

ПРОБЛЕМЫ



ФИЗИКИ

А. Лейн и Р. Томас

Т Е О Р И Я
Я Д Е Р Н Ы Х Р Е А К Ц И Й
П Р И Н И З К И Х Э Н Е Р Г И Я Х

Перевод с АНГЛИЙСКОГО

М. Н. НИКОЛАЕВА и А. В. ШУТЬКО

Под редакцией

В. М. АГРАНОВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1960

R-MATRIX THEORY OF NUCLEAR REACTIONS

A. M. LANE

Atomic Energy Research Establishment, Harwell,
Berkshire, England

and

R. G. THOMAS

Los Alamos Laboratory, Los Alamos, New Mexico

REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOL. 30, No. 2, Pt. I, 257—353,

APRIL 1958

И * Л

*Издательство
иностранной
литературы*

*

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга посвящена изложению результатов теории ядерных реакций при низких энергиях, которые были получены в течение последних двадцати пяти лет.

Неизменный успех применения резонансных формул Брейта — Вигнера для анализа большого числа всевозможных ядерных реакций содействовал появлению целого ряда формулировок теории ядерных реакций, в которых обосновывались, уточнялись и обобщались простейшие резонансные формулы.

В настоящее время полная и правильная интерпретация экспериментальных данных по ядерным реакциям при низких энергиях представляется невозможной без использования результатов этих теорий.

Однако до недавнего времени эти результаты можно было найти только в многочисленных журнальных статьях, что обычно затрудняло знакомство широких кругов физиков с результатами теории.

Предлагаемая ныне книга познакомит читателя с новейшими методами и направлениями в развитии теории ядерных реакций при низких энергиях.

Основную часть книги составляет написанный А. Лейном и ныне покойным Р. Томасом обзор, который является, несомненно, одним из лучших и наиболее полных обзоров последнего времени, посвященных теории ядерных реакций при низких энергиях.

При изложении теории ядерных реакций упомянутые авторы используют **R**-матричную теорию, развитую Вигнером

и Айзенбудом, которая приводит к выражениям для сечений, явно зависящим от энергии относительного движения сталкивающихся ядер. Авторы ведут изложение индуктивным путем, постепенно переходя от простых случаев к более сложным.

В обзоре тщательно проанализированы предположения, лежащие в основе теории. Введены понятия ядерного конфигурационного пространства и каналов реакции. Формальный аппарат теории построен вначале на примере рассеяния бесспиновых частиц, между которыми действуют центральные силы, а затем обобщен.

Изложению основ теории посвящены первые десять глав обзора. Далее даны приложения теории к описанию поведения сечений в области изолированных резонансов, а также в области сильно перекрывающихся уровней составного ядра. Подробно изложен вопрос об интерференции уровней.

В последней главе показано, как R -матричная теория ядерных реакций может быть использована для изучения некоторых специальных вопросов, таких, как поведение сечений вблизи порога, α -распад, реакции с участием фотонов и т. д.

Естественным продолжением и развитием работы Лейна и Томаса являются вышедшие в последнее время статьи Фешбаха, Блоха и Брауна, которые помещены в Дополнении, в конце книги.

Браун (статья III Дополнения) при описании ядерных реакций использует метод, развитый Капуром и Пайерлсом. Как R -матричная теория, так и теория Капура и Пайерлса являются строгими теориями, и в этом смысле эти теории эквивалентны друг другу. Однако выражения для сечений, к которым приводит теория Капура и Пайерлса, оказываются весьма удобными в тех случаях, когда много уровней составного ядра дают вклад в сечение реакций. Браун подробно рассматривает так называемую промежуточную модель Лейна, Томаса и Вигнера, с помощью которой удастся интерпретировать „гигантские“ резонансы в сечении рассеяния нейтронов на ядрах.

В отличие от Лейна и Томаса, которые основное внимание уделяли изучению реакций, протекающих через стадию составного ядра, в статье Брауна изучается проблема описания так называемых „прямых“ реакций, которые идут без образования составного ядра.

Этому же вопросу посвящена статья К. Блоха (статья II Дополнения). В этой статье показано, каким образом и ценой каких приближений R -матричная теория ядерных реакций может быть приспособлена для описания „прямых“ процессов.

Как в теории Капура и Пайерлса, так и в теории Вигнера и Айзенбуда, на основании которых ведется изложение в упомянутых выше статьях, фигурируют в значительной степени произвольные так называемые „радиусы каналов“ гиперсфер в конфигурационном пространстве, которые делят конфигурационное пространство на две части: внутреннюю и внешнюю (каналы реакций). Внешняя область соответствует такой ситуации, когда компоненты пары ядер удалены друг от друга настолько, что взаимодействие уже не может изменить их внутреннее состояние. Наоборот, во внутренней области конфигурационного пространства приходится рассматривать единую систему сильно взаимодействующих друг с другом нуклонов.

