alpha\beta} - 2i \sum_{\lambda \mu} \left\langle \lambda \left| \frac{1}{E - \mathcal{H}} \right| \mu \right\rangle \sqrt{s_{\alpha} s_{\beta}} \theta_{\alpha\mu}^* \theta_{\beta\lambda} \right\} \exp(i\xi_{\alpha}). \quad (2.124)$$

Базис Капура и Пайерлса. В качестве состояний $|\lambda\rangle$ выбираются собственные функции обобщенного гамильтониана:

$$\mathcal{H} |\lambda\rangle = E_{\lambda} |\lambda\rangle. \quad (2.125)$$

В этом случае оператор $(E - \mathcal{H})^{-1}$ принимает диагональный вид. Заметим, что оператор \mathcal{H} не является эрмитовым, так как L_α , входящие в оператор граничных условий \mathcal{L} , для открытых каналов являются комплексными. Итак, уравнение (2.125) эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} H|\lambda\rangle &= E_\lambda|\lambda\rangle; \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} r - L_\alpha\right)\Phi_{\lambda\alpha}(r)|_{r=R_\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

Так как \mathcal{H} зависит от E через L_α , то весь набор собственных функций $|\lambda\rangle$ и все собственные значения E_λ также зависят от E . Граничное условие (2.126) означает, что собственные функции в области открытых каналов содержат только расходящиеся волны. Собственные значения E_λ комплексны, причем все E_λ расположены на комплексной плоскости энергий ниже вещественной оси:

$$E_\lambda = \text{Re } E_\lambda - \frac{i}{2} \gamma_\lambda; \quad \gamma_\lambda = \sum_\alpha \frac{2s_\alpha |\theta_{\alpha\lambda}|^2}{\langle \lambda | \lambda \rangle} > 0.$$

Учитывая диагональный характер оператора $(E - \mathcal{H})^{-1}$, для матрицы столкновений получаем точную формулу Капура и Пайерлса:

$$S_{\beta\alpha} = \exp(i\zeta_\beta) \left\{ \delta_{\alpha\beta} - 2i \sum_\lambda \frac{\sqrt{s_\alpha s_\beta} \theta_{\alpha\lambda}^* \theta_{\beta\lambda}}{E - \tilde{E}_\lambda + \frac{i}{2} \gamma_\lambda} \right\} \exp(i\zeta_\alpha). \quad (2.127)$$

Напомним, что $\theta_{\alpha\lambda}$ и $\theta_{\beta\lambda}$ — комплексные величины, и они, так же как и \tilde{E}_λ и γ_λ , зависят от энергии системы E .

Базис Вигнера. В качестве состояний $|\lambda\rangle$ выбираются собственные функции оператора

$$\mathcal{H}_W = H + \mathcal{L}(B),$$

где в операторе граничных условий L_α для всех каналов заменяются некоторыми вещественными B_α , не зависящими от E .

$$\mathcal{H}_W|\lambda\rangle = E_\lambda|\lambda\rangle. \quad (2.128)$$

Так как оператор \mathcal{H}_W эрмитов, то все собственные значения E_λ вещественны. Уравнение (2.128) эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} H|\lambda\rangle &= E_\lambda|\lambda\rangle; \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} r - B_\alpha\right)\Phi_{\lambda\alpha}(r)|_{r=R_\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

Собственные значения энергии E_λ , так же как и собственные функции $|\lambda\rangle$, не зависят от энергии E . Неудобство базиса Вигнера заключается в том, что этот базис не диагонализует оператор $(E - \mathcal{H})^{-1}$ [43]. Если пренебречь недиагональными элементами разности операторов

$$\mathcal{L}(L_\alpha) - \mathcal{L}(B_\alpha),$$

то для матрицы столкновений получим так называемую формулу Брейта и Вигнера для многих уровней

$$S_{\beta\alpha} = \exp(i\zeta_\beta) \left\{ \delta_{\alpha\beta} - 2i \sum_\lambda \frac{\sqrt{s_\alpha s_\beta} \theta_{\alpha\lambda}^* \theta_{\beta\lambda}}{E - E_\lambda - \delta E_\lambda + \frac{i}{2} \gamma_\lambda} \right\} \exp(i\zeta_\alpha), \quad (2.130)$$

где сдвиг уровня δE_λ и ширина γ_λ определяются соотношениями

$$\delta E_\lambda = \sum_{\alpha} (B_{\alpha} - \text{Re } L_{\alpha}) \theta_{\alpha\lambda}^2; \quad \gamma_\lambda = \sum_{\alpha} 2s_{\alpha} \theta_{\alpha\lambda}^2$$

(амплитуды приведенных ширин $\theta_{\alpha\lambda}$ являются вещественными). Формула (2.130) в отличие от (2.127) приближенная, однако достоинством такого представления матрицы столкновений является то, что параметры E_λ и $\theta_{\alpha\lambda}$, входящие в это представление, не зависят от энергии системы E .

§ 2.4. Описание взаимодействия между частицами с помощью задания \mathfrak{R} -функции

Волновая функция вне энергетической поверхности. \mathfrak{R} -матричная теория широко используется для описания энергетической зависимости сечений различных бинарных процессов с участием как сложных ядерных, так и элементарных частиц. Введение \mathfrak{R} -матрицы основано на допущении о наличии области сильного взаимодействия в конфигурационном пространстве взаимодействующих частиц. При этом взаимодействующей системе сопоставляется ряд (вообще говоря, бесконечный) квазистационарных состояний, характеризующихся определенными значениями уровней энергии и приведенными ширинами. При отсутствии микроскопической теории сильного взаимодействия значения уровней энергии и приведенные ширины можно рассматривать в качестве феноменологических параметров, которые эффективно описывают взаимодействие в системе. Таким образом, \mathfrak{R} -матричную теорию можно использовать для описания сильного взаимодействия между частицами. Ранг вводимой \mathfrak{R} -матрицы определяется числом открытых бинарных каналов. В случае взаимодействия двух элементарных частиц, когда открыт только один канал, достаточно ограничиться введением \mathfrak{R} -функции.

Как мы видели, \mathfrak{R} -матричная теория позволяет находить амплитуды бинарных процессов на энергетической поверхности, через которые и выражаются сечения. Однако при рассмотрении систем, состоящих из нескольких сильно взаимодействующих частиц (например, при взаимодействии с какой-либо ядерной частицей дейтрона и т. п.), существенно взаимодействие между частицами вне энергетической поверхности. Наблюдаемые величины для таких систем (например, энергии связи, форм-факторы, сечения) зависят от внеэнергетического поведения двухчастичных амплитуд. Поэтому, описывая взаимодействие отдельных пар частиц с помощью соответствующих \mathfrak{R} -функций, необходимо это описание обобщить таким образом, чтобы оно позволяло находить двухчастичные амплитуды и вне энергетической поверхности [44].

Общее выражение для двухчастичной амплитуды вне энергетической поверхности можно получить с помощью наложения граничных условий на внеэнергетическую волновую функцию, которая в свою очередь определяется на основе \mathfrak{R} -матричной теории. Рассмотрим простейший случай, когда взаимодействие во внешней области ($r > R$) отсутствует, и предположим вначале, что взаимодействие во внутрен-

ней области ($r < R$) описывается потенциалом $V(r)$. Радиальная часть внеэнергетической волновой функции $\psi_{l,h}(r, E)$, описывающей рассеяние при положительном значении энергии E ($E \neq \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$), определяется решением неоднородного уравнения Шредингера [2]

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \psi_{l,h}(r, E) = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E - k^2 \right) j_l(kr), \quad (2.131)$$

удовлетворяющим на бесконечности граничному условию рассеяния, т. е. представляющимся в виде суммы падающей и рассеянной волн. Функция $\psi_{l,h}(r, E)$ при $r = 0$ удовлетворяет условию конечности

$$r\psi_{l,h}(r, E)|_{r=0} = 0.$$

Разложим решение уравнения (2.131) во внутренней области $r \leq R$ при произвольной энергии E в ряд по собственным функциям $\varphi_l^{(\lambda)}(r) = \frac{u_l^{(\lambda)}(r)}{r}$:

$$\psi_{l,h}(r, E) = \sum_{\lambda} c_{l\lambda}(k, E) \varphi_l^{(\lambda)}(r). \quad (2.132)$$

Умножая (2.131) на $\varphi_l^{(\lambda)}(r)$, а соответствующее уравнение для $\varphi_l^{(\lambda)}(r)$ — на $\psi_{l,h}(r, E)$, вычитая второе соотношение из первого и интегрируя полученную разность от нуля до R с учетом граничного условия (2.35), для коэффициентов $c_{l\lambda}(k, E)$ получаем выражение

$$c_{l\lambda}(k, E) = \sqrt{\frac{\hbar^2 R}{2\mu}} \frac{[r\psi_{l,h}(r, E)]_R \theta_{l\lambda} + \tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E)}{E_{l\lambda} - E}, \quad (2.133)$$

где $\theta_{l\lambda}$ — амплитуда приведенной ширины ($\theta_{l\lambda}^2 = \frac{\hbar R^2}{2\mu} [\varphi_l^{(\lambda)}(R)]^2$) и $\tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E)$ — амплитуда перекрытия во внутренней области $r \leq R$ волновой функции собственного состояния $\varphi_l^{(\lambda)}(r)$ и падающей волны $j_l(kr)$:

$$\tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E) \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu R}} (k^2 - k_E^2) \int_0^R dr r^2 j_l(kr) \varphi_l^{(\lambda)}(r); \quad (2.134)$$

$$k_E^2 \equiv \frac{2\mu E}{\hbar^2}.$$

Внеэнергетическая волновая функция во внешней области $r > R$ имеет вид

$$\psi_{l,h}(r, E) = j_l(kr) + ik_E f_l(k, k_E; E) h_l^{(+)}(k_E r), \quad (2.135)$$

где $f_l(k, k_E; E)$ — парциальная двухчастичная амплитуда на полуэнергетической поверхности. Парциальная двухчастичная амплитуда на энергетической поверхности, т. е. при $k = k_E = \sqrt{2\mu E}/\hbar$, связана с матрицей столкновений соотношением

$$f_l(k, k; E) \equiv f_l(k) = \frac{i}{2k} \{1 - S_l(k)\}; \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}. \quad (2.136)$$

Из условия равенства внутренней и внешней волновых функций и их производных на поверхности $r = R$ для двухчастичной амплитуды на полуэнергетической поверхности $f_l(k, k_E; E)$ и величины производной $[r\psi_{l,h}(rE)]'_R$, входящей в коэффициенты разложения (2.133), получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} f_l(k, k_E; E) &= \frac{i}{2k_E} \frac{D_l(k, E) - D_l^*(k, E) - 2i\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E)}{D_l(k_E, E)}; \\ [r\psi_{l,h}(r, E)]'_{r=R} &= \frac{i}{D_l(k_E, E)} \{X_l(k, E) + \\ &+ L_l(k_E)\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E)h_l^{(+)}(k_E R), \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} D_l(k, E) &\equiv i \{1 - L_l(k) \mathfrak{R}_l(E)\} h_l^{(+)}(kR); \\ X_l(k, E) &\equiv \{M_l(k) - L_l(k_E)\} j_l(k, R); \\ M_l(k) &\equiv \frac{[rj_l(kr)]'_{r=R}}{j_l(kr)} = \frac{L_l(k) - L_l^*(k) \exp[2i\zeta_l(k)]}{1 - \exp[2i\zeta_l(k)]}. \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

[напомним, что $h_l^{(-)}(kR)/h_l^{(+)}(kR) = -\exp[2i\zeta_l(k)]$, а $L_l(k)$ — логарифмическая производная от расходящейся волны на граничной поверхности]. Функции $\mathfrak{R}_l(E)$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E)$ определяются формулами

$$\mathfrak{R}_l(E) = \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - E}; \quad (2.139)$$

$$\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E) = \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda} \tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E)}{E_{l\lambda} - E}. \quad (2.140)$$

Согласно (2.132), (2.133) и (2.135), а также (2.137) и (2.138) волновая функция вне энергетической поверхности $\psi_{l,h}(r, E)$ полностью определена, если заданы значения функций $\mathfrak{R}_l(E)$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E)$. На энергетической поверхности ($k^2 = 2\mu E/\hbar^2$) функция $\mathfrak{R}_l(k, E)$ обращается в нуль и волновая функция $\psi_{l,h}(r) \equiv \psi_{l,h}(r, E)_{k^2=2\mu E/\hbar^2}$ определяется заданием единственной функции $\mathfrak{R}_l(E)$ (эта функция совпадает со значением обратной логарифмической производной при $r = R$ от радиальной волновой функции на энергетической поверхности). Внеэнергетическое поведение волновой функции $\psi_{l,h}(r, E)$ задается функцией $\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E)$, которая зависит не только от собственных значений энергии $E_{l\lambda}$ и амплитуд приведенных ширин $\theta_{l\lambda}$, но и от амплитуд перекрытия собственных функций и падающей волны во внутренней области $\tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E)$.

На энергетической поверхности производная $[r\psi_{l,h}(r)]'_{r=R}$ непосредственно выражается через значение самой функции $\psi_{l,h}(r)$ при $r = R$ и \mathfrak{R} -функцию:

$$[r\psi_{l,h}(r)]'_{r=R} = \psi_{l,h}(R)/\mathfrak{R}_l(E). \quad (2.141)$$

Используя соотношение (2.137), производную $\{r\psi_{l,h}(r)\}'_{r=R}$ можно также выразить через функцию $D_l(E) \equiv D_l(k_E, \bar{E})$:

$$[r\psi_{l,h}(r)]'_{r=R} = \frac{1}{kR} \frac{1}{D_l(E)}. \quad (2.142)$$

В результате волновая функция на энергетической поверхности описывается выражением

$$\psi_{l,h}(r) = \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu R} k D_l(E)} \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}}{E_{l\lambda} - E} \varphi_l^{(\lambda)}(r), & r < R; \\ j_l(kr) + ikf_l(k) h_l^{(+)}(kr), & r > R, \end{cases} \quad (2.143)$$

где $f_l(k)$ — двухчастичная амплитуда на энергетической поверхности. Матрица столкновений $S_l(k)$ выражается через функцию $D_l(E)$ согласно

$$S_l(k) = D_l^*(E)/D_l(E) \quad (2.144)$$

[функции $D_l(E)$ и $D_l^*(E)$ связаны с функциями Иоста соотношениями $D_l(E) = (-i)^l f_l(-k)$ и $D_l^*(E) = i^l f_l(k)$]. Волновые функции (2.143), соответствующие различным значениям волновых чисел k и k' , удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^{\infty} dr r^2 \psi_{l,h}(r) \psi_{l,h}^*(r) = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k'). \quad (2.145)$$

Воспользовавшись соотношением (2.141), для волновой функции на энергетической поверхности можно получить другое полезное представление:

$$\psi_{l,h}(r) = \psi_{l,h}(R) \begin{cases} \sqrt{\frac{\hbar^2 R}{2\mu}} \mathfrak{R}_l^{-1}(E) \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}}{E_{l\lambda} - E} \varphi_l^{(\lambda)}(r), & r < R; \\ kR \operatorname{Im} \{ [L_l(k) - \mathfrak{R}_l^{-1}(E)] h_l^{(-)}(kr) h_l^{(+)}(kR) \}, & r > R, \end{cases} \quad (2.146)$$

где $\psi_{l,h}(R)$ — значение самой функции на граничной поверхности. Если $E \rightarrow E_{l\lambda}$, то из (2.146) находим

$$\psi_{l,h}(r) = \psi_{l,h\lambda}(R) \begin{cases} \sqrt{\frac{\hbar^2 R}{2\mu}} \frac{1}{\theta_{l\lambda}} \varphi_l^{(\lambda)}(r), & r < R; \\ k_{\lambda} R \operatorname{Im} \{ L_l(k_{\lambda}) h_l^{(-)}(k_{\lambda} r) h_l^{(+)}(k_{\lambda} R) \}, & r > R. \end{cases} \quad (2.147)$$

Энергии связанных состояний системы $E^{(n)}$ определяются нулями функции $D_l(E)$:

$$D_l(E^{(n)}) = 0; \quad E^{(n)} < 0. \quad (2.148)$$

Согласно (2.136) и (2.144) этим нулям соответствуют полюса амплитуды. Полюса располагаются на мнимой оси в верхней полуплоскости комплексной плоскости k : $k^{(n)} = i\kappa_n$, $E^{(n)} = -\hbar^2\kappa_n^2/2\mu$. Волновая функция связанного состояния с энергией $E^{(n)}$ описывается выражением

$$\psi_l^{(n)}(r) = \beta_{ln} \begin{cases} i \sqrt{\frac{2}{\mu R}} \frac{\hbar}{f(i\kappa_n)} \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}}{E_{l\lambda} - E^{(n)}} \varphi_l^{(\lambda)}(r), & r < R; \\ \frac{2}{\pi} \kappa_n k_l(\kappa_n r), & r > R, \end{cases} \quad (2.149)$$

где нормировочная постоянная β_{ln} определяется равенством

$$\beta_{ln}^2 = \frac{(-1)^l}{2\pi} \oint dk S_l(k).$$

Функции (2.143) и (2.149) взаимно ортогональны. Нетрудно показать, что функции непрерывного спектра $\psi_{l,k}(r)$ и функции связанных состояний $\psi_l^{(n)}(r)$ образуют полную систему.

Внеэнергетическая двухчастичная амплитуда. Двухчастичная амплитуда вне энергетической поверхности определяется согласно соотношению

$$f_l(k, k'; E) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr r^2 j_l(kr) V(r) \psi_{l,k'}(r, E). \quad (2.150)$$

Воспользовавшись уравнением (2.131), из выражения для амплитуды (2.150) можно исключить потенциал, и, таким образом двухчастичная амплитуда вне энергетической поверхности непосредственно выразится через компоненту Фурье внеэнергетической волновой функции:

$$f_l(k, k'; E) = (k_E^2 - k^2) \left\{ \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k') - \int_0^{\infty} dr r^2 j_l(kr) \psi_{l,k'}(r, E) \right\}. \quad (2.151)$$

Так как сама волновая функция $\psi_{l,k'}(r, E)$ определяется заданием \mathfrak{R} -функции, то соотношение (2.151) позволяет полностью описать внеэнергетическое поведение двухчастичного взаимодействия на основе задания \mathfrak{R} -матричных параметров. Используя выражения (2.132), (2.133) и (2.135), двухчастичную амплитуду вне энергетической поверхности представим в виде

$$f_l(k, k'; E) = R \{ (k_E^2 - k^2) \mathcal{F}_l(k, k') + ik_E X_l(k, E) h_l^{(+)}(k_E R) \times \\ \times f_l(k', k_E; E) + \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E) [r\psi_{l,k'}(r, E)]'_{r=R} + \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, k'; E) \}, \quad (2.152)$$

где

$$\mathcal{F}_l(k, k') = \frac{M_l(k') - M_l(k)}{k^2 - k'^2} j_l(kR) j_l(k'R); \quad (2.153)$$

$$\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, k'; E) = \sum_{\lambda} \frac{\tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E) \tilde{\theta}_{l\lambda}(k', E)}{E_{l\lambda} - E}. \quad (2.154)$$

Два первых слагаемых в выражении для амплитуды (2.152) обусловлены волновой функцией во внешней области, в то время как два последних слагаемых связаны с волновой функцией во внутренней области.

Используя (2.137) и (2.138), формулу для двухчастичной амплитуды вне энергетической поверхности (2.152) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 f_l(k, k'; E) = R \left\{ \frac{1}{k^2 - k'^2} [(k^2 - k_E^2) M_l(k) - (k'^2 - k_E^2) M_l(k')] \times \right. \\
 \times j_l(kR) j_l(k'R) + \frac{1}{1 - L_l(k_E) \mathfrak{R}_l(E)} [(L_l(k_E) - M_l(k) - M_l(k')) + \\
 + M_l(k) M_l(k') \mathfrak{R}_l(E)] j_l(kR) j_l(k'R) + \\
 + (M_l(k) - L_l(k_E)) j_l(kR) \tilde{\mathfrak{R}}_l(k', E) + (M_l(k') - L_l(k_E)) \times \\
 \left. \times \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E) j_l(k'R) + L_l(k_E) \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E) \tilde{\mathfrak{R}}_l(k', E) \right\} + \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, k'; E). \quad (2.155)
 \end{aligned}$$

Из такого представления непосредственно следует симметрия парциальной амплитуды относительно импульсов k и k' . Нетрудно убедиться также, что амплитуда (2.155) удовлетворяет условию унитарности

$$f_l(k, k'; E) = f_l^*(k, k'; E^*). \quad (2.156)$$

Согласно (2.155) двухчастичная амплитуда вне энергетической поверхности полностью определяется заданием функций $\mathfrak{R}_l(E)$, $\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E)$ и $\mathfrak{R}_l(k, k'; E)$. Формулы (2.139), (2.140) и (2.154) в общем виде устанавливают зависимости \mathfrak{R} -функций от энергии, при этом положение полюсов и значения вычетов определяются физическими свойствами системы. Если потенциал взаимодействия $V(r)$ известен, то параметры $E_{l\lambda}$, $\theta_{l\lambda}$ и $\tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E)$, входящие в \mathfrak{R} -функции, можно непосредственно определить, найдя систему собственных решений уравнения (2.131) без правой части с граничным условием (2.35).

Выражение для двухчастичной амплитуды (2.152) [или (2.155)] является общим, и из него легко получить различные формулы для некоторых предельных случаев. Так, выражение для амплитуды в модели твердой (отгалкивательной) сердцевины непосредственно следует из (2.152), если в нем положить $\mathfrak{R}_l(E) = \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E) = \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, k'; E) = 0$. Выражение для двухчастичной амплитуды в случае потенциала с нулевым радиусом действия получим из (2.152), если положим $R\mathfrak{R}_l(E) \rightarrow \rightarrow -a$ при $R \rightarrow 0$, где a — длина рассеяния. Если в формуле (2.152) опустить два последних слагаемых, то (2.152) перейдет в выражение для амплитуды, получаемое в модели граничных условий [45], согласно которой взаимодействие между двумя частицами описывается заданием логарифмической производной волновой функции на поверхности, ограничивающей область взаимодействия (задается значение логарифмической производной или же логарифмическая производная выбирается в виде некоторой функции энергии), при этом волновая функция во внутренней области считается равной нулю. Такая модель

непротиворечива только в случае сил нулевого радиуса действия, когда внутренняя область вообще отсутствует, а логарифмическая производная равна постоянной, и в случае отталкивательной сердцевины, когда логарифмическая производная принимает бесконечно большое значение, что соответствует невозможности сближения частиц на расстоянии, меньшее радиуса сердцевины. Выбор же конечного значения для логарифмической производной при радиусе взаимодействия, отличном от нуля, требует введения нефизических поверхностных бесконечно больших сил притяжения. Следует отметить также, что в модели граничных условий нарушается условие полноты функций.

Действительно, двухчастичная волновая функция в области взаимодействия отлична от нуля (за исключением частного предельного случая отталкивательной сердцевины), и это отличие существенно проявляется на внеэнергетическом характере двухчастичной амплитуды. Если взаимодействие характеризуется конечным радиусом, то логарифмическая производная двухчастичной волновой функции на граничной поверхности в общем случае является функцией энергии. Эту энергетическую зависимость удобно описывать введением \mathcal{R} -функции, совпадающей со значением обратной логарифмической производной и выражающейся через собственные значения энергии $E_{l\lambda}$ и приведенные ширины $\theta_{l\lambda}^{\lambda}$. Как мы видели, для полного описания внеэнергетического поведения двухчастичной амплитуды, кроме собственных уровней энергии и приведенных ширин, необходимо задание дополнительных параметров — ширин перекрытия. Последние, однако, не являются независимыми параметрами, так как с помощью решения обратной задачи рассеяния они выражаются через собственные уровни энергии и приведенные ширины.