Такое разделение конфигурационного пространства на внешнюю и внутреннюю области является в значительной степени формальным, так как реально наблюдаемые сечения реакций не должны зависеть от величины „радиусов каналов“.

В этом смысле представляет большой интерес попытка Г. Фешбаха (статья I Дополнения) построить теорию ядерных реакций без введения в теорию „радиусов каналов“ и, следовательно, без разделения конфигурационного пространства на внешнюю и внутреннюю области. Однако в отличие от теории Капура и Пайерлса, и особенно от R -матричной теории, подход Г. Фешбаха, по крайней мере в настоящее время, является менее разработанным.

В целом результаты, содержащиеся в этой книге, дают весьма полное представление о достижениях и проблемах современной теории ядерных реакций при низких энергиях.

Книга может быть полезной для широкого круга физиков — студентов, аспирантов и научных работников, как изучающих ядерную физику, так и ведущих исследования свойств атомных ядер.

Перевод гл. 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13 выполнен М. Н. Николаевым; перевод гл. 3, 4, 9, 10 и Приложений, а также Дополнений — А. В. Шутько.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей книге изложены результаты теоретических исследований ядерных реакций, полученные в течение последних двадцати лет. Сначала мы дадим примерно в хронологическом порядке обзор основных достижений в этой области.

В 1937 г. Бете [1] разработал количественную теорию ядерных реакций на основе концепции составного ядра, которая незадолго до этого была предложена Н. Бором [2, 3]. В течение нескольких последующих лет были опубликованы работы Вайскопфа [4], Бете и Плачека [5] и Вайскопфа и Эвинга [6], в которых были всесторонне изучены следствия, вытекающие из предположения Бора.

Эти ранние исследования не основывались на какой-либо общей и строгой теории ядерных реакций. В каждом конкретном случае использовался свой способ описания ядерных реакций, основанный на том предположении, что реакция протекает с образованием составного ядра. В то время, когда Бор сделал предположение о механизме составного ядра, в квантовой механике не существовало такого математического аппарата, который мог бы быть использован для количественного описания этого механизма. Единственной теорией, казавшейся пригодной по своей форме для данного случая, была предложенная Вайскопфом и Вигнером [8] теория резонансного поглощения и последующего испускания оптического излучения атомными системами. Такого рода зависящая от времени теория возмущений была применена для описания ядерных реакций Брейтом и Вигнером [9—11], которые получили в результате формулу, носящую их имя. Хотя ядерные взаимодействия, конечно, *не могут* в сколько-нибудь хорошем приближении рассматриваться как возмущения, формула для сечений, полученная Брейтом и Вигнером (а позднее и Бете [1] с помощью

теории возмущений, не зависящей от времени), оказалась правильной по *форме*, т. е. по энергетической зависимости сечения. Так, например, формула Брейта — Вигнера для сечений реакции с изолированным резонансом дает очень хорошее согласие с экспериментальными сечениями. Абсурдные результаты получаются лишь при попытках интерпретации параметров (матричных элементов), найденных в результате такого сравнения формулы с экспериментальными данными.

Форма выражения для сечения оказалась правильной потому, что оно зависит лишь от того условия, что реакция идет через изолированное (т. е. долгоживущее) промежуточное состояние. Этому условию удовлетворяют как атомные процессы, описываемые теорией Вайскопфа — Вигнера, так и ядерные реакции, протекающие с образованием составного ядра. Однако, между реакциями этих двух типов имеется существенное различие. В первом случае энергия возбуждения концентрируется на отдельной частице (электроне), и большая величина времени жизни обусловлена *слабым характером* связи этой частицы с полем излучения. Во втором случае *большая интенсивность* ядерных сил приводит к распределению имеющейся энергии возбуждения между всеми частицами (нуклонами), и большое время жизни обусловлено малой вероятностью концентрации энергии таким способом, который соответствовал бы распаду через „открытый“ (т. е. энергетически возможный) канал.

Неудовлетворительное положение (использование теории возмущений) было ликвидировано, когда Капур и Пайерлс [12, 13] предложили в 1938 г. строгую теорию ядерных реакций, которая, с одной стороны, не использовала каких-либо конкретных физических предположений (таких, например, как механизм составного ядра) и, с другой стороны, не содержала сомнительных математических приближений (таких, как теория возмущений). Эта теория и ее последующие варианты, развитые другими авторами, дали весьма удовлетворительную схему описания ядерных реакций. Ее важнейшей особенностью является наличие полной системы формальных состояний (всех частиц), которая определяется в объеме с размерами порядка размеров ядра путем наложения на поверхности этого объема некоторых определенных граничных условий.

Хотя эта теория является строгой и, следовательно, способна описывать все типы механизмов реакций, она особенно

удобна для описания механизма составного ядра. В этом случае формальные состояния отождествляются с состояниями составного ядра. Чтобы исключить все механизмы реакции, отличные от механизма составного ядра, достаточно пренебречь всеми формальными состояниями, далеко отстоящими по энергии.