Действительно, волновая функция вне области взаимодействия полностью определяется заданием логарифмической производной, поэтому амплитуда на энергетической поверхности также выражается через нее. Зная энергетическую зависимость парциальной амплитуды, можно по фазам рассеяния и полюсным особенностям матрицы столкновений решить обратную задачу рассеяния, т. е. восстановить потенциал. Используя полученный потенциал, можно найти внеэнергетическую волновую функцию, а следовательно, и внеэнергетическую амплитуду. Таким образом, задание энергетической зависимости логарифмической производной волновой функции при $r = R$, т. е. параметров \mathcal{R} -функции, позволяет полностью определить поведение двухчастичной амплитуды на энергетической поверхности и вне ее. Отметим, что решение обратной задачи рассеяния можно сводить не к восстановлению потенциала, а непосредственно к нахождению радиальной зависимости собственных функций $\varphi_l^{(\lambda)}(r)$ по заданным значениям собственных энергий $E_{l\lambda}$ и приведенных ширин $\theta_{l\lambda}^{\lambda}$. Следовательно, заданием набора параметров $E_{l\lambda}$ и $\theta_{l\lambda}^{\lambda}$ можно полностью описать двухчастичное взаимодействие.

Задачи

1. Найти внеэнергетическую амплитуду в случае взаимодействия, описываемого прямоугольной потенциальной ямой.

Пусть двухчастичное взаимодействие описывается прямоугольной потенциальной ямой:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R; \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Собственные функции $\varphi_l^{(\lambda)}(r)$ являются решениями уравнения (2.131) без правой части, которые удовлетворяют условию конечности при $r = 0$ и граничному условию $[r\varphi_l^{(\lambda)}(r)]'_{r=R} = 0$ при $r = R$. Для прямоугольной ямы собственные функции имеют вид

$$\varphi_l^{(\lambda)}(r) = C_{l\lambda} \hat{j}_l(K_{l\lambda} r), \quad (2.157)$$

где $C_{l\lambda}$ — нормировочные постоянные:

$$C_{l\lambda}^2 = \frac{2}{R^3} \frac{x_{l\lambda}^2}{[x_{l\lambda}^2 - l(l+1)] \hat{j}_l^2(x_{l\lambda})},$$

а $x_{l\lambda} \equiv K_{l\lambda} R$ являются решениями уравнения

$$\hat{j}_l(x) - x \frac{d}{dx} \hat{j}_l(x) = 0. \quad (2.158)$$

Собственные значения энергии $E_{l\lambda}$ выражаются через $x_{l\lambda}$ согласно

$$E_{l\lambda} = -V_0 + \frac{x_{l\lambda}^2}{2} \frac{\hbar^2}{\mu R^2}. \quad (2.159)$$

Приведенные ширины $\theta_{l\lambda}^0$ выражаются через значения собственных функций на Граничной поверхности согласно (2.97), и, следовательно,

$$\theta_{l\lambda}^0 = \frac{x_{l\lambda}^2}{x_{l\lambda}^2 - l(l+1)} \frac{\hbar^2}{\mu R^2}. \quad (2.160)$$

Решение уравнения (2.131) во внутренней области при произвольном значении энергии E (на энергетической поверхности), удовлетворяющее условию конечности в точке $r = 0$, имеет вид

$$\psi_{l,kE}(r) = C_l \hat{j}_l(Kr), \quad r < R, \quad (2.161)$$

где $K^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_0)$. Нетрудно найти логарифмическую производную от функции (2.161) при $r = R$:

$$f_l(E) = \frac{\hat{j}_l(KR) + R \frac{d}{dR} \hat{j}_l(KR)}{\hat{j}_l(KR)} \equiv M_l(K),$$

и, таким образом, получим энергетическую зависимость \mathfrak{R} -функции в явном виде

$$\mathfrak{R}_l(E) = \frac{\hat{j}_l(KR)}{\hat{j}_l(KR) + R \frac{d}{dR} \hat{j}_l(KR)} \equiv \frac{1}{M_l(K)}. \quad (2.162)$$

Кроме того, \mathfrak{R} -функция представляется в виде ряда

$$\mathfrak{R}_l(E) = \sum_{\lambda} \frac{\theta_{l\lambda}^2}{E_{l\lambda} - E}, \quad (2.163)$$

где параметры $E_{l\lambda}$ и $\theta_{l\lambda}^2$ определяются согласно (2.159) и (2.160).

Особенно простыми становятся полученные формулы при $l = 0$. В этом случае

$$\varphi_0^{(\lambda)}(r) = \sqrt{\frac{2}{R}} \frac{\sin K_{0\lambda} r}{r}, \quad (2.164)$$

где $K_{0\lambda} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{R}$, $\lambda = 1, 2, 3, \dots$. Собственные значения энергии и амплитуды приведенных ширин соответственно равны:

$$E_{0\lambda} = -V_0 + \frac{\pi^2}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{\mu R^2}; \quad \theta_{0\lambda} = (-1)^{\lambda+1} \sqrt{\frac{\hbar^2}{\mu R^2}}, \quad (2.165)$$

разложение \mathfrak{R} -функции принимает вид

$$\mathfrak{R}_0(E) = \frac{\text{tg} KR}{KR} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - K^2 R^2}. \quad (2.166)$$

Легко видеть, что (2.166) представляет собой разложение функции $\text{tg} KR/KR$ на простейшие дроби.

Используя определение (2.134), для амплитуды ширины перекрытия в случае прямоугольной потенциальной ямы получим

$$\tilde{\theta}_{l\lambda}(k, E) = \frac{k^2 - k_E^2}{K_{l\lambda}^2 - k^2} M_l(k) j_l(kR) \theta_{l\lambda}. \quad (2.167)$$

В частности, для $l = 0$ имеем

$$\tilde{\theta}_{0\lambda}(k, E) = \frac{k^2 - k_E^2}{K_{0\lambda}^2 - k^2} \cos kR \theta_{0\lambda}.$$

С помощью (2.167) обобщенные \mathfrak{R} -функции представим в виде

$$\tilde{\mathfrak{R}}_l(k, E) = \frac{k^2 - k_E^2}{k^2 - K_E^2} \{ \mathfrak{R}_l(E_k - V_0) - \mathfrak{R}_l(E) \} M_l(k) j_l(kR); \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{R}}_l(k, k'; E) = & \frac{(k^2 - k_E^2)(k'^2 - k_E^2)}{k^2 - k'^2} \left\{ \frac{1}{k^2 - K_E^2} [\mathfrak{R}_l(E_k - V_0) - \mathfrak{R}_l(E)] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{k'^2 - K_E^2} [\mathfrak{R}_l(E_{k'} - V_0) - \mathfrak{R}_l(E)] \right\} M_l(k) M_l(k') j_l(kR) j_l(k'R), \quad (2.169) \end{aligned}$$

где $E_k = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ и $E_{k'} = \hbar^2 k'^2 / 2\mu$. Таким образом, найдены все параметры \mathfrak{R} -функций и сами функции для потенциала в виде прямоугольной ямы.

Подставляя (2.162), (2.168) и (2.169) в формулу (2.155), найдем явное выражение для двухчастичной амплитуды вне энергетической поверхности в случае прямоугольной потенциальной ямы:

$$\begin{aligned}
 f_l(k, k'; E) = & R \left\{ \frac{k^2 - K^2}{k^2 - k'^2} \left[\frac{k^2 - k_E^2}{k'^2 - K_E^2} M_l(k) - \frac{k'^2 - k_E^2}{k^2 - K_E^2} M_l(k') \right] - \right. \\
 & - \frac{1}{1 - L_l(E) \mathfrak{R}_l(E)} \left[\frac{k^2 - K^2}{k'^2 - K_E^2} \left(1 - \frac{k^2 - k_E^2}{k^2 - K_E^2} L_l(E) \mathfrak{R}_l(E) \right) M_l(k) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{k^2 - K^2}{k^2 - K_E^2} \left(1 - \frac{k'^2 - k_E^2}{k'^2 - K_E^2} L_l(E) \mathfrak{R}_l(E) \right) M_l(k') + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(k^2 - K^2)^2}{(k^2 - K_E^2)(k'^2 - K_E^2)} (L_l(E) - M_l(k) M_l(k') \mathfrak{R}_l(E)) \right] \right\} j_l(kR) j_l(k'R). \quad (2.170)
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.131) во внутренней области, удовлетворяющее условию конечности и совпадающее на граничной поверхности ($r = R$) с (2.135), представим в виде

$$\psi_{l,k}(r, E) = A_l j_l(kr) + B_l j_l(kr), \quad r < R, \quad (2.171)$$

где

$$A_l = \frac{k^2 - k_E^2}{k^2 - K^2}; \quad B_l = \frac{k_E^2 - K^2}{k^2 - K^2} \frac{X_l(k, E)}{X_l(K, E)}.$$

Разложив функции (2.171) в ряд по собственным состояниям (2.157), убедимся, что выражения для коэффициентов разложения действительно совпадают с общим выражением (2.133).

2. Используя решение обратной задачи рассеяния, восстановить собственные функции во внутренней области через собственные значения энергии и приведенных ширин.

Пусть задана \mathfrak{R} -функция, описывающая взаимодействие в системе, т. е. заданы все полюсные особенности этой функции (уровни энергии E_λ) и вычеты в полюсах (приведенные ширины θ_λ^2):

$$\mathfrak{R}(E) = \sum_{\lambda} \frac{\theta_\lambda^2}{E_\lambda - E} \quad (2.172)$$

(для простоты ограничимся рассмотрением сферически-симметричного случая $l = 0$). Требуется найти собственные функции $\psi^{(n)}(r)$ во внутренней области $r < R$ (области взаимодействия), отвечающие отдельным уровням энергии E_λ .

Если задана \mathfrak{R} -функция, то согласно (2.138) и (2.144) матрица столкновений определяется соотношением

$$S(k) \equiv \exp [2i\delta(k)] = \frac{1 + ikR\mathfrak{R}(E)}{1 - ikR\mathfrak{R}(E)} \exp(-2ikR). \quad (2.173)$$

Энергии связанных состояний $E^{(n)}$ соответствуют полюсам матрицы столкновений и находятся при решении уравнения

$$1 - ikR\mathfrak{R}(E) = 0. \quad (2.174)$$

Асимптотические функции непрерывного спектра выражаются через фазу матрицы столкновений $\delta(k)$ согласно

$$\bar{\psi}_k(r) = \exp[i\delta(k)] \frac{\sin[kr + \delta(k)]}{r}. \quad (2.175)$$

Асимптотика для связанного состояния имеет вид

$$\bar{\psi}^{(n)}(r) = \beta_n \exp(-\kappa_n r)/r, \quad E^{(n)} = -\hbar^2 \kappa_n^2 / 2\mu, \quad (2.176)$$

где нормировочная константа в силу конечности радиуса области взаимодействия определяется равенством

$$\beta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \oint dk S(k).$$

Точные волновые функции для непрерывного спектра выражаются через асимптотические (2.175) с помощью преобразования

$$\psi_k(r) = \bar{\psi}_k(r) + \int_r^\infty dr' r'^2 K(r, r') \bar{\psi}_k(r'), \quad (2.177)$$

где ядро преобразования $K(r, r')$ не зависит от энергии и определяется решением основного уравнения обратной задачи рассеяния, называемого обычно уравнением Марченко:

$$K(r, r') + \mathcal{F}(r, r') + \int_r^\infty dr'' r''^2 K(r, r'') F(r'', r') = 0. \quad (2.178)$$

Ядро этого линейного интегрального уравнения непосредственно выражается через матрицу столкновений и энергии связанных состояний:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r, r') = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \{1 - S(k)\} \frac{\exp[ik(r+r')]}{rr'} + \\ & + \sum_n \beta_n^2 \frac{\exp[-\kappa_n(r+r')]}{rr'}. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Как показано в обратной задаче рассеяния [46, 47], уравнение (2.178) имеет единственное решение.

Зная решение уравнения (2.178), с помощью преобразования (2.177) можно найти по известной асимптотике (2.175) волновую функцию $\psi_k(r)$ во всей области пространства. Эта функция при $E = E_\lambda$ в области $r \leq R$ с точностью до коэффициента пропорциональности совпадает с собственной функцией $\varphi^{(\lambda)}(r)$:

$$\psi_{k\lambda}(r) = \frac{\hbar}{\theta_\lambda} \sqrt{\frac{R}{2\mu}} \psi_{k\lambda}(R) \varphi^{(\lambda)}(r), \quad r \leq R. \quad (2.180)$$

Следовательно, собственная функция $\varphi^{(\lambda)}(r)$, отвечающая уровню энергии E_λ определяется интегральным выражением

$$\varphi^{(\lambda)}(r) = \frac{\theta_\lambda}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{R}} \left\{ \bar{\psi}_{k\lambda}(r) + \int_r^\infty dr' dr'^2 K(r, r') \bar{\psi}_{k\lambda}(r') \right\} \Bigg| \bar{\psi}_{k\lambda}(R) \quad (2.181)$$

[на граничной поверхности ($r = R$) функции ψ_k и $\bar{\psi}_k$ совпадают], и, таким образом, задача восстановления собственных функций по параметрам \mathcal{R} -функции сводится к решению обратной задачи рассеяния.

§ 3.1. Составное ядро

Два механизма ядерных реакций. Ядерные реакции, возникающие при столкновениях нуклонов или каких-либо других сильно взаимодействующих частиц с ядрами, характеризуются большим разнообразием, связанным с индивидуальными особенностями сталкивающихся частиц и ядер и зависящим от энергии их относительного движения. Если состав продуктов реакции определяется составом сталкивающихся частиц и ядер, то кинематические характеристики продуктов в основном зависят от механизма процесса. Несмотря на очень большое разнообразие, ядерные реакции тем не менее можно условно разделить на две большие группы: *реакции с образованием промежуточной стадии составного ядра и прямые ядерные реакции*. В основе такого разделения лежит представление о двух альтернативных механизмах, особенностями которых и определяется специфика ядерных реакций.

Ядро представляет собой связанную систему частиц (нуклонов), которые характеризуются очень сильным взаимодействием с коротким радиусом действия. Для большинства ядер (за исключением самых легких) взаимодействие между частицами достигает насыщения в результате их плотной упаковки, проявляющейся в постоянстве плотности ядер. Действительно, радиусы ядер хорошо описываются формулой $R = r_0 A^{1/3}$, где A — число нуклонов и $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см. Постоянство плотности ядерного вещества указывает на применимость для описания ядер модели жидкой капли, т. е. капли вещества, находящегося в сильно сконденсированном состоянии. Так как нуклоны подчиняются статистике Ферми, то ядерное вещество следует рассматривать как квантовую ферми-жидкость. Характерной особенностью ферми-жидкости является сходство ее энергетического спектра, отвечающего слабозбужденным состояниям, с энергетическим спектром ферми-газа. Поэтому в пространстве импульсов основному состоянию ферми-жидкости, так же как и в случае ферми-газа, сопоставляется заполненная сфера Ферми с граничным импульсом, определяемым плотностью частиц, $k_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{r_0}$. Находя среднюю скорость квазичастицы из условия равенства длины волны де Бройля среднему расстоянию между нуклонами (эта скорость соответствует значению энергии порядка 6 МэВ), нетрудно оценить среднее время между столкновениями квазичастиц в ядре (*характерное ядерное время*) t_0 , которое оказывается равным 10^{-23} с. Очевидно, для процессов с характерными временами, меньшими t_0 , ядро можно рассматривать как газ квазичастиц (нуклонов), в то же время для процессов, длительность которых значительно превышает t_0 , существенно сильное взаимодействие между квазичастицами и ядро следует рассматривать как каплю сконденсированной жидкости.

Рассмотрим столкновение какой-либо частицы, например нуклона с ядром. Механизм взаимодействия будет существенным образом за-

висеть от энергии падающей частицы. Если энергия падающей частицы достаточно мала, так что время свободного пролета области взаимодействия оказывается больше t_0 , то столкновение сопровождается поглощением падающей частицы ядром, при этом энергия и импульс падающей частицы успевают распределиться между входящими в состав ядра частицами задолго до того, как сможет произойти вылет какой-либо частицы. Образующаяся система, состоящая из поглощенной частицы и ядра мишени и находящаяся в сильно возбужденном состоянии, называется *составным ядром*. Энергия возбуждения составного ядра распределяется среди большого числа степеней свободы подобно тому, как в капле обычной жидкости распределена тепловая энергия. Так как мало вероятно, что вся энергия возбуждения (или хотя бы значительная ее часть) вновь сконцентрируется на отдельной частице и последняя сможет покинуть область взаимодействия, то время жизни составного ядра оказывается очень большим (значительно больше характерного ядерного времени). Тем не менее составное ядро в конечном итоге теряет свою энергию возбуждения. Это происходит либо за счет испускания γ -квантов (медленного процесса, приводящего к охлаждению составного ядра), либо после продолжительного времени (достаточного, чтобы частица могла испытывать большое число столкновений внутри ядра) осуществляется маловероятная концентрация энергии на отдельной частице, которая в результате вылетает, охлаждая ядро. В общем случае вылетающая частица отличается от падающей, а энергия и направление движения вылетающей частицы отличны от начальных.

Идея об образовании составного ядра в ядерных реакциях была выдвинута Н. Бором в 1936 г. [48, 49]. Согласно его предположению ядерную реакцию следует считать состоящей из двух стадий: *образования составного ядра и распада составного ядра* на продукты реакции. При этом обе стадии представляют собой независимые процессы в том смысле, что распад составного ядра зависит только от энергии, момента количества движения и четности, но не зависит от способа образования.

Схематически ядерную реакцию с образованием составного ядра можно представить в виде двухступенчатого процесса:



где C — составное ядро, образующееся в промежуточной стадии. Сечение процесса с образованием составного ядра (3.1) вследствие независимости отдельных стадий можно записать так:

$$\sigma(a, b) = \sigma_c(a) G_c(b), \quad (3.2)$$

где $\sigma_c(a)$ — сечение образования составного ядра C в результате поглощения частицы a исходным ядром A , а $G_c(b)$ — вероятность распада составного ядра C с испусканием частицы b и образованием конечного ядра B^1 .

¹ Здесь и в дальнейшем используем обозначения, принятые в книге Блатта и Вайскопфа [5].

Детализируя квантовые состояния всех частиц до и после реакции, обозначим входной канал α , а выходной β . Сечение $\sigma(\alpha, \beta)$, соответствующее переходу системы из канала α в канал β , запишем в виде

$$\sigma(\alpha, \beta) = \sigma_C(\alpha) G_C(\beta), \quad (3.3)$$

где $\sigma_C(\alpha)$ — сечение образования ядра C по каналу α ; $G_C(\beta)$ — вероятность распада C по каналу β ; $G_C(\beta)$ — безразмерная величина. Очевидно, что $\sum_{\beta} G_C(\beta) = 1$, если суммирование распространяется по всем возможным способам распада.

Применимость предположения Н. Бора непосредственно связана с большим числом перераспределений энергии в составном ядре. Большое число перераспределений энергии оказывается возможным, если длина свободного пробега падающей частицы в ядерном веществе Λ гораздо меньше радиуса ядра R . Среднее значение длины свободного пробега можно оценить согласно

$$\Lambda = 1/\rho_0\sigma, \quad (3.4)$$

где σ — сечение взаимодействия падающей частицы с отдельным нуклоном и ρ_0 — плотность нуклонов внутри ядра. Сечение σ зависит от энергии относительного движения \tilde{E} . Если в качестве падающей частицы выбрать нейтрон и предположить, что $\tilde{E} > 10$ МэВ, то современные измерения дают

$$\sigma \approx \frac{4 \text{ МэВ}}{\tilde{E}} 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Значение ρ_0 нетрудно найти из приближенной формулы для радиусов ядер: $\rho_0 = 3/4\pi r_0^3$. Относительную энергию \tilde{E} можно оценить по порядку величины следующим образом:

$$\tilde{E} \approx 1/2 (E_0 + E),$$

где $E_0 \approx 20$ МэВ — средняя кинетическая энергия нуклона внутри ядра; E — энергия падающего нейтрона. Таким образом, $\Lambda \approx 0,9 \times 10^{-15} (E_0 + E)$. Здесь E_0 и E выражены в МэВ, а Λ — в см. Полная энергия возбуждения составного ядра $E_C = S + E$, где S — энергия, необходимая для отделения поглощенной частицы от составного ядра. Вследствие малости длины свободного пробега поглощенного нуклона Λ энергия возбуждения E_C быстро распределяется среди всех нуклонов составной системы, поэтому каждый из них будет обладать в среднем энергией $E_C/(A + 1)$. Если $E_C/(A + 1)$ мала по сравнению с энергией отделения S , то в составном ядре произойдут многочисленные перераспределения энергии, прежде чем она сконцентрируется на какой-то частице и последняя сможет покинуть ядро. В случае полного перераспределения энергии состояние составного ядра (еще до распада) оказывается совершенно независимым от способа его образования. Условия применимости предположения Н. Бора запишем в виде

$$\Lambda \ll R; \quad E \ll AS, \quad (3.5)$$

Эти условия выполняются для ядер $A > 10$ при энергиях $E < 50$ МэВ (энергия отделения $S \approx 8$ МэВ).

Указанный механизм продолжительное время рассматривался в качестве основного механизма ядерных реакций. В действительности существуют причины, препятствующие полному перераспределению энергии, а также возможные условия, при которых такое перераспределение не осуществляется. Полное перераспределение энергии не происходит, если энергия падающей частицы достаточно велика: $E > 50$ МэВ. В этом случае падающая частица, столкнувшись с отдельным нуклоном ядра мишени, с большой вероятностью покидает ядро без взаимодействия с другими нуклонами. Такой процесс называют обычно *прямой реакцией*. Перераспределение энергии сильно ослабляется из-за влияния принципа Паули [при оценке Λ мы пренебрегали принципом Паули, учет которого приводит к значительному увеличению Λ по сравнению с (3.4)], поэтому прямые реакции возможны и при энергиях $E < 50$ МэВ. Перераспределение энергии может быть сильно ослаблено также вследствие специфических особенностей сталкивающихся частиц и ядер. Так, при столкновении дейтрона с ядром в силу рыхлости (малости энергии связи и больших размеров) дейтрона с большой вероятностью осуществляется *процесс срыва*, при котором только один из нуклонов, первоначально входящих в состав дейтрона, захватывается ядром. Другим примером прямого процесса может служить рассеяние нуклона сфероидальным ядром, сопровождающееся возбуждением вращательных степеней свободы ядра.

В отличие от ядерных реакций с образованием составного ядра, когда возбуждается большое число степеней свободы, в прямых ядерных реакциях возбуждается только небольшое число степеней свободы. С этим обстоятельством непосредственно связано различие в длительности указанных реакций. Процессы с образованием составного ядра протекают значительно медленнее прямых процессов. Длительность прямого процесса определяется характерным ядерным временем t_0 , или более точно — временем, необходимым для того, чтобы связанный в ядре нуклон смог пройти сквозь ядро (это время отличается от t_0

на множитель, пропорциональный $A^{\frac{1}{3}}$). Соответствующая этому времени ширина примерно равна $3,8\sqrt{E} A^{-\frac{1}{3}}$ МэВ (E — энергия налетающего нуклона, МэВ). В то же время экспериментально наблюдаются резонансные сечения с шинами, изменяющимися от 0,1 эВ до 1 кэВ. Они соответствуют состояниям составного ядра, которые характеризуются временами жизни от нескольких тысяч до нескольких миллионов ядерных времен t_0 .

Прямые реакции и реакции с образованием составного ядра представляют собой предельные случаи. В действительности реализуются также ядерные реакции, носящие промежуточный характер между указанными реакциями. Так, составная система, образующаяся при захвате падающей частицы ядром, может распасться и до того момента, когда энергия, вносимая захваченной частицей, распределится между всеми нуклонами ядра (*предравновесный распад*). Кроме того, рассеивает-

мая частица может испытать не одно, а два или несколько столкновений с нуклонами ядра мишени (*непрямое рассеяние*).

Для пояснения рассмотрим несколько детальнее процесс столкновения падающей частицы с ядром. Очевидно, что даже вне поверхности ядра (на расстояниях порядка радиуса действия двухчастичных ядерных сил) действуют силы, обусловленные результирующим ядерным потенциалом. Поэтому падающий нуклон, попадая в область действия ядерного потенциала, может отклониться и вылететь в другом направлении с той же энергией. Такой процесс представляет собой прямое упругое, или *потенциальное рассеяние*. С другой стороны, падающий нуклон, проникая в ядро, может столкнуться с одним из нуклонов и возбудить его на уровень, лежащий выше поверхности Ферми, при этом на одном из нижележащих уровней образуется вакансия (дырка). Падающий нуклон, выбывая из входного канала, также заполняет один из уровней выше поверхности Ферми. (Случай, когда два нуклона обмениваются состояниями, соответствует упругому *обменному рассеянию*.) Образовавшееся состояние можно рассматривать как двухчастично-дырочное возбужденное состояние ($2p1h$ -состояние) составной системы. Если хотя бы один из нуклонов обладает энергией, превышающей энергию отделения, то имеются две возможности: 1) нуклон может покинуть ядро без взаимодействия с другими нуклонами, за исключением отклонения в среднем ядерном потенциале — такой процесс называют прямой реакцией; 2) нуклон может испытать столкновение с другим нуклоном ядра, при этом образуется трехчастично-двухдырочное возбужденное состояние ($3p2h$ -состояние) составной системы. Если же ни один из нуклонов в двухчастично-дырочном возбужденном состоянии не обладает энергией, превышающей энергию отделения, то может реализоваться только вторая возможность. В дальнейшем каждый из нуклонов будет испытывать столкновение с другими нуклонами, при этом энергия возбуждения будет постепенно распределяться среди всех нуклонов составной системы.

Состояния составной системы, связанные с возбуждением небольшого числа нуклонов ($2p1h$, $3p2h$, $4p3h$ и т. п.), называют *входными состояниями*. Составная система из любого входного состояния может перейти с определенной вероятностью во входной (упругий) канал или же какой-либо другой открытый канал реакции. Процессы с числом столкновений, больше одного, называются *сложными (непрямыми) реакциями* (рис. 3.1). При сложных реакциях, так же как и при прямых, угол вылета скоррелирован с направлением движения падающей частицы, однако эта корреляция пропадает, если число промежуточных столкновений оказывается достаточно большим. В этом случае энергия возбуждения в результате большого числа последовательных столкновений между нуклонами распределяется по всем степеням свободы. Составная система, находящаяся в таком равномерном состоянии, и отождествляется с составным ядром.

Энергетический спектр составного ядра. Особенности *энергетического спектра составного ядра* непосредственно связаны с тем обстоятельством, что составное ядро представляет собой сложную квантовомеханическую систему с большим числом степеней свободы, находящуюся

ся в сильно возбужденном состоянии (энергия возбуждения, по крайней мере, больше энергии отделения первоначально поглощенной частицы). Рассмотрим составное ядро C , образующееся в результате поглощения частицы a некоторым ядром A :



Пусть исходное ядро характеризуется массовым числом A и зарядовым числом Z , а в качестве падающей частицы выберем нейтрон n . Тогда система C представляет собой ядро с массовым числом $A + 1$

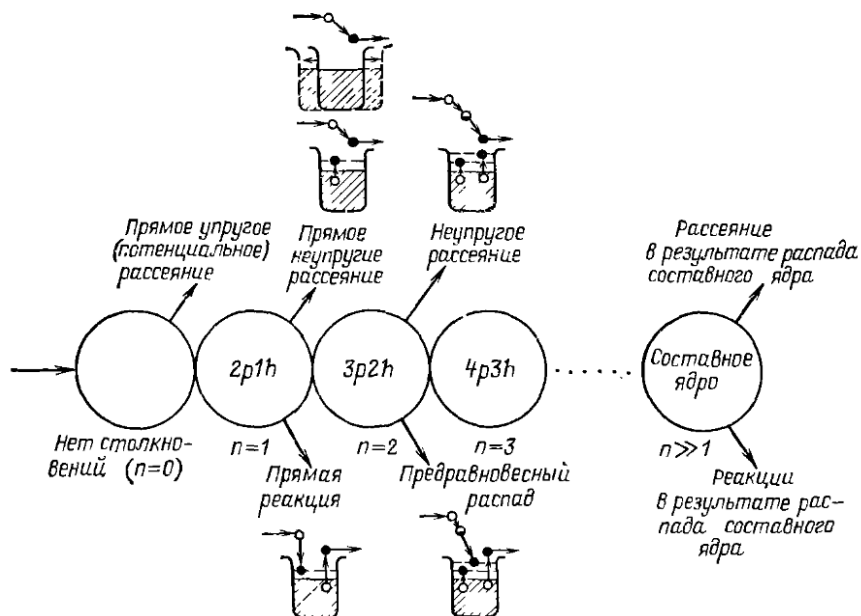


Рис. 3.1. Схема возможных процессов рассеяния и реакций, возникающих при столкновении нуклона с ядром

и зарядовым числом Z . На рис. 3.2 схематически представлен спектр ядра. За начало отсчета значений энергии выбрана энергия основного состояния $E_C = mc^2$. При таком выборе отсчета энергия E_λ ядра C в каком-либо состоянии λ совпадает с энергией возбуждения ядра. Энергия основного состояния ядра $E_0 = 0$. Возбужденным состояниям ядра соответствуют положительные дискретные значения энергии E_1, E_2 и т. д. В отличие от основного состояния возбужденные состояния характеризуются конечными временами жизни благодаря возможности радиационных переходов в более низкие состояния. Обратная величина времени жизни $\tau^{(\lambda)}$ уровня E_λ определяется вероятностью испускания γ -кванта за единицу времени. Выраженная в энергетических единицах эта величина называется радиационной шириной уровня:

$$\Gamma_\lambda = \hbar/\tau^{(\lambda)}. \quad (3.7)$$

(Вследствие соотношения неопределенностей $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ величина Γ_λ может интерпретироваться как неопределенность значения энергии $\Delta E \approx \Gamma_\lambda$ для состояния, существующего ограниченное время $\Delta t \approx \tau^{(\lambda)}$.)

По мере увеличения энергии возбуждения плотность уровней возрастает. Значение энергии возбуждения, при котором становится возможным

отделение одной из частиц системы C (значение энергии нижайшего порога разделения системы C на две подсистемы $S_{\text{мин}}$), определяет границу непрерывного спектра.

Составное ядро, образующееся в результате процесса (3.6), характеризуется энергией E_C , лежащей в области непрерывного спектра:

$$E_C = E_A + E_a + S_{aA}^C. \quad (3.8)$$

Здесь E_A — энергия возбуждения исходного ядра A ; E_a — энергия относительного движения частицы a и ядра A ;

$S_{aA}^C = (m_a + m_A - m_C) c^2$ — энергия связи ядра C относительно распада на частицу a и ядро A . Переход дискретного спектра в непрерывный при значениях энергии $E_C > S_{\text{мин}}$ непосредственно связан с возможностью распада системы C . Однако такое резкое изменение структуры спектра возникает в том случае, если ограничиться только учетом степеней свободы,

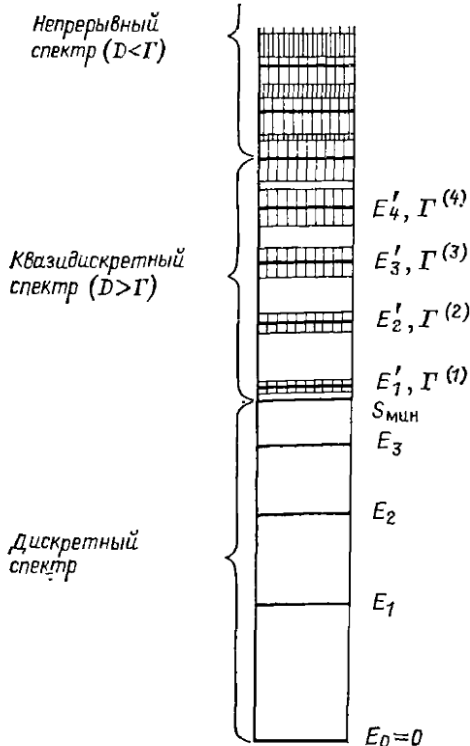


Рис. 3.2. Энергетический спектр ядра

связанных с относительным движением одной из частиц системы C и соответствующего остаточного ядра. В действительности из-за наличия большого числа степеней свободы в составном ядре C вероятность концентрации всей энергии возбуждения на отдельной частице мала и поэтому структура спектра не должна сильно изменяться с увеличением энергии при значениях, не слишком отличающихся от S . Другими словами, характер уровней не должен резко изменяться с изменением энергии. Указанием энергетического порога может служить лишь появление малой вероятности испускания частицы. Следовательно, и при энергиях возбуждения, больших $S_{\text{мин}}$, энергетический спектр будет состоять из отдельных *квазидискретных уровней* E_λ , ширина которых определяется не только вероятностью испускания γ -кванта, но и вероятностью процесса распада. Для возмож-

ности реализации квазидискретного спектра при энергиях возбуждения, превосходящих $S_{\text{мин}}$, необходимо, чтобы время жизни возбужденных состояний было достаточно большим, т. е. чтобы ширина Γ_λ оказалась меньше расстояния между соседними уровнями D_λ :

$$\Gamma_\lambda < D_\lambda. \quad (3.9)$$

С ростом энергии возбуждения квазидискретные уровни E_λ постепенно уширяются по мере того, как из энергетических соображений увеличивается число различных способов распада. Полная ширина уровня E_λ представляется в виде суммы:

$$\Gamma_\lambda = \sum_a \Gamma_a^\lambda + \Gamma_\gamma^\lambda, \quad (3.10)$$

где Γ_a^λ — парциальная ширина, соответствующая испусканию какой-либо частицы a ; Γ_γ^λ — радиационная ширина, суммирование проводится по всем открытым каналам. С увеличением энергии возбуждения полная ширина уровня Γ_λ растет по следующим причинам: 1) с более высокого уровня возможно испускание большего числа частиц; 2) при больших энергиях возбуждения допустимо большее число различных конечных состояний остаточного ядра; 3) отдельные парциальные ширины Γ_a^λ сами увеличиваются с ростом энергии.

Очевидно, о квазидискретном спектре можно говорить только в том случае, если выполняется условие (3.9), т. е. если ширина уровней меньше расстояния между ними. По мере увеличения энергии возбуждения расстояние между уровнями оказывается настолько малым, а ширина настолько большой, что уровни перекрываются, и мы попадаем в область *квазинепрерывного спектра*. Однако даже в этой области флуктуации плотности уровней и специальные правила отбора могут привести к тому, что особенности дискретного спектра будут сохраняться. Только когда энергия возбуждения становится сравнимой с полной энергией связи (порядка 6—8 МэВ на частицу), характер уровней качественно изменяется. В этой области концентрация на отдельной частице энергии, достаточной, чтобы частица могла вылететь из ядра, является правилом, а не исключением. При этих условиях возникает истинный непрерывный спектр уровней.

Распадающиеся состояния составного ядра. Квазидискретные уровни в энергетическом спектре отвечают долгоживущим квазистационарным состояниям составного ядра. Эти квазистационарные состояния характеризуются хотя и большим, но конечным временем жизни, т. е. составное ядро, находящееся в таком квазистационарном состоянии, в конечном итоге испытывает распад, сопровождающийся вылетом частицы. Существование распадающихся квазистационарных состояний удобно проиллюстрировать на простейшем примере движения частицы в потенциальной яме, если при этом ввести некоторое дополнительное условие, отражающее особенности движения составного ядра.

Представим себе частицу, движущуюся в поле прямоугольной потенциальной ямы:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R; \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

при этом будем предполагать, что выполняется условие $2\mu V_0 R^2/\hbar^2 \gg 1$ (это условие обеспечивает наличие большого числа связанных состояний). Радиальная волновая функция в состоянии с определенным орбитальным моментом l удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u_l = 0. \quad (3.11)$$

Рассмотрим сначала связанные состояния частицы в яме. Энергии этих состояний отрицательны ($E < 0$), и движение частицы ограничено областью внутри ямы. Общее решение уравнения (3.11), удовлетворяющее условию конечности при $r = 0$, запишем в виде

$$u_l(r) = \begin{cases} Cr j_l(Kr), & r < R, \\ Ar h_l^{(+)}(ikr) + Br h_l^{(-)}(ikr), & r > R, \end{cases} \quad (3.12)$$

где введены обозначения $K = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_0)}$ и $\kappa = \sqrt{\frac{2\mu |E|}{\hbar^2}}$. Так как $h_l^{(-)}(ikr)$ возрастает до бесконечности с увеличением r , то в силу finитности движения необходимо положить

$$B = 0. \quad (3.13)$$

Из этого условия непосредственно следует дискретный спектр связанных состояний.

Картина существенно изменяется, если энергия становится положительной ($E > 0$). В этом случае решение уравнения (3.11) при $r > R$ принимает вид

$$u_l(r) = Au_l^{(+)}(r) + Bu_l^{(-)}(r), \quad r > R, \quad (3.14)$$

где $u_l^{(\pm)}(r) = kr h_l^{(\pm)}(kr)$ и $k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$. Это решение представляет собой суперпозицию сходящейся и расходящейся волн. Оба слагаемых в (3.14) при больших значениях r ограничены, и оснований для введения условия типа (3.13) нет. Решение (3.14) существует при любых $E > 0$, т. е. система характеризуется непрерывным спектром.

Однако такой вывод является непосредственным следствием упрощенного характера рассматриваемой модели. В действительности составное ядро представляет собой многочастичную систему, и связанное с этим распределение энергии возбуждения по большому числу степеней свободы приводит к тому, что в системе осуществляются квазистационарные состояния. Квазистационарные состояния получаются, если потребовать, чтобы при $r > R$ решение (3.14) содержало только расходящуюся волну, т. е.

$$\mathcal{B} = 0. \quad (3.15)$$

Такое требование является непротиворечивым, если интересоваться эволюцией системы во временном интервале, ограниченном, по крайней мере, с одной стороны. Условие (3.15) означает вполне определенный выбор решений уравнения (3.11), которые описывают распадающиеся состояния. Это условие выполняется только при определенных энергиях, которые можно найти с помощью логарифмической производной

$f_l(E)$. Так как радиальная функция и ее производная непрерывны при $r = R$, то условие (3.15) эквивалентно соотношению

$$f_l(E) \equiv \frac{\frac{d}{dR} [Rj_l(KR)]}{j_l(KR)} = \Delta_l(E) + is_l(E), \quad (3.16)$$

где Δ_l и s_l определяются согласно (2.20) и (2.21). Соотношение (3.16) означает, что логарифмическая производная $f_l(E)$ от внутренней функции при $r = R$ должна совпадать с логарифмической производной чисто расходящейся волны $u_l^{(+)}(r)$. Особенно простой вид это соотношение принимает для случая s -состояния:

$$f_0(E) \equiv KR \operatorname{ctg} KR = ikR. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) [в частном случае (3.17)] определяет квазидискретные уровни энергии, отвечающие распадающимся состояниям системы. Это уравнение можно решить численным методом и затем найти соответствующие комплексные значения энергии. Однако больший интерес представляет приближенное нахождение решения (3.16).

Рассмотрим вместо (3.16) более простое граничное условие, не содержащее мнимых величин:

$$f_l(E) = 0. \quad (3.18)$$

Обозначим положительные значения энергии, при которых выполняется условие (3.18) E_λ . Соответствующие значения энергии, отсчитываемые от основного уровня составного ядра, обозначим E_λ^C ($E_\lambda^C = S + E_\lambda$). При решении (3.16) воспользуемся разложением функции $f_l(E)$ в ряд в окрестности точки E_λ :

$$f_l(E) \approx \left. \frac{df_l(E)}{dE} \right|_{E=E_\lambda} (E - E_\lambda).$$

Обозначим W_λ комплексное значение энергии ядра C , при котором выполняется условие (3.16). Считая правую часть уравнения (3.16) малой и предполагая, что W_λ близко к одному из значений E_λ^C , приближенно находим

$$\left. \frac{df_l(E)}{dE} \right|_{E_\lambda} (W_\lambda - E_\lambda^C) = \Delta_l(E_\lambda) + is_l(E_\lambda), \quad E_\lambda^C = S + E_\lambda.$$

Откуда следует

$$W_\lambda = E_\lambda^C + \delta E_\lambda - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda, \quad (3.19)$$

где δE_λ — сдвиг уровня относительно положения, определяемого из условия обращения логарифмической производной в нуль, т. е. $f_l(E_\lambda) = 0$; Γ_λ — ширина уровня:

$$\delta E_\lambda = -\Delta_l(E_\lambda) \theta_{l\lambda}^2; \quad \Gamma_\lambda = 2s_l(E_\lambda) \theta_{l\lambda}^2. \quad (3.20)$$

Нами использовано соотношение $-\frac{df_l(E)}{dE} \Big|_{E_\lambda} = \theta \bar{\Gamma}_\lambda^2$. В частном случае s -состояния ($l = 0$)

$$\delta E_\lambda = 0; \quad \Gamma_\lambda = 2k_\lambda R \theta_{0\lambda}^2.$$

Значения W_λ являются комплексными, мнимая часть определяет ширину уровня. Временная зависимость волновой функции квазистационарного состояния $\psi_\lambda(t)$ определяется множителем $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} W_\lambda t\right)$, поэтому плотность вероятности для квазистационарного состояния экспоненциально уменьшается со временем:

$$|\psi_\lambda(t)|^2 = |\psi_\lambda(0)|^2 \exp\left(-\frac{\Gamma_\lambda}{\hbar} t\right). \quad (3.21)$$

Монотонное уменьшение плотности вероятности означает, что состояние испытывает непрерывный распад и характеризуется временем жизни $\tau^\lambda = \hbar/\Gamma_\lambda$. Подчеркнем, что экспоненциальное уменьшение плотности вероятности со временем является непосредственным следствием предположения о существовании только расходящейся волны.

Энергетические уровни квазидискретного спектра оказываются как бы размытыми на величину Γ_λ , в чем нетрудно убедиться, разложив волновую функцию квазистационарного состояния $\psi_\lambda(t)$ в ряд Фурье по времени:

$$\psi_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \psi_\lambda(E) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right).$$

Волновую функцию $\psi_\lambda(t)$, отличающуюся от нуля только в течение конечного промежутка времени, можно задать в виде

$$\psi_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0; \\ \psi_\lambda^0 \exp\left[-\frac{i}{\hbar} W_\lambda(t-t_0)\right], & t > t_0, \end{cases}$$

где t_0 — некоторый начальный момент времени, отличный от $-\infty$; W_λ — комплексная энергия (3.19) и тогда распределение по энергии будет характеризоваться спектральной функцией

$$|\psi_\lambda(E)|^2 = \frac{|\psi_\lambda^0|^2}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2}, \quad \tilde{E}_\lambda = E_\lambda + \delta E_\lambda. \quad (3.22)$$

Ширина этого распределения определяется величиной Γ_λ , которая связана с временем жизни $\tau^{(\lambda)}$ соотношением $\Gamma_\lambda = \hbar/\tau^{(\lambda)}$. Очевидно, энергию такого распадающегося состояния можно зафиксировать только с точностью до величины $\Delta E \sim \Gamma_\lambda$.

§ 3.2. Резонансные ядерные процессы

Условие возникновения резонансов. Рассмотрим различные процессы с образованием составного ядра. Особенностью таких процессов в случае малых энергий падающих частиц является наличие резонансов в энергетической зависимости сечений¹.

Будем предполагать, что падающая частица не заряжена и ее энергия достаточно мала, так что можно ограничиться рассмотрением взаимодействия только в s -состоянии ($l = 0$). Волновую функцию в непосредственной близости от границы ядра при $r < R$ приближенно можно представить в виде суммы сходящейся и расходящейся волн:

$$u_0(r) \sim \exp(-iKr) + b \exp(iKr), \quad (3.23)$$

где b — комплексная амплитуда, зависящая от свойств составного ядра. Так как вероятность достижения частицей граничной поверхности из внутренней области не может превышать вероятности первоначального проникновения частицы в ядро, то амплитуда b по модулю не превосходит единицу. С увеличением энергии падающей частицы $|b|$ уменьшается. Если энергия падающей частицы достаточно мала и открыт только входной канал (энергия падающего нейтрона должна быть меньше энергии возбуждения исходного ядра и меньше порога любой ядерной реакции), составное ядро может распаться только путем испускания поглощенной частицы с первоначальной энергией. В этом случае расходящаяся волна имеет по модулю такую же амплитуду, как и сходящаяся (т. е. $|b| = 1$), поэтому

$$b = \exp[2i\Phi(E)], \quad (3.24)$$

где $\Phi(E)$ — некоторая вещественная фаза.

Заметим, что (3.23) не является точным выражением для волновой функции частицы внутри ядра. Волновая функция, описывающая движение частицы внутри ядра, должна зависеть от координат всех нуклонов, и ее нельзя рассматривать как волновую функцию задачи одного тела. Поэтому выражение (3.23) можно использовать только в качестве грубого приближения для волновой функции. Однако это приближенное выражение правильно отражает тот факт, что частица внутри ядра характеризуется большим средним значением волнового числа K и с заметной вероятностью может возвратиться в исходный канал. Используя приближенное выражение (3.23) и соотношение (3.24),

¹ Теория резонансных ядерных явлений разработана в [33, 34, 40, 50—54]. Первоначально резонансная формула для сечения процесса с образованием составного ядра была введена с помощью теории возмущений [40, 50]. В дальнейшем был предложен ряд других, более строгих выводов этой формулы [33, 34, 51, 52]. Многоуровневая резонансная формула была получена Капуром и Пайерлсом [33] (см. также [51]). Описание резонансных ядерных явлений, основанное на рассмотрении энергетической зависимости логарифмической производной волновой функции на поверхности ядра, предложено в работе Фешбаха, Пизли и Вайскопфа [31]. Строгий вывод резонансной дисперсионной формулы на основе использования аналитических свойств матрицы столкновений предложен в работе А. И. Ахизера и И. Я. Померанчука [53].

найдем логарифмическую производную от волновой функции на поверхности ядра:

$$f_0(E) \equiv R \left(\frac{du_0/dr}{u_0} \right)_{r=R} = -KR \operatorname{tg} [KR + \Phi(E)]. \quad (3.25)$$

Фаза $\Phi(E)$ зависит от энергии падающей частицы и определяется ядерным взаимодействием.

Нетрудно показать, что с возможностью возвращения частицы обратно во входной канал непосредственно связано возникновение резонансных явлений. Запишем волновую функцию вблизи граничной поверхности внутри ядра в виде

$$u_0(r) = C \cos [Kr + \Phi(E)], \quad r < R, \quad (3.26)$$

где C — некоторая постоянная. Волновую функцию частицы во внешней области можно записать в виде

$$u_0(r) = A \sin (kr + \delta_0), \quad r > R, \quad (3.27)$$

Рис. 3.3. Поведение волновой функции нейтрона вблизи поверхности ядра

где постоянная A определяется условием нормировки и δ_0 — фаза рассеяния. Волновое число k , отвечающее энергии частицы вне ядра, значительно меньше внутреннего волнового числа K ($k \ll K$). При $r = R$ функции (3.26) и (3.27) должны удовлетворять условиям сшивки. Так как сшиваются две периодические функции с различными волновыми числами, то отношение амплитуд в общем случае равно обратному отношению волновых чисел:

$$\frac{C}{A} = \frac{k}{K}.$$

Однако если $\Phi(E)$ такова, что при $r = R$ волновая функция $u_0(r)$ максимальна, т. е. логарифмическая производная волновой функции при $r = R$ равна нулю, то внутренняя и внешняя волновые функции будут характеризоваться одинаковыми амплитудами (рис. 3.3).

Следовательно, волновая функция падающей частицы в общем случае слабо проникает внутрь ядра. Если же энергия такова, что логарифмическая производная волновой функции на поверхности ядра обращается в нуль, то волновая функция и во внутренней области оказывается заметно отличной от нуля. Другими словами, падающая частица может проникнуть внутрь ядра и привести к образованию составного ядра только в том случае, если ее энергия равна или близка к резонансному значению E_λ .