После появления в 1938 г. работы Капура и Пайерлса были опубликованы работы Брейта [14, 15] и Вигнера [16, 17], которые также были посвящены проблеме создания строгой теории ядерных реакций. Различные подходы к решению этой проблемы в принципе, конечно, эквивалентны друг другу, коль скоро все они являются строгими. Однако, они все же отличаются как в деталях, так и в том, на что обращается основное внимание в том или ином подходе, но не в принципиальной основе. Так, например, у Брейта в центре внимания находится формальная задача исключения из выражений для сечений некоторых параметров (радиусов взаимодействия), значения которых не могут влиять на сечения. Вигнер, напротив, специально подчеркивает наличие этих параметров в теории и использует тот факт, что каждый конкретный выбор этих параметров может иметь физический смысл, т. е., следовательно, с их помощью в теорию может быть введена физическая информация. Это относится в особенности к так называемой „R-матричной“ теории, впервые предложенной Вигнером и Айзенбудом [18, 19].

Основным достоинством предложенной Вигнером формулировки является то, что она приводит к наиболее явной зависимости всех выражений от энергии. Капур и Пайерлс, в противоположность этому, не интересовались детальной энергетической зависимостью и рассматривали полные системы состояний, определенные с помощью зависящих от энергии (и комплексных) граничных условий. Поэтому в теории Капура и Пайерлса почти все величины, входящие в выражения для сечений, оказываются явно или неявно зависящими от энергии.

Чтобы можно было воспользоваться этими формулами для сечений, энергетическую зависимость следует представить в явной форме, что означает переход к трактовке типа вигнеровской с граничными условиями, не зависящими от энергии. Например, в случае изолированного уровня резонансная энергия в формуле Капура и Пайерлса является величиной,

неявно зависящей от энергии. Эта зависимость может быть сделана явной путем перехода к граничным условиям, не зависящим от энергии. Можно показать, что получающаяся при этом энергетическая зависимость совершенно эквивалентна наличию фактора сдвига уровня, который в теории Вигнера присутствует в явном виде *с самого начала*.

Подобные соображения привели нас к выводу о необходимости основываться в настоящем обзоре на R -матричной теории Вигнера и Айзенбуда, а не на теории Капура и Пайерлса. Однако мы еще раз подчеркиваем, что обе теории являются абсолютно эквивалентными; единственным достоинством R -матричной теории является то, что она приводит к выражениям, явно зависящим от энергии.

R -матричная теория является строгой, и, следовательно, она не ограничивается описанием реакций, протекающих с образованием составного ядра; в принципе, она может быть использована для описания всех типов явлений, происходящих при ядерных реакциях. С тех пор как в 1947 г. была предложена R -матричная теория, были обнаружены новые типы явлений; оказалось, что все явления могут быть описаны в рамках этой теории. Речь идет о процессах, в которых сталкивающиеся ядра могут проникать друг в друга, *не обязательно* образуя составное ядро. Этот весьма важный факт был установлен в 1953 г. Фешбахом, Портером и Вайскопфом [20, 21], исходя из энергетической зависимости полных нейтронных сечений. До этого предполагалось, что любая попавшая в ядро частица должна неизбежно потерять свою энергию и привести к образованию составного ядра. Согласно введенной Бете терминологии, это означает, что вероятность „прилипания“ для данной частицы и ядра равна единице. Большинство ранних работ, посвященных рассмотрению ядерных реакций, основывалось на этом предположении. Оно было положено в основу работ Вайскопфа и Эвинга [4, 6], посвященных спектрам частиц, испускаемых составным ядром, и работ Фешбаха, Пизли и Вайскопфа [23] и Фешбаха и Вайскопфа [24] по полным сечениям.

Для определенности мы сохраним термин „модель“ для тех феноменологических теорий ядерных столкновений, в которых вводятся вероятности образования составного ядра. Термин „модель сильного поглощения“ охватывает все те теории, в которых вероятность столкновения без образования

составного ядра очень мала; термин „модель умеренного поглощения“ относится ко всем теориям, в которых ядра имеют заметную вероятность столкновения без образования составного ядра. R -матричная теория должна быть способной описывать *все* такого рода модели, как „сильного поглощения“ (модель „черного“ ядра), так и „умеренного поглощения“ (модель „полупрозрачного“ ядра). Согласно Томасу [25], каждая модель предполагает специальную энергетическую зависимость так называемой „силовой функции“, являющейся центральной величиной в R -матричной теории. Модель умеренного поглощения предполагает, что силовая функция осциллирует с энергией; в противоположность этому модель сильного поглощения приводит к гладкой монотонной зависимости. Недавно было показано [28, 26, 27], что вид силовой функции связан с общими динамическими свойствами ядерной материи.

Применимость модели умеренного поглощения (в противоположность модели полного поглощения) открывает возможность рассмотрения совершенно нового класса ядерных реакций, а именно „прямых“ реакций, при которых ядра проникают друг в друга без образования составного ядра и непосредственно рассеиваются одно на другом либо без изменения, либо с изменением внутренней структуры. Существование таких прямых реакций было установлено в 1950 г. Батлером [29, 30] на основании изучения угловых распределений реакций (d, p). Рыхлая структура дейтрона приводит к тому, что для этого класса реакций вероятность взаимодействия без образования составного ядра особенно велика. Позже Остерн, Батлер и Мак-Манус [31] предложили подобную же интерпретацию и для реакций (n, p). Как в одной, так и в другой трактовке считается, что прямые процессы имеют место, когда сталкивающиеся частицы только касаются друг друга, т. е. эти процессы рассматриваются как „поверхностные“ явления. Эта точка зрения, как стало ясно из работ Хаякавы, Каваи и Кикучи [32] и Брауна и Мюирхеда [33], не отражает, по-видимому, всего явления в целом [по крайней мере в случае реакций (n, p)]. Эти работы показали, что прямые реакции могут происходить не только вблизи поверхности ядра-мишени, но также и во всем его объеме. Хотя существование прямых механизмов ядерных реакций установлено совершенно достоверно, прямые механизмы объясняют, как правило, лишь небольшие доли полных сечений,

если только особые обстоятельства не увеличивают их вклад по отношению к вкладу процессов, протекающих с образованием составного ядра.

Представляет значительный интерес рассмотреть, каким образом прямые механизмы могут быть описаны в R -матричной теории, т. е. выяснить, какие специальные предположения должны быть сделаны для того, чтобы исключить механизмы других типов, такие, как, например, механизм составного ядра. Как уже указывалось выше, R -матричная теория может быть легко применена для описания механизма составного ядра. Применение этой теории для описания прямых механизмов не так очевидно. Однако недавно было показано [34, 35], каким образом и ценой каких допущений это может быть сделано.

В настоящей работе излагается лишь *теория* ядерных реакций. Многочисленные приложения этой теории для описания экспериментальных данных здесь не приводятся. Эти приложения теории читатель может найти в книге Блатта и Вайскопфа [36], в обзоре Пизли [37] и особенно в последних обзорах Кинси [38] и Барчэма [39].

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ R-МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ

Несмотря на то, что основы R-матричной теории весьма просты, ее полная формулировка требует длинных и весьма громоздких алгебраических выкладок. Поэтому, не усвоив предварительно основные идеи и определения, можно быстро запутаться в деталях и потерять главную нить рассуждений. В связи с этим в настоящей главе будет в общих чертах изложено содержание теории и даны основные определения.

§ 1. Схема формальной теории

Любая теория, предназначенная для описания ядерных реакций, протекающих с образованием составного ядра, должна быть сформулирована с помощью некоторой системы состояний, которые могут быть связаны с состояниями рассматриваемого составного ядра. R-матричная теория [18, 19] является именно такой теорией. В ней определяется система состояний всех нуклонов и сечения в конце концов могут быть выражены через эти состояния. Однако, в общей формулировке алгебраические соотношения между сечениями и волновыми функциями оказываются очень сложными, так что удобно ввести промежуточные величины — так называемую „матрицу столкновений“ и „L-, Ω - и R-матрицы“. Общая схема теории представлена на стр. 16.

Здесь $\sigma_{cc'}(E)$ определено как сечение образования пары ядер типа c' в результате реакции между парой ядер типа c , сталкивающихся друг с другом с энергией E . Элемент $U_{c'c}(E)$ матрицы столкновений U определяется как амплитуда выходящих волн пары c' , отнесенная к единичному потоку сталкивающихся пар c . Отсюда следует, что сечение $\sigma_{cc'}$ должно быть пропорциональным $|U_{c'c}|^2$.

Сечения, $\sigma_{cc'}$

Элементы $U_{c'c}$ матрицы столкновений U [U зависит от энергии E , но не зависит от параметров a_c или B_c]

„Внешнее“ взаимодействие, описываемое диагональными матрицами L и Q с диагональными элементами L_c и Q_c [L и Q зависят от энергии E и параметров a_c , но не зависят от параметров B_c]

„Внутреннее“ взаимодействие, описываемое недиагональной матрицей $R \equiv (R_{cc'})$ [R зависит от энергии E и параметров a_c и B_c]

Система состояний (которые обозначаются индексом λ), определяемая через параметры a_c и B_c и характеризующаяся собственными значениями энергии E_λ и амплитудами приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$.