Резонансные значения энергии E_λ определяются из условия обращения логарифмической производной в нуль:

$$f_0(E_\lambda) = 0. \quad (3.28)$$

Как было показано выше, такое же условие определяет энергию квази-стационарных состояний составного ядра. [В эквивалентности выражений для логарифмической производной (3.17) и (3.25) нетрудно убедиться, заметив, что, описывая частицу во внутренней области волновой функцией (3.26), из требования обращения этой функции в нуль при $r = 0$ следует $\Phi(E_\lambda) = \pi/2$].

Резонансное упругое рассеяние ($l = 0$). Предположим вначале, что открыт один входной канал. В этом случае возможно только упругое рассеяние, так как поглощаемая частица вылетает по тому же каналу, по которому она попадает в ядро. Сечение упругого рассеяния $\sigma_e^{(l)}$ описывается общей формулой (2.29), с помощью которой оно выражается через логарифмическую производную $f_l(E)$.

Рассмотрим прежде всего наиболее интересный случай рассеяния нейтронов с $l=0$. Волновая функция вблизи граничной поверхности во внутренней области определяется выражением (3.26). Так как амплитуды сходящейся и расходящейся волн по абсолютной величине одинаковы, то логарифмическая производная при $r = R$ вещественна:

$$f_0(E) = -KR \operatorname{tg}(KR + \Phi(E)). \quad (3.29)$$

Фаза $\Phi(E)$ предполагается достаточно гладкой функцией энергии.

Рассмотрим область энергий E вблизи резонансного значения E_λ , при котором логарифмическая производная обращается в нуль. Амплитуды волн вне и внутри ядра оказываются одинаковыми только в случае, когда падающая волна характеризуется углом наклона в точке $r = R$, близким к нулю, т. е. близким к нулю значением логарифмической производной. Для нахождения энергетической зависимости сечения упругого рассеяния при энергиях E , близких к резонансному значению E_λ , разложим логарифмическую производную (3.29) около нуля при E_λ в степенной ряд по разности $E - E_\lambda$ и отбросим все члены, кроме линейного:

$$f_0(E) \approx \left(\frac{df_0}{dE} \right)_{E_\lambda} (E - E_\lambda), \quad (3.30)$$

где (df_0/dE) — производная функции $f_0(E)$ по E при $E = E_\lambda$. Так как в одноканальном случае логарифмической производной можно сопоставить \mathfrak{R} -функцию (2.38) и нулям логарифмической производной $f_0(E)$ отвечают простые полюса \mathfrak{R} -функции, то

$$(df_0/dE)_{E_\lambda} = -\theta_\lambda^{-2}, \quad \theta_\lambda^2 \equiv \theta_{0\lambda}^2. \quad (3.31)$$

Из этого соотношения следует, что аргумент тангенса в (3.29) является монотонно возрастающей функцией энергии.

Введем положительно определенную величину

$$\gamma_e^\lambda(E) = 2kR\theta_\lambda^2, \quad (3.32)$$

при этом сечение упругого рассеяния в соответствии с (2.31) будет описываться формулой

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k^2} \left| \exp(2ikR) - 1 + \frac{i\gamma_e^{(\lambda)}}{E - E_\lambda + \frac{i}{2}\gamma_e^{(\lambda)}} \right|^2. \quad (3.33)$$

Первые два слагаемых под знаком квадрата модуля характеризуют амплитуду потенциального рассеяния, третье слагаемое — амплитуду резонансного рассеяния. Резонансная амплитуда описывает рассеяние, происходящее с образованием составного ядра.

Если энергия E близка к резонансному значению E_λ , то амплитуда резонансного рассеяния имеет порядок единицы. При резонансном значении энергии она равна двум и оказывается значительно больше амплитуды потенциального рассеяния, если $kR \ll 1$. Однако вдали от резонанса амплитуда резонансного рассеяния оказывается значительно меньше амплитуды потенциального рассеяния. Когда обе амплитуды имеют один и тот же порядок величины, между ними проявляется интерференция. Формулу для сечения рассеяния (3.33) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_e = \frac{\pi}{k^2} |\exp(2ikR) - 1|^2 + \frac{2\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ [\exp(-2ikR) - 1] \frac{i\gamma_e^{(\lambda)}}{E - E_\lambda + \frac{i}{2}\gamma_e^{(\lambda)}} \right\} + \\ + \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e^{(\lambda)^2}}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4}\gamma_e^{(\lambda)^2}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь первое слагаемое описывает потенциальное рассеяние, второе — интерференцию между потенциальным и резонансным рассеяниями и третье — резонансное рассеяние.

Сечение рассеяния при резонансном значении энергии принимает свое максимальное значение, равное $4\pi/k^2$. Вдали от резонансного значения энергии рассеяние носит потенциальный характер и совпадает с рассеянием от непроницаемой сферы. Если $kR \ll 1$, то сечение достигает предельного значения:

$$\sigma_e = 4\pi R^2. \quad (3.35)$$

При $E < E_\lambda$ амплитуды потенциального и резонансного рассеяний имеют противоположные знаки, а при $E > E_\lambda$ (если пренебречь величиной $\gamma_e^{(\lambda)}$ по сравнению с $E - E_\lambda$) — одинаковые. Следовательно, при $E < E_\lambda$ интерференция носит разностный характер и приводит к образованию минимума в сечении (рис. 3.4).

Согласно (3.34) энергетическая зависимость резонансного упругого рассеяния описывается дисперсионной формулой, которая имеет максимум при резонансной энергии E_λ и характеризуется шириной $\gamma_e^{(\lambda)}$. Величина $\gamma_e^{(\lambda)} \sim \sqrt{E}$, однако, в пределах ширины резонанса этой

зависимостью от энергии можно пренебречь. Обычно в качестве ширины резонанса используется величина $\Gamma_e^{(\lambda)}$, совпадающая с $\gamma_e^{(\lambda)}(E)$ при $E = E_\lambda$:

$$\Gamma_e^{(\lambda)} \equiv \gamma_e^{(\lambda)}(E_\lambda). \quad (3.36)$$

Величина $\Gamma_e^{(\lambda)}$ определяет ширину уровня распадающегося состояния составного ядра $E_\lambda^C = S + E_\lambda$. Грубую оценку $\gamma_e^{(\lambda)}$ можно получить, воспользовавшись соотношениями (3.31), (3.32) и заметив, что при переходе от одного резонансного значения E_λ к следующему аргумент тангенса в (3.29) изменяется на π . Поэтому $(df_0/dE)_{E_\lambda} \approx -KR\pi/D_\lambda$, где D_λ — расстояние между соседними резонансами, и, таким образом, для ширины $\gamma_e^{(\lambda)}$ получим следующее приближенное выражение:

$$\gamma_e^{(\lambda)} \approx \frac{4k}{K} \frac{D_\lambda}{2\pi}. \quad (3.37)$$

Если $k \ll K$, то ширина резонанса оказывается малой по сравнению с расстоянием между соседними резонансами $\gamma_e^{(\lambda)} \ll D_\lambda$.

Воспользовавшись явными выражениями для волновой функции вне и внутри ядра (3.26) и (3.27), нетрудно установить зависимость отношения амплитуд C и A от логарифмической производной:

$$\left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1 + (f_0/KR)^2}{1 + (f_0/kR)^2}.$$

Используя (3.30), вблизи резонанса найдем

$$\left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{\gamma_e^{(\lambda)2}}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma_e^{(\lambda)2}}. \quad (3.38)$$

Таким образом, частица проникает с заметной вероятностью в ядро только вблизи резонанса в энергетическом интервале шириной $\gamma_e^{(\lambda)}$. Вдали от резонанса частица испытывает почти полное отражение на границе ядра, и волновая функция внутри ядра очень мала. Поэтому приближенно волновую функцию во внешней области можно записать в виде функции

$$u_0(r) \approx A \sin [k(r - R)], \quad r > R, \quad (3.39)$$

которая на поверхности $r = R$ обращается в нуль. Функция (3.39) является решением задачи о рассеянии на непроницаемой сфере радиусом R , когда волновая функция во внутренней области вообще обра-

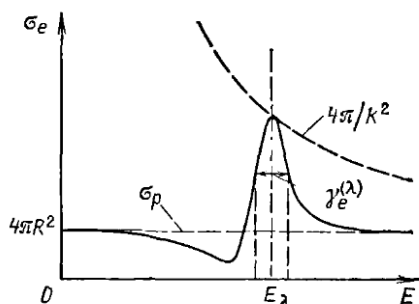


Рис. 3.4. Схематическая зависимость сечения упругого рассеяния от энергии

щается в нуль. Следовательно, вдали от резонанса рассеяние частицы ядром очень хорошо аппроксимируется рассеянием от непроницаемой сферы радиусом R . Резонансное рассеяние обуславливается внутренней областью ядра, а потенциальное рассеяние — поверхностью ядра.

Резонансные реакции ($l = 0$). Обобщим наше рассмотрение на случай, когда поглощение падающей частицы сопровождается ядерными реакциями. Приближенную волновую функцию во внутренней области по-прежнему можно записать в виде (3.23) с $|b| < 1$. Положим

$$b = \exp [2i\Phi(E) - 2q], \quad (3.40)$$

где $\Phi(E)$ и q — вещественные величины. Так как вероятность вылета частицы из ядра не может превышать вероятность проникновения в него, то q должно быть положительным или равным нулю. Используя (3.23) и (3.40), для логарифмической производной внутренней волновой функции при $r = R$ получим

$$f_0(E, q) = -KR \operatorname{tg} [KR + \Phi(E) + iq]. \quad (3.41)$$

В отличие от (3.29) логарифмическая производная (3.41) — комплексная величина, и, следовательно, сечение реакций отлично от нуля.

При комплексных значениях $f_0(E)$ сечения упругого рассеяния и реакций описываются формулами (2.31) и (2.32). Рассмотрим логарифмическую производную (3.41) как функцию энергии E и параметра q . Если q мало по сравнению с единицей, то в сечениях упругого рассеяния и реакций обнаруживаются резонансы. Малость q соответствует малой вероятности распада составного ядра через каналы, отличные от входного. При больших q распад составного ядра через входной канал становится маловероятным, и в этом случае резонансные явления исчезают.

Определим резонансные энергии E_λ из условия обращения логарифмической производной (3.41) в нуль при $q = 0$:

$$f_0(E_\lambda, q = 0) = 0. \quad (3.42)$$

Предполагая, что $q \ll 1$, разложим логарифмическую производную (3.41) в окрестности E_λ в степенной ряд по E и по q и ограничимся линейными членами:

$$f_0(E, q) \approx \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} \right)_{E_\lambda} (E - E_\lambda) - iKRq. \quad (3.43)$$

Под $(\partial f_0 / \partial E)_{E_\lambda}$ подразумевается значение производной по энергии E от логарифмической производной (3.41) при $E = E_\lambda$ и $q = 0$, поэтому, так же как и ранее, эту величину можно выразить через приведенную ширину для входного состояния $\theta_\lambda^2 \equiv \theta_{\alpha\lambda}^2$ (α — индекс входного канала).

Воспользовавшись разложением (3.43), нетрудно найти энергетическую зависимость сечений упругого рассеяния и реакций в резонансной области:

$$\begin{aligned} \sigma_e = & \frac{\pi}{k^2} |\exp [2ikR] - 1|^2 + \\ & + \frac{2\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ (\exp (-2ikR) - 1) \frac{i\gamma_e^{(\lambda)}}{E - E_\lambda + \frac{i}{2} \gamma^{(\lambda)}} \right\} + \\ & + \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e^{(\lambda)^2}}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}}; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e^{(\lambda)} \gamma_r^{(\lambda)}}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}}, \quad (3.45)$$

где $\gamma_e^{(\lambda)} \equiv \gamma_{e\alpha}^{(\lambda)}$ — парциальная ширина уровня λ относительно рассеяния (в канале α); $\gamma_r^{(\lambda)} \equiv \gamma_{r\alpha}^{(\lambda)}$ — ширина уровня λ относительно реакций ($\alpha \rightarrow \beta \neq \alpha$) и $\gamma^{(\lambda)} = \gamma_e^{(\lambda)} + \gamma_r^{(\lambda)} \equiv \gamma_\lambda$ — полная ширина. Величины $\gamma_{e\alpha}^{(\lambda)}$ и $\gamma_{r\alpha}^{(\lambda)}$ определяются равенствами

$$\gamma_{e\alpha}^{(\lambda)} = 2kR\theta_{\alpha\lambda}^2; \quad \gamma_{r\alpha}^{(\lambda)} = 2qKR\theta_{\alpha\lambda}^2. \quad (3.46)$$

Формула для сечения резонансного упругого рассеяния при наличии реакций (3.44) отличается от резонансной части сечения (3.34) наличием в знаменателе полной ширины $\gamma^{(\lambda)}$, в то время как в случае чистого рассеяния в него входит парциальная ширина $\gamma_e^{(\lambda)}$. Сечения (3.44) и (3.45) характеризуются максимумами при резонансной энергии $E = E_\lambda$, ширина резонансов определяется величиной $\gamma^{(\lambda)}$. Существование мнимой части в логарифмической производной приводит к увеличению полной ширины резонанса. Отметим, что при наличии реакций сечение упругого рассеяния в резонансе меньше допустимого максимального значения в $(\gamma_e^{(\lambda)}/\gamma^{(\lambda)})^2$ раз.

Аналогично (3.37) оценка для ширины реакций дает

$$\gamma_r^{(\lambda)} \approx 4qD_\lambda/2\pi. \quad (3.47)$$

Действительно, согласно (3.23), вероятность возвращения во входной канал частицы, проникшей в ядро, равна $|b|^2$. Вероятность возникновения других процессов соответственно равна $1 - |b|^2 \approx 4q$. Домножая эту величину на $D_\lambda/2\pi$, получаем ширину реакций, которая определяет вероятность распада составного ядра по всем открытым каналам, за исключением входного.

Резонансное рассеяние и резонансные реакции (общий случай, $l \neq 0$). Полученные выражения для сечений упругого рассеяния и реакций нетрудно обобщить на случай более высоких моментов количества движения ($l \neq 0$) и частиц, отличных от нейтронов. Сечения

рассеяния и реакций в общем случае выражаются через логарифмическую производную f_l согласно формулам (2.29) и (2.30). Выбирая внутреннюю волновую функцию $u_l(r)$ вблизи граничной поверхности в виде (3.23), получаем для логарифмической производной $f_l(E, q)$ выражение, аналогичное (3.41). Определяя резонансные энергии E_λ из условия обращения логарифмической производной $f_l(E, q)$ в нуль при $q=0$, для парциальных сечений упругого рассеяния и реакций получим формулы

$$\sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left\{ \left| \exp(-2i\zeta_l) - 1 \right|^2 - \frac{\gamma_e^{(\lambda)} [2(E - \tilde{E}_\lambda) \sin 2\zeta_l + \gamma^{(\lambda)} (1 - \cos 2\zeta_l)]}{(E - \tilde{E}_\lambda) + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}} + \frac{\gamma_e^{(\lambda)^2}}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}} \right\}; \quad (3.48)$$

$$\sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\gamma_e^{(\lambda)} \gamma_r^{(\lambda)}}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}}; \quad \tilde{E}_\lambda = E_\lambda + \delta E_\lambda, \quad (3.49)$$

где парциальная ширина рассеяния $\gamma_e^{(\lambda)}$, ширина реакций $\gamma_r^{(\lambda)}$; полная ширина $\gamma^{(\lambda)}$ и сдвиг резонансного уровня δE_λ определяются выражениями

$$\gamma_{e\alpha}^{(\lambda)} = 2s_l(E) \theta_{\alpha\lambda}^2; \quad \gamma_{r\alpha}^{(\lambda)} = 2qKR \theta_{\alpha\lambda}^2; \quad \gamma^{(\lambda)} = \gamma_{e\alpha}^{(\lambda)} + \gamma_{r\alpha}^{(\lambda)}; \quad \delta E_\lambda = -\Delta_l(E) \theta_{\alpha\lambda}^2. \quad (3.50)$$

Первое слагаемое в (3.48) описывает потенциальное рассеяние

$$\sigma_p^{(l)} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \zeta_l, \quad (3.51)$$

второе — интерференцию между потенциальным и резонансным рассеяниями, третье — резонансное упругое рассеяние. Полное сечение $\sigma_i^{(l)}$ описывается суммой выражений (3.48) и (3.49):

$$\sigma_i^{(l)} = \sigma_p^{(l)} - \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\gamma_e^{(\lambda)} [2(E - \tilde{E}_\lambda) \sin 2\zeta_l - \gamma^{(\lambda)} \cos 2\zeta_l]}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}}. \quad (3.52)$$

Введя отклонение энергии от резонансного значения в единицах полной ширины $x \equiv \frac{E - \tilde{E}_\lambda}{\gamma^{(\lambda)}/2}$, перепишем эту формулу в виде

$$\sigma_i^{(l)} = \sigma_p^{(l)} + \sigma_0^{(l)} \frac{\cos 2\zeta_l - x \sin 2\zeta_l}{1 + x^2}, \quad (3.53)$$

где введено обозначение

$$\sigma_0^{(l)} \equiv \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\gamma_e^{(l)}}{\gamma^{(l)}}. \quad (3.54)$$

Сечения (3.48) и (3.49) отличаются от аналогичных сечений для случая нейтронов с $l=0$ смещением резонансных максимумов и зависимостью парциальных ширин от проницаемостей. В общем случае ширина $\gamma_e^{(l)}$ оказывается меньше соответствующей ширины для нейтрона с $l=0$ в $v_l \equiv s_l(E)/kR$ раз. Заметим, что зависимость резонансных ширин от энергии в пределах отдельных резонансов не очень существенна. Только для самых нижних уровней необходимо учитывать энергетическую зависимость парциальной ширины рассеяния, которая при $l=0$ оказывается пропорциональной \sqrt{E} .

В пренебрежении изменением резонансных ширин с энергией для сечения реакций получаем симметричную резонансную линию относительно $E = \tilde{E}_\lambda$. В то же время энергетические зависимости полного сечения и сечения упругого рассеяния отличаются от симметричных в результате интерференции между потенциальным и резонансным рассеянием.

Определим положение минимума и максимума в полном сечении, для этого продифференцируем правую часть (3.53) по отклонению энергии x и приравняем результат нулю:

$$(1 - x^2) \sin 2\xi_l + 2x \cos 2\xi_l = 0.$$

Из этого условия находим

$$x_{\min} = \operatorname{ctg} \xi_l; \quad x_{\max} = -\operatorname{tg} \xi_l, \quad (3.55)$$

и, следовательно, экстремальные значения сечения соответствуют энергиям

$$E_{\min} = \tilde{E}_\lambda + \frac{1}{2} \gamma^{(l)} \operatorname{ctg} \xi_l; \quad E_{\max} = \tilde{E}_\lambda - \frac{1}{2} \gamma^{(l)} \operatorname{tg} \xi_l.$$

Разность между этими значениями энергии пропорциональна ширине резонанса:

$$E_{\min} - E_{\max} = \frac{\gamma^{(l)}}{\sin 2\xi_l}. \quad (3.56)$$

Экстремальные значения сечения при указанных энергиях соответственно равны:

$$\sigma_{i, \min}^{(l)} = \sigma_p^{(l)} - \sigma_0^{(l)} \sin^2 \xi_l; \quad \sigma_{i, \max}^{(l)} = \sigma_p^{(l)} + \sigma_0^{(l)} \cos^2 \xi_l. \quad (3.57)$$

Так как всегда $\gamma_e^{(l)} < \gamma^{(l)}$, то сечение $\sigma_{i, \min}^{(l)}$ всегда больше нуля и только в случае одноканального рассеяния обращается в нуль. Нетрудно убедиться, что $\sigma_{i, \max}^{(l)}$ не превышает унитарный предел $\frac{4\pi}{k^2} (2l+1)$.

Заданием логарифмической производной при $r = R$ полностью определяется сечение упругого рассеяния. Если открыт только канал упругого рассеяния, то логарифмическая производная вещественна.

Вместо логарифмической производной в этом случае можно использовать обратную величину — \mathfrak{R} -функцию. Если же кроме канала упругого рассеяния открыты и другие каналы, то логарифмическая производная комплексна. Мнимая часть логарифмической производной непосредственно определяет сечение реакций, пропорциональное суммарной вероятности переходов из входного канала во все другие открытые каналы. Однако вероятности переходов из входного канала в отдельные открытые каналы нельзя определить с помощью логарифмической производной. Исключение имеет место в случае двух открытых каналов α и β , когда сечение реакции совпадает с сечением перехода из одного канала в другой. Основываясь на принципе детального равновесия, нетрудно убедиться, что ширину реакции для прямого процесса ($\alpha \rightarrow \beta$) можно отождествлять с парциальной шириной рассеяния для обратного процесса ($\beta \rightarrow \alpha$), и наоборот, т. е.

$$\gamma_{r\alpha}^{(\lambda)} = \gamma_{e\beta}^{(\lambda)}; \gamma_{r\beta}^{(\lambda)} = \gamma_{e\alpha}^{(\lambda)}.$$

Если логарифмическая производная комплексна, то обратная величина уже не имеет смысла \mathfrak{R} -функции. В этом случае для описания детальной картины переходов необходимо ввести \mathfrak{R} -матрицу, учитывающую связь между различными открытыми каналами на граничной поверхности. Подобно тому как в одноканальном случае уровни энергии составного ядра сопоставляются с полюсами \mathfrak{R} -функции, в многоканальном случае уровни энергии составного ядра сопоставляются с полюсами \mathfrak{R} -матрицы.

Ограничиваясь рассмотрением энергетического интервала вблизи изолированного уровня \mathfrak{R} -матрицы и используя связь между \mathfrak{R} - и S -матрицами (2.103), для парциального сечения перехода $\alpha \rightarrow \beta$ получаем формулу Брейта—Вигнера

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{(E - \bar{E}_{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)2}}, \quad (3.58)$$

где $\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$ и $\gamma_{\beta}^{(\lambda)}$ — парциальные ширины рассеяния и $\gamma^{(\lambda)}$ — полная ширина уровня λ :

$$\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} = 2s_l (E_{\alpha}) \theta_{\alpha\lambda}^2; \quad \gamma^{(\lambda)} = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{(\lambda)}. \quad (3.59)$$

Сечение реакций σ_r найдем, просуммировав (3.58) по конечным каналам $\beta \neq \alpha$, откуда

$$\gamma_{r\alpha}^{(\lambda)} = \sum_{\beta \neq \alpha} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}. \quad (3.60)$$

Таким образом, величину q , входящую в комплексную логарифмическую производную (3.41), можно выразить через приведенные ширины, характеризующие полюса \mathfrak{R} -матрицы:

$$q = \frac{1}{\theta_{\alpha\lambda}^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{s_l (E_{\beta})}{K_{\alpha} R} \theta_{\beta\lambda}^2. \quad (3.61)$$

Суммируя выражение (3.58) по всем каналам β (включая и входной канал $\beta = \alpha$), получаем формулу, определяющую сечение образования составного ядра через входной канал α в состоянии с энергией E_λ :

$$\sigma_C^{(l)}(\alpha) = \frac{\pi}{k_\alpha^2} (2l+1) \frac{\gamma_\alpha^{(\lambda)} \gamma^{(\lambda)}}{(E - \bar{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)2}}. \quad (3.62)$$

Эта формула, так же как и (3.48), (3.49) и (3.58), применима вблизи резонансного значения энергии \bar{E}_λ в энергетической области, протяженность которой мала по сравнению с расстоянием между соседними резонансами. Отметим, что указанные формулы описывают резонансные явления только в случае, если ширина резонанса значительно меньше расстояния между уровнями.

Воспользовавшись определением сечения образования составного ядра (3.62), формулу для сечения перехода $\alpha \rightarrow \beta$ можно переписать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(l)} = \sigma_C^{(l)}(\alpha) G_C(\beta), \quad (3.63)$$

где $G_C(\beta) \equiv \gamma_\beta^{(\lambda)}/\gamma^{(\lambda)}$ — относительная вероятность распада составного ядра в состоянии с энергией E_λ через канал β . Формула (3.63) подтверждает справедливость допущения Бора для резонансных ядерных реакций.

Учет спинов. До сих пор мы пренебрегали наличием спинов у падающей частицы и ядра мишени. Выясним теперь, как изменяются формулы для резонансных сечений в результате учета спинов.

Обозначим спин падающей частицы через s и спин исходного ядра через i и предположим сначала, что орбитальный момент равен нулю: $l = 0$ (это справедливо при малых энергиях, так как частица с большим значением орбитального момента не может приблизиться настолько, чтобы вызвать реакцию). Суммарный спиновый момент системы (или спин канала) S определяется векторной суммой s и i .

Если падающие частицы и ядра мишени неполяризованы, то относительная вероятность заданного значения спина канала S определяется статистическим весом:

$$g(S) = \frac{2S+1}{(2s+1)(2i+1)}, \quad |i-s| \leq S \leq i+s. \quad (3.64)$$

Обозначим полный момент количества движения (спин) составного ядра через j . Уровни составного ядра, отвечающие различным j , характеризуются (если исключить случайное вырождение) различными значениями энергии. Так как в случае нулевого орбитального момента ($l = 0$) полный момент количества движения составного ядра j совпадает со спином канала S , то сечение резонансного перехода $\alpha \rightarrow \beta$ с учетом спинов получим, домножив выражение в правой части (3.58) при $l = 0$ на относительную вероятность значения спина канала S ,

совпадающего с значением спина резонансного уровня составного ядра j :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \frac{2j+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\gamma_\alpha^{(\lambda)} \gamma_\beta^{(\lambda)}}{(E-E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}}, \quad (3.65)$$

$$l = 0, \quad |i - s| \leq j \leq i + s.$$

В случае, когда спин падающей частицы $s = 1/2$, выражение для статистического множителя (3.64) представляется в виде

$$g(S) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1} \right), \quad S = i \pm 1, 2. \quad (3.66)$$

Очевидно, если резонанс соответствует каналу со спином $S = i + 1/2$, то другой канал $S = i - 1/2$ уже не соответствует резонансу. Следовательно, для нейтронов с $l = 0$ возможны два типа резонансов: одни имеют место в канале $S = i + 1/2$, другие — в канале $S = i - 1/2$.

В общем случае, когда орбитальный момент относительного движения отличен от нуля ($l \neq 0$), полный момент количества движения составного ядра j является векторной суммой спина канала S и орбитального момента l . Очевидно, составное ядро в состоянии с определенным значением полного момента j при заданном значении спина входного канала S может образоваться только в том случае, если значение орбитального момента l заключено в интервале $|j - S| \leq l \leq j + S$. Обозначим спин выходного канала S' . Так как при рассеянии или реакции сохраняется полный момент количества движения, то распад составного ядра возможен в одно из состояний с орбитальным моментом l' , значение которого заключено в интервале $|j - S'| \leq l' \leq j + S'$.

Кроме сохранения полного момента в процессе рассеяния или реакции должна сохраняться также четность. Обозначим четность входного канала Π_α , четность выходного канала Π_β и четность составного ядра Π_λ . Учитывая четность, связанную с относительным движением, $(-1)^l$ или $(-1)^{l'}$, запишем закон сохранения четности:

$$(-1)^l \Pi_\alpha = \Pi_\lambda = (-1)^{l'} \Pi_\beta. \quad (3.67)$$

Воспользовавшись формулой (3.58), сечение для резонансного ядерного перехода $\alpha \rightarrow \beta$ с участием неполяризованных частиц представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha S; \beta S'} = & \frac{\pi}{k_\alpha^2} g(j) \sum_{l=|j-S|}^{j+S} \sum_{l'=|j-S'|}^{j+S'} \omega_l(\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \times \\ & \times \omega_{l'}(\Pi_\beta \Pi_\lambda) \frac{\gamma_{\alpha l}^{(\lambda)} \gamma_{\beta l'}^{(\lambda)}}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Величины $\gamma_{\alpha l}^{(\lambda)}$ и $\gamma_{\beta l'}^{(\lambda)}$ являются парциальными ширинами, отвечающими распаду составного ядра по каналу αS или $\beta S'$ с орбитальными моментами l или l' ; $\gamma^{(\lambda)}$ представляет собой полную ширину уровня E_λ , которому соответствует значение спина j . Статистический множитель, стоящий перед знаком суммы в (3.68), возникает в результате умножения статистического веса спина входного канала $g(S)$ на относительную вероятность того, что спин канала S и орбитальный момент l в сумме приводят к полному моменту j [эта вероятность равна $\frac{2j+1}{(2S+1)(2l+1)}$]. Проектирующие множители ω_l и $\omega_{l'}$, под знаком суммы обеспечивают выполнение закона сохранения четности

$$\omega_l(\Pi) \equiv \frac{1}{2} \{1 + (-1)^l \Pi\}. \quad (3.69)$$

Если четности входного и выходного каналов одинаковы ($\Pi_\alpha = \Pi_\beta$), то вылетающие частицы будут иметь моменты количества движения l' такой же четности, как и моменты количества движения частиц l ; если же $\Pi_\alpha = -\Pi_\beta$, то конечные l' будут нечетными, если четными были исходные l , и наоборот.

Отметим, что наименьшее значение $l = |j - S|$, если это значение разрешено по четности, т. е. если $(-1)^{j-S} = \Pi_\alpha \Pi_\beta$. В случае запрета по четности наименьшее значение $l = |j - S| + 1$ при условии, что ни S , ни j не равны нулю (в противном случае сечение в рассматриваемом канале обращается в нуль).

Обычно экспериментальные условия таковы, что не удается различить каналы, отличающиеся только своими спинами. Усредненное сечение реакции $\alpha \rightarrow \beta$ получим, просуммировав выражение (3.68) по всем возможным значениям спинов входных и выходных каналов:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{S=|i-s|}^{i+s} \sum_{S'=|i'-s'|}^{i'+s'} \sigma_{\alpha S; \beta S'} \quad (3.70)$$

(s' и i' — спины вылетающей частицы и остаточного ядра). В (3.70) учитываются все возможные переходы $\alpha \rightarrow \beta$, совместимые с законами сохранения момента количества движения и четности.

Формулами (3.68) и (3.70) описывается также полное (проинтегрированное по всем углам и просуммированное и усредненное по всем ориентациям спинов) сечение упругого рассеяния в резонансной области. Следует, однако, иметь в виду, что кроме резонансного рассеяния могут иметь место потенциальное рассеяние, а также интерференция между потенциальным и резонансным рассеянием.

Если при рассеянии существенное единственное значение спина канала S и наименьшее значение орбитального момента l , то для сечения рассеяния σ_e существует максимальный предел:

$$\sigma_e \leq \frac{2j+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{4\pi}{k^2}. \quad (3.71)$$

В частности, для резонансов с заданным j , отвечающих нейтронам в s -состоянии ($l = 0$), вклад вносит только одно значение спина $S = j$. Максимум в резонансе сечения рассеяния достигается только при ус-

ловии, что другие процессы запрещены. Определение максимального значения сечения в случае резонансов, отвечающих нейтронам в s -состоянии, позволяет найти момент количества движения j резонансного уровня составного ядра.

Задачи

1. Получить выражение для интегрального сечения упругого рассеяния (просуммированного и усредненного по всем ориентациям спинов) в окрестности изолированного резонанса.

Просуммированное и усредненное по всем ориентациям спинов интегральное сечение упругого рассеяния выражается через матрицу столкновений с помощью соотношения (1.137). В соответствии с (2.106) для матрицы столкновений в окрестности изолированного резонанса можно воспользоваться следующим приближенным выражением (одноуровневое приближение):

$$S_{\gamma' l' s' \gamma l s}^j = \exp(i\tilde{\epsilon}_{\gamma' l'}) \left\{ \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} - i \frac{V_{\gamma l s}^{(\lambda)} \gamma_{\gamma' l' s'}^{(\lambda)}}{E - \tilde{E}_\lambda + \frac{i}{2} \gamma^{(\lambda)}} \right\} \times \exp(i\tilde{\epsilon}_{\gamma l}), \quad (3.72)$$

где \tilde{E}_λ — резонансный уровень (с учетом сдвига), характеризуемый определенными значениями полного момента $j = j^{(\lambda)}$ и четности Π_λ . Если $j \neq j^{(\lambda)}$, то в (3.72) следует учитывать только первое слагаемое. Подставляя это выражение в (1.137) и учитывая сохранение четности, получаем следующую формулу для сечения упругого рассеяния в окрестности резонанса с полным моментом j и четностью Π_λ , который возникает в каналах для частиц и ядер со спинами s и i и четностью Π_α :

$$\begin{aligned} \sigma_e = & \frac{\pi}{k^2} g(l) \left\{ \sum_{l, S} \omega_l (\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \left| \exp(-2i\tilde{\epsilon}_l) - 1 + \frac{i\gamma_{lS}^{(\lambda)}}{E - \tilde{E}_\lambda + \frac{i}{2} \gamma^{(\lambda)}} \right|^2 + \right. \\ & + \sum_{l \neq l', S} \omega_l (\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \omega_{l'} (\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \frac{\gamma_{lS}^{(\lambda)} \gamma_{l'S}^{(\lambda)}}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}} + \\ & \left. + \sum_{l, l', S \neq S'} \omega_l (\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \omega_{l'} (\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \frac{\gamma_{lS}^{(\lambda)} \gamma_{l'S'}^{(\lambda)}}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}} \right\} + \\ & + \frac{\pi}{k^2} \sum_{l'} (2l+1) |\exp(-2i\tilde{\epsilon}_l) - 1|^2, \quad (3.73) \end{aligned}$$

где суммирование по каналовым спином проводится в пределах от $|i - s|$ до $i + s$ и по орбитальным моментам (за исключением последнего слагаемого) в пределах от $|j - S|$ до $j + S$. Первая сумма в фигурных скобках (3.73) описывает резонансное рассеяние, не сопровождающееся изменением орбитального момента и каналового спина (в ней учтена также интерференция между резонансным и потенциальным рассеяниями). Вторая сумма описывает резонансное рассеяние с изменением l , но без изменения спина канала S (обычно вклад такого рассеяния очень мал). Третья сумма в фигурных скобках (3.73) описывает резонансное рас-

сеяние, сопровождающееся изменением спина канала S . Вклад такого рассеяния существует в случае запрещенных по четности резонансов ($\Pi_\alpha \Pi_\lambda = (-1)^{j-l+1/2}$) при рассеянии медленных частиц. Последнее слагаемое в (3.73) представляет собой сечение потенциального рассеяния, которое проявляется даже при отсутствии резонанса E_λ . Суммирование в последнем слагаемом в (3.73) проводится по всем l , за исключением тех, которые учитываются в первой сумме, стоящей в фигурных скобках. Заметим, что формула (3.73) практически применима только к упругому рассеянию нейтронов, так как в случае заряженных частиц необходимо учитывать резерфордское рассеяние (в результате такого учета полное сечение рассеяния оказывается бесконечно большим).

2. Используя для матрицы столкновений в окрестности изолированного резонанса выражение (3.72), получить для интегрального сечения реакции $\alpha \rightarrow \beta$ (просуммированного и усредненного по ориентации спинов) следующую формулу:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k^2} g(l) \sum_{\Pi, \Pi'} \omega_l (\Pi_\alpha \Pi_\lambda) \omega_{l'} (\Pi_\beta \Pi_\lambda) \frac{\gamma_{\alpha l}^{(\lambda)} \gamma_{\beta l'}^{(\lambda)}}{(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2}} \quad (3.74)$$

[см. (3.68) и (3.70)].

3. Найти угловую зависимость дифференциального сечения реакции $\alpha \rightarrow \beta$ вблизи резонанса.

Пусть резонансное значение энергии, отвечающее определенному полному моменту j и определенной четности, равно \tilde{E}_λ . В одноуровневом приближении матрицу столкновений можно выбрать в виде (3.72). Дифференциальное сечение реакции $\alpha \rightarrow \beta$ описывается согласно (1.133) и (1.134) общей формулой:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) = \frac{1}{(2s+1)(2i+1)} \sum_{SS'} \sum_L \frac{1}{k^2} B^{(L)}(\alpha, S, \beta S') P_L(\cos \vartheta), \quad (3.75)$$

при этом коэффициенты $B^{(L)}(\alpha S, \beta S')$ определяются выражением

$$\begin{aligned} B^{(L)}(\alpha S, \beta S') &= \frac{(-1)^{S-S'}}{4} \left[(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2} \right]^{-1} (2j+1)^2 \times \\ &\times \sum_{l_1 l_2 l'_1 l'_2} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l'_1+1)(2l'_2+1)} \times \\ &\times (l_1 0 l_2 0 | L 0) (l'_1 0 l'_2 0 | L 0) W(l_1 j l_2 j, SL) W(l'_1 j l'_2 j; S' L) \times \\ &\times \sqrt{\gamma_{\alpha l_1}^{(\lambda)} \gamma_{\alpha l_2}^{(\lambda)} \gamma_{\beta l'_1}^{(\lambda)} \gamma_{\beta l'_2}^{(\lambda)}} \cos(\xi_{\alpha l_1}^j - \xi_{\alpha l_2}^j + \xi_{\beta l'_1}^j - \xi_{\beta l'_2}^j), \quad (3.76) \end{aligned}$$

где суммирование проводится по всевозможным значениям моментов, соответствующих заданным значениям j и Π_λ . Если четность канала α совпадает с четностью составного ядра $\Pi_\alpha = \Pi_\lambda$, то числа l_1 и l_2 должны быть четными [в случае противоположной четности ($\Pi_\alpha = -\Pi_\lambda$), числа l_1 и l_2 — нечетные]. Поэтому сумма по l в (3.75) содержит только четные полиномы Лежандра [число слагаемых в (3.75) ограничено условием $l \leq 2j$], и, следовательно, угловое распределение продуктов реакции симметрично относительно угла $\vartheta = \pi/2$. Если наблюдаемое угловое распределение несимметрично (т. е. необходим учет вклада нечетных l), то одноуровневое приближение неприменимо. Проинтегрировав (3.75) по углам, получим для интегрального сечения реакции формулу (3.77).

4. Получить формулу для дифференциального сечения упругого рассеяния в окрестности резонанса.

Используя общие формулы (1.133)—(1.135), в одноуровневом приближении для дифференциального сечения упругого рассеяния (просуммированного и усредненного по всем ориентациям спинов частиц) получаем

$$\sigma_e(\vartheta) = \frac{1}{(2s+1)(2i+1)} \sum_{SS'} \sum_L \frac{1}{k^2} \{ B^{(L)}(SS') + \delta_{SS'} [B_p^{(L)} + B_f^{(L)}] \} P_L(\cos \vartheta), \quad (3.77)$$

где коэффициент $B_p^{(L)}$ описывает потенциальное рассеяние, а коэффициент $B_f^{(L)}$ — интерференцию между резонансным и потенциальным рассеянием:

$$B_p^{(L)} = \sum_{l_1 l_2 l_1 l_2} (2l_1+1)(2l_2+1)(2j_1+1)(2j_2+1)(l_1 0 l_2 0 | L 0)^2 \times \\ \times W^2(l_1 j_1 l_2 j_2; SL) \sin \zeta_{l_1}^{j_1} \sin \zeta_{l_2}^{j_2} \cos(\zeta_{l_1}^{j_1} - \zeta_{l_2}^{j_2}); \quad (3.78)$$

$$B_f^{(L)} = - \left[(E - \tilde{E}_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)^2} \right]^{-1} \sum_{l_1 l_2 j_1} (2l_1+1)(2l_2+1) \times \\ \times (2j_1+1)(2j_2+1)(l_1 0 l_2 0 | L 0)^2 W^2(l_1 j_1 l_2 j_2; SL) \gamma_{l_2}^{(\lambda)} \times \\ \times \sin \zeta_{l_1}^{j_1} \left\{ (E - \tilde{E}_\lambda) \sin(2\zeta_{l_2}^{j_2} - \zeta_{l_1}^{j_1}) + \frac{1}{2} \gamma^{(\lambda)} \cos(2\zeta_{l_2}^{j_2} - \zeta_{l_1}^{j_1}) \right\}. \quad (3.79)$$

При отсутствии кулоновского взаимодействия интегрирование (3.77) по углам приводит к формуле (3.73).

§ 3.3. Резонансное взаимодействие нейтронов с ядрами

Ядерные реакции под действием нейтронов. В качестве примера ядерных реакций, в которых обнаруживается резонансная зависимость сечений от энергии, рассмотрим *реакции под действием медленных нейтронов*. (Другим примером резонансных реакций являются ядерные реакции под действием заряженных частиц на легких ядрах.) Важнейшей особенностью реакций под действием нейтронов является то, что для них непосредственно изменяется полное сечение σ_t (представляющее собой сумму сечения упругого рассеяния и сечения реакций) по ослаблению пучка, проходящего через образец мишени заданной толщины. Измерения других сечений требуют определения выхода реакций, а также интенсивности падающего пучка.

Ядерные реакции на легких ядрах ($A < 25$) характеризуются индивидуальными особенностями, поэтому ограничимся рассмотрением ядерных реакций под действием нейтронов на ядрах со средними массовыми числами ($25 < A < 80$) и на тяжелых ядрах ($80 < A < 240$). В области малых энергий падающих нейтронов ($E < 1$ МэВ) наиболее существенными процессами для средних ядер являются упругое рассеяние и *радиационный захват*. Другие процессы либо запрещены энергетически, либо характеризуются малой вероятностью. Неупругое рассеяние невозможно, если энергия падающего нейтрона меньше энергии возбуждения ядра (для ядер со средними массовыми числами энергия возбуждения, как правило, превосходит несколько десятых мегаэлектрон-вольт). Реакции (n, p) и (n, α) маловероятны из-за

Наличие кулоновского барьера, который препятствует испусканию заряженных частиц с малой энергией. Так как ширина резонанса резко уменьшается с увеличением орбитального момента нейтрона l , то на опыте обычно наблюдаются только резонансы с $l = 0$ и $l = 1$.

Согласно (3.65) сечение резонансного упругого рассеяния и сечение радиационного захвата при $l = 0$ и $j = i \pm 1/2$ описываются формулами

$$\sigma_e \equiv \sigma_{nn} = \frac{\pi}{2k^2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \frac{\gamma_n^2}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}, \quad (3.80)$$

$$\sigma_\gamma \equiv \sigma_{n\gamma} = \frac{\pi}{2k^2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \frac{\gamma_n \gamma_\gamma}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}, \quad (3.81)$$

где γ — полная ширина резонанса:

$$\gamma = \gamma_n + \gamma_\gamma; \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{E}{E_\lambda}} \Gamma_n; \quad \gamma_\gamma = \Gamma_\gamma. \quad (3.82)$$

Для нейтронов малых энергий и ядер со средними массовыми числами наблюдаемые на опыте *радиационные ширины* оказываются значительно меньше *нейтронных ширин* ($\gamma_\gamma \ll \gamma_n$), поэтому соответствующие резонансы являются резонансами рассеяния.

На рис. 3.5 приведены полное сечение и сечение радиационного захвата для нейтронов на ядрах алюминия. Отметим, что резонансы наблюдаются при одних и тех же энергиях. Экспериментальное значение сечения захвата примерно на три порядка меньше полного сечения. Следовательно, полное сечение практически равно сечению упругого рассеяния. Согласно (3.80) и (3.81) отношение сечения радиационного захвата к сечению упругого рассеяния в резонансе равно отношению соответствующих ширин:

$$\sigma_{n\gamma}/\sigma_{nn} = \Gamma_\gamma/\Gamma_n, \quad E = E_\lambda \quad (3.83)$$

[Напомним, что сечение радиационного захвата при очень малых энергиях ($E \rightarrow 0$) принимает большое значение $\sim E^{-1/2}$ в противоположность сечению упругого рассеяния, принимающему конечное значение]. Так как нейтронные ширины для алюминия согласно экспериментальным данным (рис. 3.5) составляют примерно 5—20 кэВ, для соответствующих радиационных ширин Γ_γ получаем от 3 до 30 эВ. Оценки подобного рода для других ядер со средними массовыми числами приводят к $\Gamma_\gamma \approx 1 \div 30$ эВ. Хотя для отдельных ядер имеет место значительный разброс в значениях нейтронных ширин, тем не менее для всех наблюдаемых резонансов нейтронные ширины оказываются больше радиационных.

В случае взаимодействия нейтронов малых энергий с тяжелыми ядрами также наиболее существенны упругое рассеяние и радиационный захват, хотя для некоторых тяжелых ядер, находящихся в конце периодической системы, возможно и деление. Для тяжелых ядер

Влияние кулоновского барьера, препятствующего вылету заряженных частиц с малыми энергиями, еще более сильное, чем для ядер со средними массовыми числами. Так как при этом $kR \ll 1$, то в основном наблюдаются только резонансы с $l=0$. Характерной особенностью резонансов на тяжелых ядрах является их большая плотность по сравнению со случаем средних ядер. Для большинства тяжелых ядер расстояние между соседними резонансами лежит в интервале от нескольких до со-

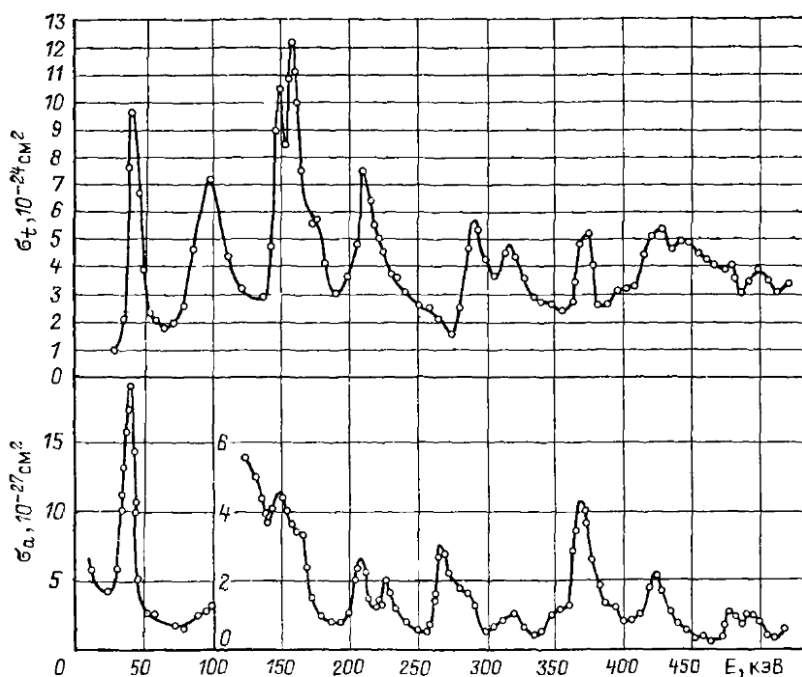


Рис. 3.5. Полное сечение и сечение радиационного захвата для нейтронов на ядрах Al [54]

тен электрон-вольт (за небольшим исключением магических ядер, для которых это расстояние значительно больше), а сами резонансы лежат в области энергий $E < 10^3$ эВ. Малые расстояния между соседними резонансами свидетельствуют о малых значениях нейтронных ширин [это непосредственно следует из (3.37); например, в случае резонанса при энергии 10 эВ и $D \approx 30$ эВ ширина Γ_n оказывается порядка 10^{-2} эВ, что согласуется с экспериментальным значением]. Поэтому полная ширина резонансов на тяжелых ядрах в области очень малых энергий нейтронов совпадает с радиационной шириной (за исключением небольшого числа ядер, способных к делению). Согласно экспериментальным данным для тяжелых ядер $\Gamma_\gamma \approx 0,1$ эВ. Таким образом, в противоположность ядрам со средними массовыми числами у тяжелых ядер нейтронные ширины при очень малых энергиях падают

щих нейтронов ($E < 10^8$ эВ) малы по сравнению с радиационной шириной и, следовательно, резонансный захват преобладает над резонансным рассеянием.