Введение матрицы столкновений, связанной с сечением столь простым соотношением, конечно, не является особенностью лишь R -матричной теории, а представляет собой обычный первый шаг во всякой квантовомеханической теории реакций. Матрица столкновений U является особенно удобной величиной, потому что с помощью ее свойств, как впервые было показано Брейтом [40], могут быть очень просто выражены два весьма общих физических принципа, налагающих ограничения на всякую теорию реакций — закон сохранения потока вероятности и принцип обратимости времени; чтобы удовлетворить этим принципам, матрица столкновений U должна быть унитарной и симметричной (гл. VI).

Специфические особенности R -матричной теории проявляются на дальнейших этапах ее изложения, а именно когда матрица столкновений выражается через матрицы L , Q и R . Первые две матрицы являются диагональными и учитывают любые неполяризующие взаимодействия с большим радиусом

действия между любыми двумя разделенными ядрами. Матрица \mathbf{R} является недиагональной и учитывает эффекты всех других взаимодействий, т. е. взаимодействий, имеющих место *внутри* ядер (как внутри составного ядра, так и внутри разделенных между собой пар ядер).

Все три матрицы зависят от определенных параметров a_c , каждый из которых отвечает одному из типов пары c . Если эти параметры заданы, то матрицы \mathbf{L} и \mathbf{Q} полностью определены. Матрица \mathbf{R} остается при этом неопределенной, так как она зависит не только от E и a_c , но также и от набора параметров граничных условий B_c (каждому типу пары c соответствует один такой параметр). Если даже заданы все параметры, матрица \mathbf{R} остается, вообще говоря, все еще существенно неопределенной. Несмотря на это, Вигнер и Айзенбуд [18, 19] показали, что энергетическая зависимость элементов матрицы \mathbf{R} выражается в неожиданно простой форме:

$$R_{cc'}(E) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E},$$

где индексом λ пронумерована полная система состояний, а величины $\gamma_{\lambda c}$, $\gamma_{\lambda c'}$ и E_{λ} не зависят от энергии, но зависят от a_c и B_c . Величины $\gamma_{\lambda c}$ называются „амплитудами приведенных ширин“. Для каждого состояния λ одна величина $\gamma_{\lambda c}$ определена для каждой пары c . Величины E_{λ} представляют собой собственные значения энергии в состояниях λ .

Поскольку в \mathbf{R} -матричной теории сделано небольшое число специальных предположений, она имеет весьма большую общность. Поэтому можно думать, что простота аналитической формы элементов \mathbf{R} -матрицы является следствием некоторого третьего общего физического принципа (в дополнение к уже упомянутому закону сохранения вероятности и принципу обратимости времени). Следуя предположению, первоначально высказанному Шустером и Тиомно [41], было показано, что в специальном случае, когда может иметь место только рассеяние начальной пары, этим принципом является принцип причинности (см. гл. IV, § 8). (Грубо говоря, принцип причинности в данном случае гласит, что два ядра не могут испытать рассеяния до того, как они провзаимодействуют друг с другом.) Хотя в настоящее время еще не

существует доказательства того, что и в общем случае принцип причинности приводит к аналитичности R -матрицы, нет никаких оснований сомневаться в том, что такое доказательство может быть дано. Общая форма результатов R -матричной теории по всей вероятности определяется некоторыми общими физическими принципами, а не специальными сведениями или предположениями, содержащимися в квантовомеханическом выводе Вигнера и Айзенбуда.

Для наших целей желательно не только знать аналитическую форму R -матрицы, но и уметь интерпретировать входящие в R -матрицу параметры, такие, как $\gamma_{\lambda c}$. В выводе Вигнера — Айзенбуда эти параметры имеют смысл матричных элементов определенного типа. Это означает, что можно надеяться не только просто выразить экспериментальные сечения через параметры R -матричной теории, но также и предсказывать значения и свойства этих параметров на основе некоторой теории ядерных сил и структуры ядра. Поэтому в настоящем обзоре мы не будем основываться на общем выводе R -матрицы, исходя из принципа причинности, а используем вывод Вигнера — Айзенбуда.

§ 2. Предположения, лежащие в основе теории

В основе R -матричной теории лежат несколько весьма общих предположений.

1. *Применимость нерелятивистской квантовой механики.* Предполагается, что во всем пространстве справедливо обычное уравнение Шредингера

$$H\Psi = E\Psi,$$

где H — оператор полной энергии (сумма кинетической и потенциальной энергий). В этом уравнении должны найти свое выражение три основных физических принципа (сохранение вероятности, обратимость времени и причинность), которые уже упоминались выше. (Например, сохранение вероятности требует эрмитовости оператора потенциальной энергии в H .) Отсюда автоматически следует, что матрица столкновения должна быть унитарной, симметричной и обладать определенными аналитическими свойствами (это доказывается в гл. VII).

Пренебрежение релятивистскими эффектами в обычной R-матричной теории справедливо в той же мере, как и в случае других теорий в ядерной физике низких энергий. Это пренебрежение справедливо тогда, когда кинетические энергии нуклонов в ядре меньше нескольких процентов от их энергии покоя. R-матричная теория была распространена Герцелем [42] и на случай дираковских частиц; однако мы не будем использовать полученные им результаты.