Полное сечение вблизи резонанса совпадает с сечением радиационного захвата. Вдали от резонанса полное сечение становится приблизительно равным сечению потенциального рассеяния, за исключением энергий $E \rightarrow 0$, при которых оно совпадает с сечением радиационного захвата. (Из-за наличия множителя $1/\sqrt{E}$ сечение захвата при очень малых энергиях оказывается значительно больше сечения рассеяния. Сечение захвата тепловых нейтронов для большинства тяжелых ядер превышает $5 \cdot 10^{-21}$ см².) Резонансная зависимость полного сечения от энергии непосредственно измеряется по ослаблению моноэнергетического пучка нейтронов, проходящего через вещество мишени. Моноэнергетические нейтроны обычно получают с помощью пульсирующего источника и сепарирования по времени пролета. Моноэнергетические пучки очень медленных нейтронов $E < 10$ эВ получают с помощью когерентного брэгговского рассеяния на плоскостях кристалла. Сравнительная экспериментальные зависимости с теоретической формулой (3.81), можно определить E_λ , Γ_n и Γ_γ .

С увеличением энергии падающих нейтронов характер резонансного взаимодействия изменяется. Действительно, с увеличением энергии нейтронная ширина γ_n увеличивается пропорционально \sqrt{E} , в то время как радиационная ширина γ_γ практически не зависит от энергии ($\gamma_\gamma = \Gamma_\gamma$). Так, для большинства тяжелых ядер нейтронные ширины оказываются больше радиационных уже при энергиях нейтронов $E > 0,1$ МэВ, поэтому характер нейтронных реакций на тяжелых ядрах при $E > 0,1$ МэВ аналогичен характеру реакций для ядер со средними массовыми числами.

Если энергии падающих нейтронов достигают значения около 1 МэВ и выше, то начинаются новые процессы: неупругое рассеяние и реакции с испусканием заряженных частиц. При таких энергиях нейтронные ширины по отношению к неупругому рассеянию γ_n' оказываются сравнимыми или больше нейтронных ширин γ_n .

Так как расстояние между уровнями у тяжелых ядер оказывается гораздо меньше, чем у ядер со средними массовыми числами, то разрешить резонансы при помощи имеющихся нейтронных пучков обычно не удастся. Кроме того, доплеровская ширина в рассматриваемой области становится в некоторых случаях сравнимой с расстоянием между уровнями. Поэтому фактически измеряемые сечения необходимо сопоставлять с сечениями, усредненными по энергетическому интервалу ΔE , большому по сравнению с расстоянием между уровнями.

Статистическое распределение резонансных параметров. Экспериментальное изучение резонансов, наблюдающихся при взаимодействии нейтронов малой энергии с ядрами, привело к накоплению значительной информации о параметрах резонансов¹. Для некоторых ядер установлено по несколько сот хорошо разрешенных уровней. Среднее

¹ Методы определения параметров нейтронных резонансов детально рассмотрены в [55].

расстояние между ними для тяжелых ядер составляет несколько электрон-вольт. Такая большая плотность уровней свидетельствует о возбуждении большого числа степеней свободы ядер. Наблюдаемые нейтронные ширины резонансов сильно изменяются от уровня к уровню. Так, для ядра ^{238}U нейтронные ширины соседних резонансов могут различаться по величине на два или даже три порядка. [Среднее значение нейтронных ширин примерно равно $\gamma_n \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \sqrt{E}$, где ширина и энергия выражены в электрон-вольтах.] Такие *флуктуации нейтронных ширин* обусловлены сложной природой возбужденных состояний составного ядра, поскольку характер возбуждения для соседних уровней может быть совершенно различным. Наличие большого числа экспериментальных данных по параметрам нейтронных резонансов позволяет провести статистическую систематизацию их. Очевидно, из статистических распределений параметров можно извлечь сведения о структуре резонансных состояний.

Количественное описание случайного распределения приведенных ширин для резонансов было предложено Портером и Томасом [56]. Отождествив высоковозбужденные состояния составного ядра с квазистационарными состояниями $\Phi^{(\lambda)}$, амплитуды приведенных ширин $\theta_{\alpha\lambda}$ можно рассматривать как случайные величины. Действительно, так как $\Phi^{(\lambda)}$ представляют собой очень сложные суперпозиции более простых конфигураций, то величина и знак $\Phi_{\lambda\alpha}(R)$ оказываются случайными, поскольку они определяются случайными значениями других приближенно-независимых величин (например, коэффициентами в разложениях по более простым конфигурациям и т. п.). Наличие экспериментального разброса по энергиям также приводит к неопределенности в значениях $\Phi_{\lambda\alpha}(R)$.

Согласно законам математической статистики случайная величина, зависящая от большого числа независимых переменных, характеризуется нормальным (гауссовым) распределением с максимумом около нуля. Поэтому амплитуда приведенной ширины $\theta \equiv \theta_{\alpha\lambda}$, отвечающая распаду составного ядра, находящегося в определенном состоянии λ , по каналу α , удовлетворяет распределению

$$P(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \theta^2 \rangle} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle}\right) d\theta, \quad (3.84)$$

где $\langle \theta^2 \rangle$ — среднее значение θ^2 по рассматриваемой области изменения энергии. Парциальная ширина резонанса $\gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$, пропорциональная $\theta_{\alpha\lambda}^2$, удовлетворяет так называемому χ^2 -распределению. Введем относительное значение парциальной ширины уровня

$$x \equiv \gamma_{\alpha}^{(\lambda)} / \langle \gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \rangle = \theta^2 / \langle \theta^2 \rangle. \quad (3.85)$$

Согласно (3.84) число уровней составного ядра, соответствующих определенным значениям парциальных ширин, заключенным в интервале dx , определяется выражением

$$P(x) dx = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{1}{2} x\right) dx, \quad x \equiv \frac{\gamma}{\langle \gamma \rangle}. \quad (3.86)$$

В частности, распределение нейтронных ширин описывается этой формулой. Обычно (3.86) называют *распределением Портера и Томаса* для одного канала. Экспериментальные распределения нейтронных ширин для разрешенных резонансов хорошо согласуются с этой формулой (рис. 3.6).

При нахождении распределения для полных ширин резонансов необходимо учитывать возможность распада составного ядра по нескольким независимым каналам, для каждого из которых соответствующая

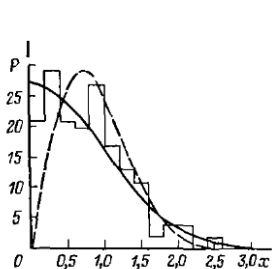


Рис. 3.6. Распределение нейтронных ширин для резонансов $n + {}^{232}\text{Th}$ ($\Delta x = 0,2$)

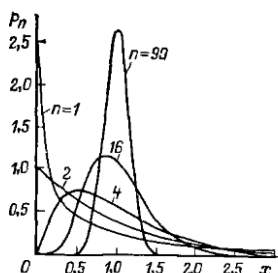


Рис. 3.7. Распределение полных ширин в случае n открытых каналов

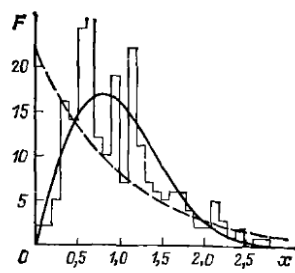


Рис. 3.8. Экспериментальная гистограмма распределения расстояний между уровнями для ядра ${}^{238}\text{U}$ и распределение Вигнера

парциальная ширина подчиняется распределению (3.86). Пусть $\gamma^{(\lambda)} = \sum_{\alpha=1}^n \gamma_{\alpha}^{(\lambda)}$, где n — число открытых каналов распада. Обычно рассматриваются флуктуации отношения ширин отдельных резонансов $\gamma^{(\lambda)}$ к средней по всем уровням ширине $\langle \gamma \rangle$:

$$x = \gamma^{(\lambda)} / \langle \gamma \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \beta_{\alpha} y_{\alpha}, \quad y_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^{(\lambda)} / \langle \gamma_{\alpha} \rangle, \quad (3.87)$$

где $\beta_{\alpha} = \langle \gamma_{\alpha} \rangle / \langle \gamma \rangle$ — относительный вклад α -канала в среднюю ширину и $\sum_{\alpha=1}^n \beta_{\alpha} = 1$. Если случайные величины y_{α} удовлетворяют распределению (3.86) и веса β_{α} одинаковы ($\beta_{\alpha} = 1/n$), то сумма x удовлетворяет так называемому χ_n^2 -распределению:

$$P_n(x) dx = \frac{n}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2} nx\right)^{\frac{1}{2} n - 1} \exp\left(-\frac{1}{2} nx\right) dx. \quad (3.88)$$

При малых n наиболее вероятны значения $\gamma^{(\lambda)}$, малые по сравнению со средним $\langle \gamma \rangle$, а при больших n наиболее вероятны значения $\gamma^{(\lambda)}$, близкие к среднему значению. На рис. 3.7 представлены распределения $P_n(x)$ для различных n [распределения $P_n(x)$ нормированы на единицу]. Согласно (3.88) среднеквадратичное отклонение x равно $2/n$.

Следовательно, при большом числе открытых каналов флуктуации полных ширин от уровня к уровню становятся незначительными.

Удовлетворительное описание распределения нейтронных ширин на основе (3.86) объясняется тем, что ширины резонансов в соответствующей области энергий обусловлены распадом составного ядра только через входной канал. В отличие от нейтронных ширин γ_n радиационные ширины γ_γ связаны с большим числом разнообразных γ -переходов, поэтому радиационные ширины γ_γ удовлетворяют распределению, сходному с распределением $P_n(x)$ для больших n . Следовательно, радиационные ширины не должны сильно изменяться при переходе от одного резонанса к другому, что и подтверждается на эксперименте.

Зависимость волновых функций квазистационарных состояний $\Phi(\lambda)$ от большого числа переменных приводит к тому, что сами резонансные энергии E_λ характеризуются случайным распределением. Задача сводится к нахождению собственных значений матрицы, элементы которой являются независимыми случайными величинами. Таким путем Вигнер [57] получил следующую формулу для распределения расстояний между уровнями составного ядра:

$$F(x) dx \approx \frac{\pi}{2} x \exp\left(-\frac{\pi}{4} x^2\right) dx, \quad (3.89)$$

где $x = (E_\lambda - E_{\lambda'}) / \langle D \rangle$ — отношение расстояния между средними уровнями к среднему расстоянию между ними во всем рассматриваемом интервале энергий. Распределение (3.89) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными и, в частности, описывает наблюдаемый эффект отталкивания уровней. На рис. 3.8 представлены экспериментальная гистограмма распределения расстояний между уровнями для ядра ^{238}U и распределение Вигнера.

§ 3.4. Средние сечения и флуктуации сечений

Усреднение сечений. Экспериментальное измерение сечений или каких-либо величин, характеризующих взаимодействие нейтронов и других частиц с ядрами, проводится обычно в условиях конечного энергетического разрешения, которое определяется конкретными условиями эксперимента (например, шириной энергетического разброса падающего пучка, температурой мишени, чувствительностью регистрирующей аппаратуры и т. п.). Поэтому экспериментальные данные необходимо сопоставлять со средними значениями, например с сечениями, усредненными по энергетическому интервалу, значение которого непосредственно связано с шириной энергетического разрешения. Если интервал усреднения включает большое число уровней составного ядра, то в результате усреднения резонансная структура сглаживается и *средние сечения* характеризуются плавной зависимостью от энергии.

Условимся под средним сечением какого-либо процесса $\bar{\sigma}(E)$ подразумевать величину

$$\bar{\sigma}(E) = \int dE' F(E, E') \sigma(E'), \quad (3.90)$$

где $\sigma(E)$ — истинное сечение; $F(E, E')$ — некоторая весовая функция, нормированная на единицу (называемая обычно функцией разрешения прибора). В простейшем случае равномерного распределения по интервалу усреднения имеем

$$F(E, E') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta E}, & E - \frac{\Delta E}{2} < E' < E + \frac{\Delta E}{2}; \\ 0, & E' < E - \frac{\Delta E}{2}; E' > E + \frac{\Delta E}{2}. \end{cases} \quad (3.91)$$

где ΔE — интервал усреднения. При этом усредненное сечение описывается формулой

$$\bar{\sigma}(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E - \frac{\Delta E}{2}}^{E + \frac{\Delta E}{2}} dE' \sigma(E'). \quad (3.92)$$

Иногда в качестве весовой функции удобно использовать функцию распределения Лоренца

$$F(E, E') = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{(E - E') + I^2/4}, \quad (3.93)$$

где I — эффективная ширина распределения. Обычно интервал усреднения ΔE (или I) выбирается достаточно большим по сравнению со средним расстоянием между соседними резонансами, в то же время величина интервала усреднения ограничивается требованием, чтобы в нем можно было пренебречь энергетическим изменением резонансных параметров. Для ядер со средними массовыми числами указанным требованиям соответствует интервал усреднения порядка 100 кэВ, для тяжелых ядер — около 100 эВ. При таком выборе интервала усреднения средние сечения зависят лишь от усредненных характеристик составного ядра, причем форма весовой функции оказывается несущественной для результатов усреднения.

Остановимся детальнее на схеме усреднения сечений в области изолированных резонансов. Представим сечение какой-либо реакции $\alpha \rightarrow \beta$ в виде суммы отдельных брейт-вигнеровских слагаемых

$$\sigma_{\alpha\beta}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{j\pi} g(j) \sum_{\lambda(j\pi)} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{(E - E_{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)2}} \quad (3.94)$$

и воспользуемся определением среднего согласно (3.92). При выполнении интегрирования медленно изменяющийся множитель $1/k^2$ вы-

несем за знак интеграла и учтем, что интервал усреднения ΔE значительно превышает ширину отдельных резонансов $\gamma^{(\lambda)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\frac{\Delta E}{2}}^{E+\frac{\Delta E}{2}} dE' \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{(E'-E_{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \gamma^{(\lambda)2}} &\approx 2 \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{\Delta E \gamma^{(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= 2\pi \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{\Delta E \gamma^{(\lambda)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(E) = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_{j\pi} g(j) \sum_{\lambda(j\pi)} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\lambda)} \gamma_{\beta}^{(\lambda)}}{\Delta E \gamma^{(\lambda)}}, \quad (3.95)$$

где суммирование включает все резонансы, находящиеся внутри интервала усреднения. Отметим, что доплеровское уширение не влияет на усредненное сечение.

Обозначим число уровней с фиксированными значениями полного момента j и четности π через N , а среднее расстояние между соседними уровнями с фиксированными значениями j и π — через D . Учитывая, что $D = \Delta E/N$, среднее сечение (3.95) представим в виде

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(E) = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_{j\pi} g(j) \frac{\overline{\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}}}{D \bar{\gamma}}, \quad (3.96)$$

где черта в правой части означает усреднение по уровням с фиксированными значениями полного момента и четности внутри интервала ΔE .

Введя *корреляционную функцию* Q , учитывающую отличие среднего значения отношения произведений от отношения произведений средних:

$$Q_{\alpha\beta} \equiv \frac{\overline{\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}}}{D \bar{\gamma}} \bigg/ \frac{\overline{\gamma_{\alpha}} \overline{\gamma_{\beta}}}{D \bar{\gamma}}, \quad (3.97)$$

среднее сечение (3.96) выразим через средние резонансные параметры:

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(E) = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_{j\pi} g(j) \frac{\overline{\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}}}{D \bar{\gamma}} Q_{\alpha\beta}. \quad (3.98)$$

Средние ширины $\overline{\gamma_{\alpha}}$, $\overline{\gamma_{\beta}}$ и $\bar{\gamma}$ так же как и среднее расстояние между уровнями D , являются функциями энергии E . Для примера приведем выражение для усредненного сечения радиационного захвата нейтрона

$$\bar{\sigma}_{n\gamma}(E) = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_{j\pi} g(j) \frac{\overline{\gamma_n \gamma_{\gamma}}}{D \bar{\gamma}} Q_{n\gamma}. \quad (3.99)$$

При малых энергиях

$$\overline{\gamma_n}(E) = \sqrt{E/E_{\lambda}} \bar{\Gamma}_n; \quad \overline{\gamma_{\gamma}} = \bar{\Gamma}_{\gamma}; \quad \bar{\gamma} = \bar{\Gamma}_{\gamma}.$$

Функция (3.97) учитывает корреляцию флуктуаций резонансных параметров от уровня к уровню. Если в (3.98) положить $Q_{\alpha\beta} = 1$, то с помощью полученного соотношения нетрудно убедиться, что в принятом приближении образование и распад составного ядра — независимые процессы. Отличие корреляционной функции от единицы описывает отклонение от такой независимости. Воспользовавшись *функцией резонансных параметров* в интервале усреднения статистическим распределением (3.88), корреляционную функцию (3.97), запишем в виде интеграла

$$Q_{\alpha\beta} \approx \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 dx_2 \dots \frac{x_{\alpha} x_{\beta} P_{n_1}(x_1) P_{n_2}(x_2) \dots}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots}, \quad (3.100)$$

где $x_i = \gamma_i / \bar{\gamma}_i$ — отношение парциальной ширины к ее среднему значению; $a_i = \bar{\gamma}_i / \bar{\gamma}$ — относительный вклад парциального процесса в полную ширину $\bar{\gamma}$. В случае радиационного захвата открыты один нейтронный канал и множество радиационных каналов, поэтому корреляционная функция (3.100) принимает вид

$$\begin{aligned} Q_{n\gamma}(a) &= \frac{1+a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x} \exp(-x/2)}{a+x} = \\ &= (1+a) \{1 - \sqrt{\pi a/2} \exp(a/2) [1 - \Phi(\sqrt{a/2})]\}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

где $a = \bar{\gamma}_n / \bar{\gamma}_{\gamma}$ и $\Phi(x)$ — интеграл ошибок. Если $a \ll 1$, то $Q_{n\gamma}(a) \rightarrow 1 - \sqrt{\pi a/2}$; если $a \gg 1$, то $Q_{\alpha\beta}(a) \rightarrow 1 - 2/a$. Во всем интервале изменения a хорошо применима интерполяционная формула

$$Q_{n\gamma}(a) \approx \frac{1 + \sqrt{a} + \frac{5}{8} a^{3/2}}{1 + \frac{9}{4} \sqrt{a} + \frac{5}{8} a^{3/2}}.$$

В области изолированных резонансов усредненное полное сечение описывается выражением

$$\bar{\sigma}_t(E) = \sigma_p + \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_{j\pi} g(j) \sum_{IS} \frac{\bar{\gamma}_n^{IS}}{D} \cos 2\zeta_{IS}, \quad (3.102)$$

где $\bar{\gamma}_n^{IS}(E)$ — средняя нейтронная ширина в канале IS , соответствующем заданным значениям j и π . Множитель $\cos 2\zeta_{IS}$ связан с наличием интерференции между потенциальным и резонансным рассеянием. При достаточно больших фазах рассеяния интерференционная часть в (3.102) может принимать отрицательные значения, хотя суммарное сечение (3.102) всегда положительно.

Формулы (3.99) и (3.102) устанавливают общие соотношения между измеряемыми экспериментально в области изолированных уровней средними сечениями и средними резонансными параметрами. В области разрешенных резонансов резонансные параметры можно непосредственно измерить для отдельных уровней, и тем самым возможна экспериментальная проверка правильности соотношений (3.99) и (3.102). В области перекрывающихся резонансов формулы (3.99) и (3.102) можно использовать для экспериментального определения значений средних ширин составного ядра. Оценки, основанные на использовании

статистической модели ядра, приводят к монотонной зависимости средних сечений (в том числе и среднего полного сечения $\bar{\sigma}_t$) от энергии E и массового числа ядра A . Эксперименты, однако, указывают на немонотонную зависимость $\bar{\sigma}_t$ от E и A . Такая зависимость непосредственно связана с проявлением одночастичных особенностей взаимодействия и описывается в рамках оптической модели ядерных реакций.

Флуктуации сечений. С увеличением энергии возбуждения составного ядра расстояние между уровнями D падает, в то время как ширины уровней Γ быстро растут. Квазидискретный спектр, имеющий место при $\Gamma < D$, переходит в квазинепрерывный при ширине Γ , сравнимой с расстоянием D или больше. Если $\Gamma \gg D$, то на сечение при заданной энергии будет влиять очень большое число уровней, а это означает, что в данной области (области перекрывающихся резонансов) применимо статистическое описание.

Статистическое описание применимо также для области изолированных резонансов при большом энергетическом разбросе падающего пучка. Усреднение по энергии приводит к сглаживанию резонансной зависимости сечений. Если интервал разброса энергии падающего пучка ΔE вокруг некоторого значения энергии E значительно превышает среднее расстояние между уровнями D , то результирующее сечение также оказывается зависящим от большого числа уровней. Истинное сечение $\sigma(E)$ представляется в виде суммы среднего сечения (точнее, сечения для средней амплитуды) $\langle \sigma(E) \rangle \equiv \overline{|f(E)|^2}$ и флуктуационного сечения $\sigma^fl(E)$:

$$\sigma(E) = \langle \sigma(E) \rangle + \sigma^fl(E). \quad (3.103)$$

Аналогичное представление справедливо и в нерезонансной области. Если уровни составного ядра намного шире их взаимного расстояния, то амплитуда при заданной энергии E складывается из большого числа составляющих, отвечающих отдельным уровням, и если фазы этих амплитуд взаимно независимы, то, статистически складывая их, можно получить для сечения любое значение от максимального до нулевого [58, 59]. Очевидно, для наблюдения *флуктуаций сечения* необходимо достаточно однородный по энергии пучок $\Delta E \ll \Gamma$, где Γ — средняя ширина уровней составного ядра. Такие флуктуации являются характерным свойством любых процессов, идущих через промежуточное долгоживущее состояние. Флуктуации имеют место как при упругом рассеянии, так и при различных неупругих процессах (флуктуации сечений часто называют *эриксоновскими флуктуациями* [60]).

Предположим, что в области непрерывного спектра (для которой $\Gamma \gg D$) амплитуда какого-либо процесса f представляется в виде суммы потенциальной амплитуды f_p и резонансных брейт-вигнеровских амплитуд для многих уровней, подобно тому как и для области изолированных резонансов:

$$f = f_p + f_c, \quad f_c \equiv \sum_{\lambda} \frac{a_{\lambda}}{E - E_{\lambda} + \frac{i}{2} \gamma^{(\lambda)}}. \quad (3.104)$$

Кроме того, предположим, что отклонения a_λ от их средних значений $\langle a_\lambda \rangle$ для разных уровней λ статистически независимы как по величине, так и по знаку, т. е.

$$\langle \delta a_\lambda \delta a_{\lambda+\mu}^* \rangle = \langle |\delta a_\lambda|^2 \rangle \delta_{\mu 0}; \quad \delta a_\lambda \equiv a_\lambda - \langle a_\lambda \rangle, \quad (3.105)$$

где среднее берется по большому числу уровней:

$$\langle a_\lambda \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda, \quad N \gg 1. \quad (3.106)$$

Замечая, что расстояние между двумя уровнями и ширины уровней — медленно изменяющиеся функции энергии, и заменяя в (3.104) суммирование по отдельным уровням на суммирование по энергетическим участкам ΔE_n , которые выберем так, чтобы выполнялось условие $D \ll \Delta E_n \ll \Gamma$, амплитуду (3.104) перепишем в виде

$$\bar{f} = \bar{f} + \frac{2}{\Gamma} \sum_n \frac{\delta a_n}{x - x_n + i}, \quad (3.107)$$

где $\bar{f} = f_p + \langle f_c \rangle$ и $\delta a_n = \sum_{\lambda=n}^{n + \frac{\Delta E_n}{D}} \delta a_\lambda$. Под усреднением в (3.107) подразумевается усреднение по интервалу энергии

$$\bar{f} = \frac{1}{E_2 - E_1} \int_{E_1}^{E_2} dE f(E). \quad (3.108)$$

Усредненная резонансная амплитуда обратно пропорциональна среднему расстоянию между уровнями:

$$\langle f_c \rangle = -i \frac{\pi}{D} \langle a_\lambda \rangle. \quad (3.109)$$

Величины δa_n удовлетворяют статистическому условию

$$\langle \delta a_n \delta a_{n+m}^* \rangle = \sum_{\lambda=n}^{n + \frac{\Delta E_n}{D}} \langle |\delta a_\lambda|^2 \rangle \delta_{m0}. \quad (3.110)$$

Из (3.107) видно, что сумма флуктуационных слагаемых может зависеть лишь от безразмерной энергии $x = 2E/\Gamma$. Поэтому корреляционные соотношения могут иметь параметром конечности только Γ , но не расстояние между уровнями D .

Используя (3.103) и (3.107), найдем среднее значение флуктуационного сечения:

$$\overline{\sigma^{fl}(E)} = \frac{2\pi^2}{k^2} \frac{\langle |\delta a_\lambda|^2 \rangle}{D\Gamma}. \quad (3.111)$$

В предположении $\Delta E \equiv E_2 - E_1 \rightarrow \infty$ нетрудно вычислить также коэффициент корреляции $c(\tilde{E})$:

$$c(\tilde{E}) \equiv \frac{(\overline{\sigma(E+\tilde{E})} - \overline{\sigma(E)}) (\overline{\sigma(E)} - \overline{\sigma(E)})}{(\overline{\sigma(E)})^2} = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{E}^2}{\Gamma^2}} \frac{(\overline{\sigma(E)})^2 - \langle \sigma(E) \rangle^2}{(\overline{\sigma(E)})^2}. \quad (3.112)$$

Таким образом, интервалом когерентности для сечений действительно оказывается средняя ширина перекрывающихся уровней. Аналогичным образом можно рассмотреть флуктуации дифференциального се-

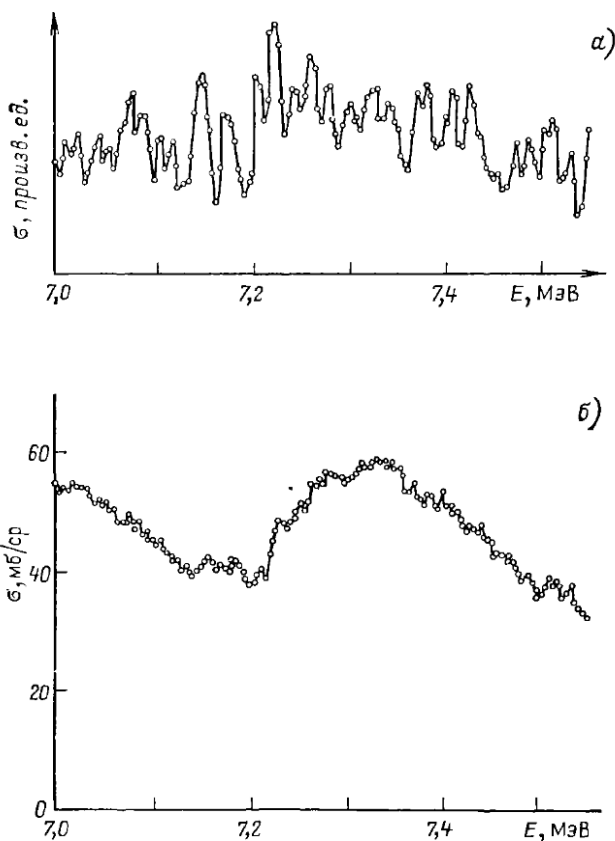


Рис. 3.9. Зависимость сечения упругого рассеяния протонов на ядрах ^{58}Ni от энергии для тонкой (а) и для толстой мишени (б) [61]

чения, а также флуктуации парциальных сечений с заданными значениями орбитального момента и других внутренних квантовых чисел.

Итак, если при измерении сечения использовать пучок с $\Delta E \ll \Gamma$, то, изменяя энергию пучка E , можно проследить всю энергетическую зависимость сечения. Если же пучок размазан по энергии $\Delta E > \Gamma$, то в результате энергетического усреднения флуктуации сечения ока-

зываются незаметными. Поэтому, если проводить измерения на толстой мишени, в которой из-за разброса потерь разброс энергии возрастает до среднего значения потерь, флуктуации сечения замажутся. На рис. 3.9 приведена зависимость сечения от энергии при упругом рассеянии протонов на ^{58}Ni для тонкой мишени, в которой средние потери энергии составляют 4 кэВ (а), и для толстой мишени, в которой средние потери энергии равны 120 кэВ (б). Путем обработки экспериментальных данных можно непосредственно определить параметр когерентности Γ . Для этого обычно строят кривую коэффициента корреляции $c(\bar{E})$ по экспериментальным данным для $\sigma(E)$ и, сопоставляя начальный участок кривой с функцией $(1 + \bar{E}^2/\Gamma^2)^{-1}$, находят Γ . Экспериментальное значение параметра когерентности действительно совпадает со средней шириной уровней составного ядра¹.

Приведенное рассмотрение флуктуаций основывалось на упрощающем допущении, что в области перекрывающихся уровней, так же как и в области изолированных уровней, особенности амплитуды имеют характер простых полюсов. В действительности указанное допущение оказывается излишним —

достаточно ограничиться более общим предположением, а именно, что амплитуда складывается из большого числа статистически независимых составляющих и характеризуется некоторой длиной корреляции [63, 64]. При этом флуктуация амплитуды $f^i = f - \langle f \rangle$ представляет собой комплексную статистическую величину, в среднем равную нулю. Значения ее вещественной и мнимой частей согласно центральной предельной теореме распределены по гауссовому закону. Поэтому значения сечения будут распределены по экспоненциальному закону

$$P\left(\frac{\sigma}{\langle\sigma\rangle}\right) \frac{d\sigma}{\langle\sigma\rangle} = \exp\left(-\frac{\sigma}{\langle\sigma\rangle}\right) \frac{d\sigma}{\langle\sigma\rangle}. \quad (3.113)$$

Это означает, что максимальную вероятность имеет нулевое значение сечения. На рис. 3.10 приведены результаты измерений для реакции $^{12}\text{C}(^{16}\text{O}, \alpha)^{24}\text{Mg}$ под углом $\theta = 0$, идущей с образованием промежуточного состояния составного ядра с энергией возбуждения около 30 МэВ. Теоретическая экспоненциальная кривая хорошо согласуется с экспериментальной гистограммой [64].

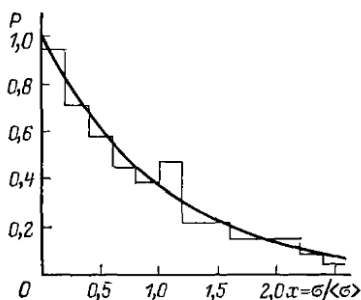


Рис. 3.10. Статистическое распределение сечений для реакции $^{12}\text{C}(^{16}\text{O}, \alpha)^{24}\text{Mg}$ с образованием промежуточного состояния составного ядра [64]

¹ Заметим, что при выводе (3.112) фактически не учитывалась унитарность S -матрицы. Как показано в [62], учет унитарности S -матрицы приводит в случае сильного перекрытия резонансных уровней к длине корреляции, пропорциональной среднему расстоянию между уровнями D .

§ 3.5. Ядерные реакции с образованием составного ядра в непрерывном спектре

Сечение образования составного ядра с энергией в области непрерывного спектра. Как было показано выше, резонансная зависимость сечений ядерных реакций при малых энергиях падающих частиц обусловлена квазидискретным характером энергетического спектра составного ядра при не очень больших энергиях возбуждения. Если же энергия падающих частиц такова, что составное ядро образуется с энергией в области квазинепрерывного спектра, сечения характеризуются плавной, нерезонансной зависимостью от энергии. Предположим, что и для реакций с образованием составного ядра в непрерывном спектре выполняется *допущение Бора*, т. е. сечение для процесса $a + A \rightarrow B + b$ представляется в виде произведения сечения образования составного ядра C под действием падающей частицы a на вероятность распада C с вылетом частицы b :

$$\sigma(a, b) = \sigma_C(a) G_C(b). \quad (3.114)$$

В отличие от состояний квазидискретного спектра, когда открыт только один упругий канал или же открыто небольшое число каналов, состояниям непрерывного спектра составного ядра соответствует большое число открытых каналов. Этим отличием в значительной мере и определяются особенности ядерных реакций с образованием составного ядра в непрерывном спектре.

Составное ядро образуется с энергией в области квазинепрерывного спектра, если кинетическая энергия падающей частицы значительно превышает энергию возбуждения нескольких низших уровней ядра-мишени. Для не очень легких ядер ($A > 50$) это условие выполняется при энергиях падающих частиц, больших нескольких мегаэлектрон-вольт. Это условие может выполняться и при более низких энергиях, если реакция характеризуется положительным тепловым эффектом Q .

Если открыто большое число каналов, то составное ядро может распадаться большим числом различных способов. В этих условиях распад через упругий канал оказывается маловероятным, поэтому сечение реакций σ_r можно отождествить с сечением образования составного ядра σ_C . Предполагая, что составное ядро имеет форму сферы радиусом R , парциальное сечение образования составного ядра через входной канал α (частица a падает на ядро-мишень A) можно выразить через значение логарифмической производной f_l согласно (2.30):

$$\sigma_C^{(l)}(\alpha) = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) \frac{-4s_l \operatorname{Im} f_l}{(\operatorname{Re} f_l - \Delta_l)^2 + (\operatorname{Im} f_l - s_l)^2}. \quad (3.115)$$

Так как волновая функция падающей частицы внутри ядра содержит только сходящую волну (поскольку пренебрегаем распадом составного ядра через входной канал)

$$u_l(r) \sim \exp(-iKr) \quad (r < R),$$

где K — волновое число влетающей в ядро частицы ($K^2 = K_0^2 + k^2$), для логарифмической производной (независимо от l) получим

$$f_l(E) = -iKR. \quad (3.116)$$

Это соотношение лежит в основе *нерезонансной теории ядерных реакций* [32]. Единственной величиной в нерезонансной теории, характеризующей внутреннюю структуру ядра, является волновое число K_0 , по порядку величины совпадающее с обратной величиной среднего расстояния между нуклонами внутри ядра ($K_0 \approx 10^{13}$ см⁻¹).

Используя (3.115) и (3.116), парциальное сечение образования составного ядра $\sigma_C^{(l)}(\alpha)$ удобно представить в виде произведения максимально возможного сечения $\frac{\pi}{k^2}(2l+1)$ на некоторую величину $T_l(\alpha)$, называемую *коэффициентом проницаемости*:

$$\sigma_C^{(l)}(\alpha) = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)T_l(\alpha), \quad (3.117)$$

где

$$T_l(\alpha) = \frac{4s_l KR}{\Delta_l^2 + (KR + s_l)^2} \quad (3.118)$$

[$T_l(\alpha)$ характеризует вероятность проникновения частицы с моментом количества движения l в канал α внутрь области взаимодействия].

Парциальное сечение упругого рассеяния найдем, подставляя (3.116) в (2.29):

$$\sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1) \left| \exp(-2i\xi_l) - 1 + \frac{2is_l}{\Delta_l + i(KR + s_l)} \right|^2. \quad (3.119)$$

Упругое рассеяние обусловлено двумя эффектами — отражением падающей волны потенциальным барьером вне поверхности ядра (потенциальное рассеяние) и отражением падающей волны на поверхности ядра вследствие изменения длины волны при переходе из внешней области во внутреннюю. Эти эффекты когерентны и в сечении (3.119) не разделяются. В общем случае существует и третий источник упругого рассеяния: образовавшееся составное ядро может распасться по тому же каналу, по которому оно образовалось. Однако в нерезонансной теории ядерных реакций этим вкладом полностью пренебрегается (в силу сделанного предположения об отсутствии расходящейся волны внутри ядра).

Выражение для коэффициента проницаемости (3.118) можно непосредственно получить, рассматривая прохождение частицы через потенциальный барьер и скачок потенциала на поверхности ядра. Эффективный потенциал для частицы с моментом l представляется вне ядра в виде суммы кулоновского и центробежного потенциалов:

$$V_l(r) = \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r > R.$$

Этот потенциал препятствует проникновению частицы в ядро или вылету ее из ядра. Эффективный потенциал внутри ядра выберем в виде прямоугольной ямы:

$$V_l(r) = -\frac{\hbar^2 K_0^2}{2\mu}; r < R.$$

Частица, падающая из бесконечности ($r = \infty$) в направлении к центру ($r = 0$), испытывает частичное отражение из-за наличия потенциального барьера и скачка потенциала. Коэффициент проницаемости T_l определяется как отношение числа частиц, прошедших в область $r < R$, к числу падающих частиц.

Волновую функцию $u_l(r)$, являющуюся решением уравнения (3.11), при $r > R$ представим в виде

$$u_l(r) = a_l u_l^{(-)}(r) + b_l u_l^{(+)}(r),$$

а при $r < R$ в виде сходящейся волны с волновым числом K

$$u_l(r) = c_l \exp(-iKr).$$

Коэффициент проницаемости определяется разностью

$$T_l = 1 - \frac{|b_l|^2}{|a_l|^2},$$

так как $|a_l|^2$ определяет интенсивность падающей волны, а $|b_l|^2$ — интенсивность отраженной волны. Из условия непрерывности функции $u_l(r)$ при $r = R$ находим

$$\frac{b_l}{a_l} = \frac{\Delta_l - i s_l + i KR}{\Delta_l + i s_l + i KR} \exp(2i\zeta_l),$$

и таким образом получаем формулу (3.118).

Коэффициент проницаемости отличен от единицы даже при отсутствии внешнего барьера, т. е. для нейтрона с $l = 0$. Так как в этом случае $\Delta_0 = 0$ и $s_0 = kR$, то для коэффициента проницаемости находим

$$T_0(n) = 4kK / (K + k)^2. \quad (3.120)$$

Коэффициент проницаемости $T_0(n)$ мал при малых энергиях $k \ll K$ и стремится к единице при больших энергиях, когда $k = K$.

Выражение для проницаемости (3.118) существенно упрощается при малых энергиях. Если $k \ll K$, то s_l и Δ_l малы по сравнению с KR , поэтому формулу (3.118) можно переписать в следующем приближенном виде:

$$T_l(\alpha) = 4k v_l / K \quad (k \ll K), \quad (3.121)$$

где v_l определяется согласно (2.22).

Для нейтронов коэффициенты проницаемости $T_l(n)$ при любых значениях l можно рассчитать точно в зависимости от энергии, используя общие соотношения (2.20), (2.21) и (3.118). Для заряженных частиц такой расчет оказывается более сложным, так как функции $F_l(r)$ и $G_l(r)$ зависят от добавочного параметра ξ . На рис. 3.11 приведена зависимость от энергии коэффициентов проницаемости для нейтронов при различных l и $R = 5 \cdot 10^{-13}$ см. Аналогичные кривые для

протонов при $R = 4,5 \cdot 10^{-13}$ см представлены на рис. 3.12. Энергии частиц, соответствующие высоте барьера, отмечены на рисунке стрелками. Центробежный потенциал для заряженных частиц при энергиях, меньше высоты барьера, играет второстепенную роль по сравнению с кулоновским отталкиванием.

Полное сечение образования составного ядра определяется суммой парциальных сечений:

$$\sigma_C(\alpha) = \sum_l \sigma_C^{(l)}(\alpha). \quad (3.122)$$

При малых энергиях падающих частиц в сумме существенны только слагаемые, отвечающие наименьшим l . С увеличением энергии число парциальных слагаемых, вносящих вклад в сумму (3.122), увеличи-

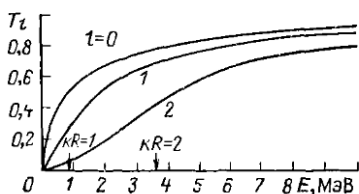


Рис. 3.11. Зависимость от энергии коэффициентов проникновения для нейтронов с различными l и $R = 5 \cdot 10^{-13}$ см

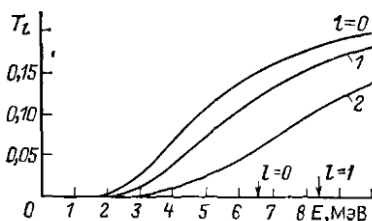


Рис. 3.12. Зависимость от энергии коэффициентов проникновения для протонов с различными l и $R = 4,5 \cdot 10^{-13}$ см, $Z = 20$

вается. Если $kR \gg 1$, то в сумму вносят вклад слагаемые с $l \leq l_{\text{макс}} = kR$. Энергетическая зависимость сечения (3.122) существенным образом определяется зависимостями парциальных проникновений от энергии.

Для нейтронов сечение образования составного ядра (3.122) при больших энергиях стремится к классическому пределу πR^2 в соответствии с тем, что каждая частица, достигающая ядерной поверхности, захватывается ядром. С уменьшением энергии это сечение возрастает, однако, медленнее, чем π/k^2 , вследствие эффектов отражения на ядерной поверхности. При малых энергиях падающих нейтронов сечение образования составного ядра обратно пропорционально \sqrt{E} . Для заряженных частиц существенную роль играет кулоновское отталкивание, из-за которого сечение образования составного ядра становится очень малым при энергиях, меньше высоты кулоновского барьера.

Отметим, что сечение образования составного ядра в нерезонансной области не зависит от квантового состояния или каких-либо специфических свойств ядра-мишени; сечение зависит от типа падающей частицы (нейтрон, протон, α -частица и т. п.) и ее энергии E , а также от заряда и радиуса ядра-мишени.

Сечение образования составного ядра и вероятность распада. Как было показано выше, вычисление сечения образования составного ядра в нерезонансной области сводится к расчету коэффициентов проникновения. Такой расчет можно провести в рамках феноменологическо-

го описания ядерного взаимодействия. Предположение о независимости образования и распада составного ядра позволяет установить связь между сечением образования составного ядра и вероятностью распада. Поэтому вероятности распада составного ядра в состоянии с энергией в непрерывном спектре могут быть рассчитаны на основе тех же феноменологических подходов.

Для установления связи между сечением образования составного ядра и вероятностью распада воспользуемся принципом детального равновесия, справедливым для систем, свойства которых инвариантны по отношению к вращениям и отражению пространственных координат и отражению времени. Рассмотрим некоторый процесс $a + A \rightarrow C \rightarrow B + b$ и обратный ему процесс $b + B \rightarrow C \rightarrow A + a$, соответствующие сечения обозначим $\sigma(a, b)$ и $\sigma(b, a)$. В силу принципа детального равновесия (1.102) сечения прямого и обратного процессов связаны соотношением

$$k_a^2 \sigma(a, b) = k_b^2 \sigma(b, a) \quad (3.123)$$

(для простоты пренебрегаем спинами частиц). В предположении, что для прямого и обратного процессов справедливо допущение Бора (3.114), из (3.123) находим

$$k_a^2 \sigma_C(a) / \gamma_a = k_b^2 \sigma_C(b) / \gamma_b = U(E_C), \quad (3.124)$$

где $U(E_C)$ — некоторая универсальная функция, зависящая только от энергии возбуждения составного ядра и не зависящая от канала, по которому оно образовалось. Используя (3.124), находим

$$\gamma_a = k_a^2 \sigma_C(a) / U(E_C); \quad \gamma \equiv \sum_a \gamma_a = \frac{\sum_a k_a^2 \sigma_C(a)}{U(E_C)},$$

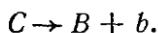
и, таким образом, вероятность распада составного ядра C по определенному каналу β можно представить в виде

$$G_C(b) = k_b^2 \sigma_C(b) / \sum_{b'} k_{b'}^2 \sigma_C(b'), \quad (3.125)$$

где суммирование в знаменателе распространяется на все каналы, по которым возможен распад составного ядра [сечения $\sigma_C(b')$ и волновые числа $k_{b'}$ соответствуют энергии канала $E_{b'}$, при которой составное ядро образуется с энергией E_C]. Согласно (3.125) вероятности распада составного ядра $G_C(b)$ можно рассчитать, если известны сечения образования составного ядра $\sigma_C(b)$ по различным каналам. Заметим, что соотношение (3.125) основывается на допущении Бора (3.114).

Используя (3.125), убедимся, что нейтронные ширины, т. е. парциальные ширины распада составного ядра с испусканием нейтрона, в общем случае значительно больше ширин для протонов или других заряженных частиц. Действительно, сечение образования составного ядра $\sigma_C(b)$ [стоящее в числителе выражения (3.125)] значительно больше для нейтронов, чем для заряженных частиц, так как для последних существует кулоновский барьер. Исключения возможны только вблизи порога реакций с испусканием нейтрона, когда заряженные частицы обладают гораздо большей кинетической энергией, чем нейтрон.

Распад составного ядра. Рассмотрим вторую стадию ядерных процессов с образованием составного ядра — *распад составного ядра*:



Согласно (3.125) вероятность распада составного ядра C по какому-либо каналу β можно вычислить, если известны сечения образования составного ядра $\sigma_C(\alpha)$ по всем возможным каналам α . Найдем распределение испускаемых частиц по энергиям. Кинетическая энергия испускаемой частицы (точнее, энергия относительного движения в выходном канале; однако если масса частицы b значительно меньше массы остаточного ядра B , энергией отдачи последнего можно пренебречь) определяется соотношением

$$E_\beta = E_C - S_b - E_B \equiv E_{Bb} - E_B, \quad (3.126)$$

где E_{Bb} — максимально возможная энергия частицы b , соответствующая образованию остаточного ядра B в основном состоянии; E_B — энергия возбуждения ядра B . Согласно (3.126) каждому уровню остаточного ядра E_B соответствует определенная энергия вылетающей частицы E_β , если только $E_B < E_{Bb}$. Функцию распределения вылетающих частиц по энергиям можно представить в виде последовательности острых пиков, отвечающих отдельным уровням ядра B . Относительные интенсивности пиков определяются выражением

$$G_C(\beta) \approx k_\beta^2 \sigma_C(E_\beta) / \sum_{\beta'} k_{\beta'}^2 \sigma_C(E_{\beta'}). \quad (3.127)$$

Сечение образования составного ядра $\sigma_C(E)$ увеличивается с ростом энергии E (вследствие увеличения коэффициента проницаемости), за исключением случая нейтронов с $l = 0$, когда $\sigma_C(E)$ уменьшается с ростом E по закону $1/\sqrt{E}$. Произведение $k^2 \sigma_C(E)$, входящее в (3.127), является монотонно возрастающей функцией энергии E , поэтому высота пиков в энергетическом распределении растет с ростом энергии вылетающей частицы.

При достаточно большой энергии возбуждения составного ядра E_C число допустимых состояний конечного ядра очень велико. При этом распределение вылетающих частиц по энергиям становится непрерывным, если расстояние между ближайшими уровнями конечного ядра оказывается меньше энергетического разброса частиц в падающем пучке ΔE_a или разрешающей способности ΔE_b экспериментального устройства, регистрирующего продукты реакции:

$$\Delta E_B < \Delta E_a, \Delta E_b.$$

При выполнении этого условия обеспечивается применимость статистического описания¹. Число частиц, испускаемых с энергией в интер-

¹ Разработке статистической теории ядерных реакций посвящены работы [65—68]. Впервые понятие температуры как характеристики возбужденного состояния ядра введено Я. И. Френкелем [65]. Термодинамический подход для установления связи между плотностью уровней и энергией возбуждения ядра впервые предложен Л. Д. Ландау [66].

вале ΔE , определяется выражением

$$W(E) \Delta E = \sum_{E < E_B < E + \Delta E} G_C(E_B), \quad (3.128)$$

где суммирование проводится по всем каналам, энергии которых заключены в интервале ΔE . Очевидно, число слагаемых в правой части (3.128) равно числу уровней конечного ядра, заключенных в интервале от E_B до $E_B - \Delta E$, где $E_B = E_{Bb} - E$. Введя плотность уровней конечного ядра $\rho_B(E)$, это число можно представить в виде $\rho_B(E) \Delta E$. Вынося среднее значение относительной вероятности распада за знак суммы, из (3.128) для функции распределения имеем

$$W(E) \sim E \sigma_C(E) \rho_B(E_{Bb} - E). \quad (3.129)$$

Эта формула лежит в основе *статистической модели распада составного ядра*, предложенной В. Вайскопфом в 1937 г. [67].