2. *Отсутствие или несущественность всех процессов, в результате которых образуется больше двух ядер.* Это предположение вносит наибольшие ограничения. Оно означает, что теория, строго говоря, неприменима в тех случаях, когда энергия сталкивающихся частиц достаточно велика для того, чтобы образование в результате реакции трех или более ядер было энергетически возможно. Однако позже (в § 2 гл. XIII) мы увидим, что может быть дано приближенное описание многочастичного распада, если последний можно рассматривать как последовательные двухчастичные распады.

3. *Отсутствие или несущественность всех процессов, связанных с рождением или аннигиляцией частиц.* Главное, к чему приводит это предположение, состоит в том, что оно позволяет исключить из рассмотрения фотоны. В § 3 гл. XIII мы покажем, как это ограничение может быть снято путем введения взаимодействия между нуклонами и электромагнитным полем в рамках обычной теории возмущений.

4. *Существование для любой пары ядер (c) некоторого конечного расстояния a_c между ядрами пары такого, что на больших расстояниях ни одно из ядер не испытывает воздействия никаких поляризующих потенциальных полей, порожденных другим ядром.* Мы предполагаем, что на расстояниях, больших a_c , любое потенциальное взаимодействие между ядрами пары c может быть описано функцией, зависящей только от расстояния между ними. Если данное значение величины a_c удовлетворяет этому условию, то любое большее значение также будет ему удовлетворять, так что при отсутствии каких-либо дополнительных условий выбор величин a_c в значительной степени произволен. В R-матричной теории не содержится никаких подобных дополнительных условий. Для формального вывода необходимо лишь допустить, что существует набор величин a_c (любой

набор), удовлетворяющих указанному выше условию. Тогда теория может быть выражена через эти параметры. Например, матрицы L , Ω и R явно и неявно зависят от a_c .

Матрица столкновений U сама по себе не зависит от какого-либо набора формальных параметров, таких, например, какими являются параметры a_c . Поэтому матрицы L , Ω и R должны зависеть от a_c таким образом, чтобы U уже не зависела от a_c . Ясно, что сохранение такого набора произвольных формальных параметров является искусственным и неудовлетворительным. Например, чтобы проанализировать кривую сечения и определить величины $\gamma_{\lambda c}$ и E_λ , мы должны задаться набором a_c , так что любые найденные величины будут зависеть от нашего выбора. Далее, для теоретического предсказания значений величин $\gamma_{\lambda c}$ и E_λ необходимо принять тот же самый набор a_c . Таким образом, полное сравнение между теорией и экспериментом весьма сильно зависит от выбора a_c , т. е. от набора совершенно произвольных формальных параметров.

Следует подчеркнуть, что, вообще говоря, определение величин $\gamma_{\lambda c}$ и E_λ из экспериментальных данных о сечениях невозможно даже и в том случае, если задан набор величин a_c . Поскольку теория оперирует с бесконечным числом $\gamma_{\lambda c}$ и E_λ , то все эти величины никогда не могут быть определены из экспериментальных данных о сечениях, сколь бы точны они ни были. Вообще, чтобы пользоваться R -матричной теорией, необходимо априори иметь весьма обширные сведения о роли $\gamma_{\lambda c}$ и E_λ , основанные на физической картине. Поскольку $\gamma_{\lambda c}$ и E_λ зависят от a_c , эта физическая картина должна быть такой, чтобы конкретный набор a_c имел в ней определенное физическое значение. Физическая картина должна отражать ту идею, что ядерная реакция может произойти только тогда, когда плотно упакованные сталкивающиеся ядра проникнут друг в друга. Это наводит на мысль, что a_c надо выбирать равными сумме радиусов сталкивающихся ядер, которая представляет собой минимальное значение, согласующееся с предположением „4“. В дальнейшем мы всегда будем понимать под a_c именно такие минимальные значения и будем называть их „радиусами взаимодействия“.

Из того утверждения, что ядерная реакция может произойти лишь при условии, что расстояние между ядрами

меньше a_c , еще не следует, что при соблюдении этого условия реакция обязательно *должна* иметь место. Действительная ситуация лежит между следующими двумя крайними случаями.

а) При сближении двух ядер имеет место резкий переход от состояния, когда ни одно из ядер не испытывает действия каких-либо поляризующих сил, к состоянию, когда оба ядра взаимодействуют столь сильно, что полностью теряют свою индивидуальность. Если теперь a_c определить как величины, имеющие минимальные значения, удовлетворяющие предположению „4“, они с большой точностью будут равны расстоянию, на котором происходит этот резкий переход. Такая ситуация предполагается в модели „сильного поглощения“, описывающей образование составного ядра, согласно которой два ядра сливаются, как только они коснутся друг друга. Идеальный предел переходной области бесконечно малых размеров соответствует случаю, когда все реакции протекают с образованием составного ядра и возможность реакций других типов исключена (см. § 4).

б) Ядра могут свободно проникать друг в друга без заметных нарушений внутренней структуры. В этом случае расстояние a_c соответствует краю потенциального поля, которое является плавным и отклоняющим (преломляющим) по своему характеру и не приводит к сильному взаимодействию, которое необходимо для образования составного ядра. В этом случае обычно происходит простое рассеяние сталкивающихся ядер или, иногда, прямой процесс.

Если бы эта картина была верна, то все реакции представляли бы собой прямые процессы, протекающие без образования составного ядра. В действительности имеет место ситуация, промежуточная между предельными случаями „а“ и „б“. Есть основания считать, что эта ситуация гораздо ближе к случаю „а“, чем к случаю „б“, так как, хотя в некоторых специальных реакциях прямые процессы играют доминирующую роль, все же большинство реакций протекает с образованием составного ядра.

§ 3. Механизм составного ядра в R-матричной теории

Качественная картина образования составного ядра позволяет предугадать некоторые специальные свойства, которые должны быть приписаны величинам $\gamma_{\lambda c}$ и E_{λ} , чтобы

придать \mathbf{R} -матричной теории форму, удобную для описания механизма составного ядра.

Рассмотрим сначала область энергий, лежащую непосредственно над высшими связанными состояниями составного ядра, т. е. область, в которой в ядерных реакциях проявляются резонансные уровни. Большая интенсивность ядерных сил и обусловленная этим сложность и высокая плотность ядерных состояний наводят на мысль, что спектр ядерных состояний будет, в известном смысле, существовать и при энергиях выше энергии связанных состояний ядра. Для примера заключим ядро в сферу ядерных размеров и продолжим тем самым спектр связанных состояний ядра в сторону больших энергий. Рассмотрим состояние, которое нормально лежало бы выше связанных состояний. Сложность состояний ядра такова, что если мы теперь уберем сферу, то, прежде чем состояние „реализуется“ как несвязанное и распадется, пройдет довольно большой промежуток времени. Следовательно, это состояние, не будучи связанным, в значительной степени сохраняет характер связанного состояния. Единственное отличие заключается в том, что оно обладает не равной нулю шириной Γ . Это отражает тот факт, что рассматриваемое состояние распадается со средним временем жизни \hbar/Γ .

Сделанное нами определение величин a_c требует введения эффективной сферы ядерных размеров, а это означает, что мы можем сопоставить формальные параметры E_λ (собственные значения энергии, отвечающие собственным состояниям в сфере) с энергиями физически наблюдаемых квазисвязанных „резонансных“ состояний. В частности, при использовании \mathbf{R} -матричной теории для описания реакции, протекающей с участием некоторого определенного резонансного уровня, естественно опустить в суммах по λ в элементах \mathbf{R} -матрицы все члены, кроме одного. Это приводит к известной формуле для сечения для случая изолированного уровня, которая была первоначально получена Брейтом и Вигнером [9—11] на основании совершенно иной теории.

При более высоких энергиях уровни становятся шире и более тесно расположенными, в результате чего они налагаются друг на друга, образуя непрерывный спектр. Вследствие этого формула для изолированного уровня становится необоснованной и бесполезной. Вместо нее мы должны исполь-

зовать для сечения формулу, учитывающую большое число уровней, и пытаться усреднить сечение по этим уровням. Томас [25], следуя более раннему рассмотрению Бете [1], показал, что такое усреднение возможно, если принять, что знаки (вещественных) величин $\gamma_{\lambda c}$ (амплитуд приведенных ширин) распределены по закону случая (см. гл. XI, § 2). Распределение знаков $\gamma_{\lambda c}$ становится тем ближе к хаотическому, чем больше вероятность образования составного ядра. Можно надеяться, что хаотичность в распределении знаков становится полной в предельном случае „бесконечно сильного поглощения“, когда предполагается, что всякое взаимодействие между двумя ядрами немедленно ведет и к их слиянию в составное ядро. В этом предположении формула для многих уровней может быть усреднена, что приводит к ожидаемым выражениям для сечения образования составного ядра в области непрерывного спектра.

Как показано в § 6 гл. XI, в реальных ядрах указанный выше предельный случай никогда не осуществляется, так что в действительности знаки $\gamma_{\lambda c}$ распределены не совсем хаотически. В частности, возможна слабая корреляция в знаках амплитуд приведенных ширин для уровней, разделенных большим энергетическим интервалом. Тем не менее распределение знаков $\gamma_{\lambda c}$ является достаточно близким к хаотическому, и усреднение формулы для многих уровней является хорошим приближением.