Согласно (3.129) функция распределения вылетающих частиц по энергиям представляется в виде произведения двух множителей, по-разному зависящих от энергии. Величина $E \sigma_C(E)$ — возрастающая функция энергии, в то время как $\rho_B(E_{Bb} - E)$ — сильно убывающая функция E , так как плотность уровней $\rho_B(E_B)$ быстро возрастает с увеличением энергии возбуждения E_B . Поэтому функция распределения вылетающих частиц по энергиям $W(E)$ имеет четко выраженный максимум. Быстрое убывание $\rho_B(E_{Bb} - E)$ с ростом E приводит к тому, что максимум $W(E)$ соответствует энергиям E , малым по сравнению с E_{Bb} .

Используя методы термодинамики, нетрудно найти приближенное выражение для функции распределения (3.129). Введем логарифм плотности состояний остаточного ядра

$$S(E_B) = \ln \rho(E_B) \quad (3.130)$$

и разложим функцию $S(E_{Bb} - E)$ в ряд по степеням E в окрестности максимальной энергии возбуждения остаточного ядра E_{Bb} :

$$S(E_{Bb} - E) = S(E_{Bb}) - \left. \frac{dS(E_B)}{dE_B} \right|_{E_B = E_{Bb}} E + \dots \quad (3.131)$$

Подставляя это разложение в (3.129), для функции распределения получаем приближенное выражение

$$W(E) \sim E \sigma_C(E) \exp \left[- \frac{E}{\theta(E_{Bb})} \right], \quad (3.132)$$

где

$$1/\theta(E_{Bb}) = dS(E_{Bb})/dE_{Bb}. \quad (3.133)$$

Величина θ может быть интерпретирована как *ядерная температура*, а логарифм плотности состояний $S(E_B)$ — как *энтропия остаточного ядра* с энергией возбуждения E_B . Само соотношение (3.133) при этом представляет собой обычное термодинамическое соотношение, связывающее энтропию и температуру системы. Таким образом, свойства

ядер по аналогии со статистическим описанием свойств макроскопических тел характеризуются термодинамическими величинами. Подчеркнем, что возможность такого статистического описания непосредственно связана с большим числом состояний системы в энергетическом интервале усреднения.

Для нейтронов сечение $\sigma_c(E)$ очень медленно изменяется с изменением энергии (за исключением очень малых энергий), поэтому (3.132) принимает вид максвелловского распределения:

$$W(E) = CE \exp(-E/\theta) \quad (3.134)$$

(C — нормировочная постоянная), т. е. энергетический спектр нейтронов, образующихся при распаде составных ядер, подобен энергетическому спектру молекул, испаряющихся с поверхности капли жидкости. Максимум распределения (3.134) соответствует энергии $E = \theta$, которая должна быть малой [для того чтобы можно было использовать разложение (3.131)] по сравнению с $E_{B\bar{v}}$. Наличие кулоновского барьера в случае заряженных частиц приводит к искажению максвелловского распределения, так как число частиц, испускаемых с малыми энергиями, уменьшается. Итак, для описания распада составного ядра применима статистическая модель, согласно которой энергия возбуждения интерпретируется как тепловая энергия, при этом в результате нагревания ядерной системы происходит испарение нейтронов или других частиц. Заметим, что энергетическое распределение частиц, испускаемых при распаде составного ядра, зависит от температуры остаточного ядра.

Для нахождения ядерной температуры θ необходимо знать зависимость *плотности уровней* от энергии возбуждения $\rho(E_B)$. Качественно энергетическую зависимость плотности уровней нетрудно найти на основе термодинамического рассмотрения, выбрав определенную связь между температурой θ и энергией возбуждения E_B . Очевидно, энергия возбуждения E_B должна быть монотонно возрастающей функцией температуры θ . В силу принципа Нернста при $\theta = 0$ производная от $E_B(\theta)$ должна обращаться в нуль. Поэтому, предположив, что функция $E_B(\theta)$ допускает разложение в степенной ряд вблизи $\theta = 0$, запишем

$$E_B(\theta) \approx a\theta^2, \quad (3.135)$$

где a — некоторая постоянная. Используя определение (3.133), найдем

$$S(E_B) = \int \frac{dE}{\theta(E)} = 2 \sqrt{aE_B} + \text{const}$$

и для плотности уровней получаем следующее выражение:

$$\rho(E_B) = C \exp(2\sqrt{aE_B}). \quad (3.136)$$

Постоянные a и C необходимо подобрать таким образом, чтобы воспроизводилась экспериментальная зависимость плотности уровней от энергии. Из (3.136) видно, что $\rho(E_B)$ экспоненциально растет с увеличением энергии возбуждения ядра, что находится в качественном согласии с экспериментальными данными.

Количественный расчет плотности уровней можно провести, используя определенную модель для ядра, например рассматривая ядро как вырожденный ферми-газ. В простейшем случае при $N = Z = A/2$ плотность уровней для состояний с нулевым значением полного момента $I = 0$ описывается формулой

$$\rho(E_B, I = 0) = (C/E^2) \exp(2\sqrt{aE_B}), \quad (3.137)$$

постоянная a непосредственно выражается через плотность одночастичных состояний на поверхности Ферми:

$$a = (\pi^2/4) (A/E_F). \quad (3.138)$$

Экспериментально плотности ядерных уровней определяются по изучению резонансных спектров медленных нейтронов и анализу испарительных спектров при неупругом рассеянии нейтронов на ядрах. На рис. 3.13 представлена плотность уровней, найденная по энергетическому распределению нейтронов, неупруго рассеянных на ядрах Ag [69]. Экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическим распределением (3.137), если для параметра a выбрать значение $a = 19,55 \text{ МэВ}^{-1}$.

На рис. 3.14 представлены значения параметра a для различных ядер, найденные путем сравнения их со средними расстояниями между резонансами на медленных нейтронах (светлые точки) и по испарительным спектрам нейтронов (крестики). При нахождении значений a учитывались поправки, обусловленные эффектом спаривания. В выражении для плотности уровней (3.137) энергию возбуждения E_B заменяли эффективной энергией

$$E_{\text{эф}} = \begin{cases} E_B - 2\delta & \text{для чётно-чётных ядер;} \\ E_B - \delta & \text{для } A\text{-нечётных ядер;} \\ E_B & \text{для нечётно-нечётных ядер,} \end{cases}$$

где δ — нечётно-чётный массовый параметр ($\delta \approx 12 A^{-1/2}$). Учет такой поправки приводит к увеличению параметра a для чётно-чётных ядер на 20—40%. Следует отметить заметное уменьшение параметра a для конфигураций, близких к заполненным оболочкам ($N = 50, 82, 126$ и $Z = 50, 82$). Качественно такой эффект можно объяснить, если учесть, что для возбуждения частиц из одной оболочки в другую требуется довольно большая энергия. Заметим также, что экспериментальные значения параметра a больше значения, определяемого формулой (3.138).

Используя (3.135), температуру ядра представим в виде функции энергии возбуждения

$$\theta = \sqrt{E_B/a}. \quad (3.139)$$

Для нахождения температуры, характеризующей максвелловское распределение вылетающих при распаде составного ядра нейтронов, в (3.139) E_B следует положить равной максимальному значению E_{B^*} .

Рис. 3.13. Плотность урбней $\rho(E)$, определяемая из энергетического распределения нейтронов, неупруго рассеянных на ядрах Ag

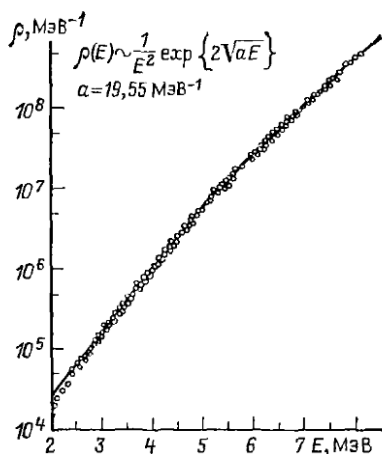
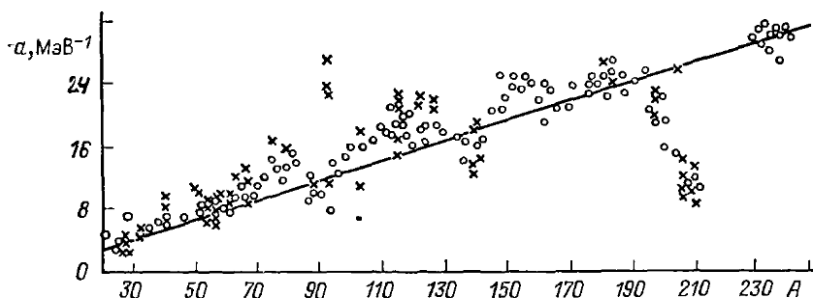


Рис. 3.14. Параметр a для различных ядер [70]



В табл. 3.1 приведены ядерные температуры в мегаэлектрон-вольтах для различных энергий возбуждения E_B и различных массовых чисел A .

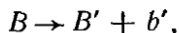
Следует отметить, что для не очень легких ядер ядерные температуры оказываются значительно меньше энергии возбуждения.

Вторичные ядерные реакции. Обычно в ядерных реакциях типа $a + A \rightarrow B + b$, осуществляющихся с образованием составного ядра с энергией в непрерывном спектре, конечное ядро B остается в возбужденном состоянии. В дальнейшем это ядро теряет энергию возбуждения, испуская последовательно γ -кванты, пока не достигается основ-

Таблица 3.1

Энергия возбуждения, МэВ	Массовое число A				
	25	55	115	181	231
1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,2
5	1,2	0,8	0,6	0,5	0,4
10	1,6	1,2	0,8	0,7	0,6
15	2,0	1,4	1,0	0,8	0,7

ное состояние. Однако если возбуждение ядра B оказывается настолько большим, что возможно испускание какой-либо частицы b' (например, нейтрона или протона), то вслед за первичным распадом ядра C происходит вторичный распад ядра B :

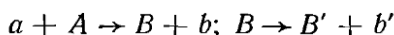


сопровождающийся испусканием частицы b' . Для возможности осуществления вторичного процесса необходимо, чтобы энергия возбуждения составного ядра C превышала сумму энергий связи частиц b и b' :

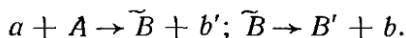
$$E_C > S_b + S_{b'}$$

Так как средняя энергия, уносимая частицей b при первичном распаде, равна ядерной температуре, то вторичная реакция происходит с заметной вероятностью только в том случае, если энергия возбуждения ядра C превышает сумму энергий связи S_b и $S_{b'}$ на величину порядка ядерной температуры.

Итак, при столкновении частицы a с ядром A образуется составное ядро C , а затем (если $E_C > S_b + S_{b'}$) происходит последовательное испускание частиц b и b' с образованием конечного ядра B' . Можно указать два альтернативных механизма процесса:



и



Обычно вклад одного из них оказывается более существенным. Если частицы b и b' одинаковы, то оба механизма совпадают. Удобно ввести сокращенное обозначение для указанного процесса $A(a, bb')B'$.

Согласно общему определению (3.114) в сечении $\sigma(a, b)$ учитываются также и реакции, при которых конечное ядро испытывает вторичный распад. Введем сечение $\sigma_0(a, b)$, отвечающее только реакциям, при которых вторичный распад невозможен. В общем случае

$$\sigma(a, b) = \sigma_0(a, b) + \sum_{b'} \sigma(a, bb'). \quad (3.140)$$

Пусть E_{Bb} максимально возможная энергия возбуждения ядра B ($E_{Bb} = E_C - S_b$). Тогда максимальное значение энергии, уносимой вторичной частицей b' ,

$$E_{Bb'} = E_{Bb} - S_{b'}. \quad (3.141)$$

На рис. 3.15 представлено соотношение между энергией возбуждения ядра B и энергиями испускаемых частиц. Очевидно, если $E_{Bb} < S_{b'}$, то $\sigma(a, bb') = 0$ и $\sigma(a, b) = \sigma_0(a, b)$. Если же $E_{Bb} > S_{b'}$, т. е. $E_{Bb'} > 0$, то $\sigma(a, bb') \neq 0$ и $\sigma(a, b) > \sigma_0(a, b)$. Используя допущение Бора, сечение реакции $A(a, bb')B'$ можно факторизовать:

$$\sigma(a, bb') = \sigma_C(\alpha) \sum_{\beta} G_C(\beta) G_B(\beta'), \quad (3.142)$$

где $G_C(\beta)$ — относительная вероятность распада составного ядра C по каналу β и $G_B(\beta')$ — относительная вероятность испускания ядром B частицы b' в состоянии β' , а штрих возле знака суммы означает, что суммирование распространяется только на те каналы β , в которых энергия возбуждения ядра B превышает $S_{b'}$. Заметим, что при энергиях возбуждения, превышающих порог испускания частицы на величину порядка нескольких сотен электрон-вольт, ядро почти непре-

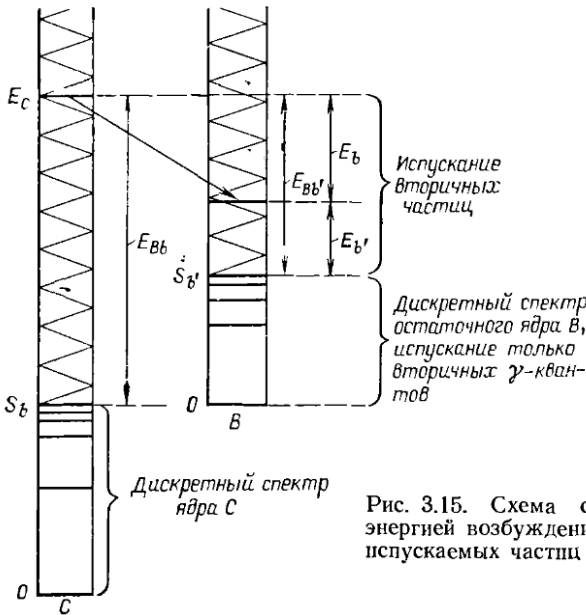


Рис. 3.15. Схема соотношения между энергией возбуждения ядра и энергиями испускаемых частиц

менно распадается путем испускания частицы, а не путем излучения γ -кванта. Для простоты будем считать, что, если энергия возбуждения превышает порог испускания, ядро испускает частицу, т. е.

$$\sum_{b'} G_B(\beta') \approx 1 \text{ при условии } E_{Bb} - E_\beta > S_{b'}$$

другими словами, пренебрежем конкуренцией γ -излучения по сравнению с испусканием частиц, что справедливо в большинстве случаев, за исключением околупороговой области.

Таким образом, для сечений $\sigma_0(a, b)$ и $\sigma(a, bb')$ при $E_{Bb'} > 0$ получим следующие приближенные формулы:

$$\sigma_0(a, b) = \sigma_C(\alpha) \sum_{E_{Bb} - E_\beta < S_{b'}} G_C(\beta); \quad (3.143)$$

$$\sigma(a, bb') = \sigma_C(\alpha) \sum_{E_{Bb} - E_\beta > S_{b'}} G_C(\beta). \quad (3.144)$$

Вводя функцию энергетического распределения $W(E)$ частиц, испускаемых при распаде составного ядра C , формулы (3.143) и (3.144) перепишем в виде

$$\sigma_0(a, b) = \sigma_C(\alpha) \int_{E_{Bb'}}^{E_{Bb}} dEW(E) \left/ \int_0^{E_{Bb}} dEW(E) \right.; \quad (3.145)$$

$$\sigma(a, bb') = \sigma_C(\alpha) \int_0^{E_{Bb'}} dEW(E) \left/ \int_0^{E_{Bb}} dEW(E) \right.. \quad (3.146)$$

Особенно простые выражения получаются для сечений, если при первом и втором распадах испускаются нейтроны. В этом случае можно воспользоваться приближенной максвелловской функцией распределения (3.134). Предполагая, что $S_{b'}$ значительно больше температуры θ ядра B , получаем следующие приближенные выражения для сечений:

$$\sigma_0(a, n) = \sigma_C(\alpha) \left(1 + \frac{E_{Bb'}}{\theta} \right) \exp \left(-\frac{E_{Bb'}}{\theta} \right); \quad (3.147)$$

$$\sigma(a, 2n) = \sigma_C(\alpha) \left\{ 1 - \left(1 + \frac{E_{Bb'}}{\theta} \right) \exp \left(-\frac{E_{Bb'}}{\theta} \right) \right\}. \quad (3.148)$$

Очевидно, если $E_{Bb'} > 0$, то сечение $\sigma_0(a, n)$ становится значительно меньше $\sigma_C(\alpha)$, т. е. в этом случае после испускания первого нейтрона происходят вторичные реакции $\sigma(a, 2n) \gg \sigma_0(a, n)$.

Если энергия падающей частицы a достаточно велика, то образовавшееся после испускания второй частицы b' ядро B' может оказаться возбужденным настолько, что возможно испускание третьей частицы. Таким образом, при больших энергиях возбуждения составного ядра C возможны третичные реакции или даже реакции более

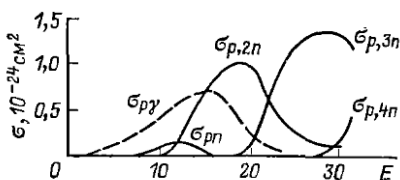


Рис. 3.16. Сечения реакций с испусканием различного числа нейтронов на $Вi$ под действием протонов

высокого порядка. Основываясь на введенных при рассмотрении вторичных реакций допущениях, можно аналогичным образом рассмотреть цепочку последующих испусканий и рассчитать такие характеристики, как среднее число испущенных нейтронов и полный энергетический спектр.

На рис.3.16 представлены сечения реакций на ядре $Вi$ под действием протонов с испусканием различного числа нейтронов [71]. Графики демонстрируют конкуренцию различных способов распада: по мере того как новый способ распада становится энергетически возможным, происходит подавление предыдущего основного способа распада.

Статистическая модель. В заключение этого параграфа остановимся на так называемой *статистической модели ядерных реакций*. Как уже

отмечалось выше, статистическое описание процессов с образованием составного ядра применимо, если энергетический интервал усреднения значительно превышает расстояние между соседними уровнями образующегося составного ядра. В этом случае отдельные резонансы не наблюдаются и сечения характеризуются усредненными сглаженными зависимостями от энергии. Согласно (3.98) усредненное сечение какого либо процесса $\alpha \rightarrow \beta$ (в пренебрежении корреляцией флуктуаций резонансных параметров, относящихся к различным уровням) выражается через усредненные парциальные ширины и среднее расстояние между уровнями:

$$\overline{\alpha_{\alpha\beta}} = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_j g(j) \sum_{lsl's'} \frac{\overline{\gamma_{\alpha ls}^j} \overline{\gamma_{\beta l's'}^j}}{D_j \gamma^j}, \quad (3.149)$$

где s и s' — каналовые спины; $g(j)$ — статистический вес состояния с полным моментом j .

Формулу (3.149) можно непосредственно получить путем усреднения по энергетическому интервалу $\Delta E \gg D$ интегрального сечения процесса $\alpha \rightarrow \beta$ в окрестности изолированного резонанса (3.74) и последующего суммирования по всем резонансам в интервале усреднения (используемое при этом допущение о независимости вкладов отдельных резонансов в сечение эквивалентно пренебрежению корреляцией флуктуаций резонансных параметров от уровня к уровню).

Очевидно, усредненное сечение образования составного ядра получим, просуммировав сечение (3.149) по всем конечным состояниям β (в том числе и $\beta = \alpha$):

$$\sigma_C(\alpha) = \sum_{\beta} \overline{\sigma_{\alpha\beta}}. \quad (3.150)$$

Замечая, что $\sum_{\beta l's'} \gamma_{\beta l's'}^j = \gamma^j$, получаем

$$\sigma_C(\alpha) = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_{lsj} g(j) \frac{\overline{\gamma_{\alpha ls}^j}}{D_j}. \quad (3.151)$$

Парциальная ширина $\gamma_{\alpha ls}^j$ является функцией энергии канала и практически не зависит от j и s , если выполняются правила сложения моментов:

$$\gamma_{\alpha ls}^j = \begin{cases} \gamma_{\alpha l}(E), & |j-s| \leq l \leq j+s; \\ 0 & \text{при других значениях.} \end{cases} \quad (3.152)$$

(Среднее расстояние между уровнями обычно также слабо зависит от момента j .) Подставляя значение γ^j в (3.151) и выполняя суммирование по s и j , получаем

$$\sigma_C(\alpha) = \frac{2\pi^2}{k^2} \sum_l (2l+1) \frac{\overline{\gamma_{\alpha l}}}{D}. \quad (3.153)$$

Сопоставляя это соотношение с (3.117) и (3.122), видим, что отношение среднего значения парциальной ширины к среднему расстоянию между уровнями с точностью до постоянной совпадает с коэффициентом проницаемости (3.118)¹:

$$T_l(\alpha) = 2\pi\bar{\gamma}_{\alpha l}/D. \quad (3.154)$$

По аналогии с этим соотношением можно ввести коэффициент проницаемости:

$$T_{ls}^{(j)}(\alpha) = 2\pi\bar{\gamma}_{\alpha ls}^j/D_j, \quad (3.155)$$

который характеризует вероятность образования составного ядра с полным моментом j частицей в канале α с заданными l и s :

$$\sigma_{Cj}^{(ls)}(\alpha) = \frac{\pi}{k^2} g(j) T_{ls}^{(j)}(\alpha). \quad (3.156)$$

Эта формула является непосредственным обобщением (3.117). Используя определение (3.155), формулу для усредненного сечения реакции $\alpha \rightarrow \beta$ выразим через коэффициенты проницаемости:

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{ls'l's'j} g(j) \frac{T_{ls}^j(\alpha) T_{l's'}^j(\beta)}{\sum_{\gamma l''s''} T_{l''s''}^j(\gamma)}. \quad (3.157)$$

Угловое распределение продуктов реакции $\alpha \rightarrow \beta$ нетрудно найти, усредняя по энергии дифференциальное сечение для отдельного резонанса (3.75) и проводя последующее суммирование по всем резонансам в интервале усреднения. Используя выражение (3.76) и учитывая, что для некоррелированных фаз справедливо соотношение

$$\overline{S_{\beta l_1 s', \alpha l_1 s}^{l_1 s'} S_{\beta l_2 s', \alpha l_2 s}^{l_2 s'}} = \delta_{l_1 l_2} \delta_{l_1' l_2'} \delta_{l_1 l_2} |S_{\beta l_1 s', \alpha l_1 s}^{l_1 s'}|^2, \quad (3.158)$$

находим

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\alpha\beta}(\vartheta)} &= \frac{1}{4k^2} \sum_{ls'l's'jL} (-1)^{s'-s} g(j) (2l+1)(2l'+1)(2j+1) \times \\ &\times (l0l0|L0)(l'0l'0|L0) W(lj|j; sL) W(l'j|j; s'L) \frac{T_{ls}^j(\alpha) T_{l's'}^j(\beta)}{\sum_{\gamma l''s''} T_{l''s''}^j(\gamma)} P_L(\cos\vartheta). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Коэффициент $(l0l0|L0)$ отличается от нуля только при четных значениях L , поэтому в сумме (3.159) содержатся только полиномы Лежандра четного порядка и, следовательно, угловое распределение про-

¹ Формула (3.154) справедлива при выполнении условия $\bar{\gamma}_{\alpha l} \ll D$. В общем случае между коэффициентом проницаемости и усредненной парциальной шириной имеет место соотношение

$$T_l(\alpha) = 1 - \exp\left\{-\frac{2\pi\bar{\gamma}_{\alpha l}}{D}\right\}.$$