§ 4. Механизмы прямых процессов в \mathbf{R} -матричной теории

При экспериментальном изучении ядерных реакций было обнаружено несколько типов прямых процессов. Оказалось, однако, что основная часть сечений наблюдаемых ядерных реакций объясняется механизмом составного ядра. Иные механизмы реакции могут оказаться преобладающими лишь для некоторых из наблюдаемых продуктов реакции. Экспериментально наблюдался ряд подобных реакций, в которых вклад прямых механизмов реакции конкурировал с вкладом, обусловленным механизмом составного ядра. Вклады этих механизмов обычно некогерентны с вкладом механизма составного ядра, и считается, что происхождение этих вкладов, по крайней мере качественно, может быть выяснено.

Можно указать следующие четыре основных типа таких реакций.

1. *Реакции с перераспределением нуклонов, приводящие к образованию конечных ядер в отдельных низколежащих состояниях.* Вклады прямых процессов были обнаружены в реакциях (N^{14} , N^{13}) [43], (α , p) и (p , α) [44, 45], (p , t) и (p , He^3) [46, 45] и других, но особенно сильно эти процессы проявляются в реакциях с дейтронами, например в реакциях (d , p) [29, 30] и (p , d). Тот факт, что реакции с участием дейтронов особенно обязаны этим процессам, дает ключ к пониманию природы последних. Дело в том, что поверхность ядра является размытой; в случае же такого „рыхлого“ ядра, как дейтрон, эта размытость особенно велика. Благодаря этому создается заметная вероятность „частичного“ взаимодействия между дейтроном и ядром-мишенью, при котором взаимодействует только нейтрон с ядром. В результате такой реакции „срыва“ („стриппинга“) протон может освобождаться без взаимодействия с ядром-мишенью. Изучение отдельных групп протонов, образующихся в результате облучения дейтронами [29, 30], показывает, что этот тип механизма взаимодействия может полностью доминировать над другими механизмами. К реакции срыва могут привести только те дейтроны, которые касаются края ядра-мишени. Дейтроны же с меньшими параметрами удара, испытывающие лобовые соударения с ядром-мишенью, будут, как обычно, образовывать составное ядро. Следовательно, вклад реакций срыва в полное сечение реакции с дейтронами будет мал (за исключением случая низких энергий, когда лобовые соударения невозможны вследствие кулоновского отталкивания, или случая легких ядер, когда ядро-мишень имеет малые размеры).

2. *Неупругое и зарядово-обменное рассеяние, приводящее к образованию отдельных низколежащих состояний.* Имеются указания на то, что прямые процессы дают вклад в реакции (n , p) [47], (p , p') [48, 49], (d , d') [50] и (α , α') [51]. Эти вклады проявляются особенно отчетливо при высоких энергиях бомбардирующих частиц, когда конкуренция со стороны механизма составного ядра уменьшается. Частично эти процессы обусловлены размытостью поверхности ядра. Падающая частица, касаясь края ядра-мишени, может взаимодействовать с отдельным находящимся на поверхности нукло-

ном. Это может привести к обмену энергией и неупругому рассеянию. Другой источник прямого неупругого рассеяния связан с возможностью взаимного проникновения ядер без образования составного ядра. Эта возможность особенно вероятна при бомбардировке нуклонами [33—35]. Как следует из модели „умеренного поглощения“ [20, 21], нуклон может иногда достаточно глубоко проникать вглубь ядра, не теряя при этом свою энергию и не образуя составного ядра. В конце концов он может провзаимодействовать с отдельным нуклоном ядра и потерять энергию, но, тем не менее, останется еще конечная вероятность того, что один из этих двух нуклонов достигнет поверхности ядра без дальнейших потерь энергии. Указанная возможность означает, что прямой механизм неупругого рассеяния действителен не только на поверхности, но и во всем объеме ядра. Хотя низколежащие состояния ядра легче возникают при прямом взаимодействии, в случае возбуждения всех более высоких состояний доминирующую роль играет, как правило, механизм составного ядра, который и обуславливает большинство процессов.

3. *Возбуждение коллективных состояний (главным образом вращательных) при неупругом рассеянии.* Этот тип процессов не был еще обнаружен экспериментально¹⁾. Однако имеются веские теоретические предсказания таких процессов [52—56]. Процессы указанного типа могут, в частности, проявляться тогда, когда ядро-мишень является заметно несферичным и обладает спектром вращательных состояний. Бомбардирующая частица может взаимодействовать только лишь с поверхностью ядра-мишени и привести его во вращение, не образуя составного ядра. С некоторой точки зрения такие процессы более естественно рассматривать как часть собственно-упругого (shape-elastic) рассеяния, так как оно не приводит к каким-либо изменениям внутреннего состояния ядра.

4. *Неупругое рассеяние заряженных частиц, приводящее к образованию отдельных возбужденных состояний ядра-мишени.* Когда бомбардирующие частицы заряжены, предположение „4“ § 2 всегда, строго говоря, нарушается. Представление кулоновского потенциала взаимодействия между

¹⁾ В настоящее время имеются экспериментальные данные о подобных процессах. — *Прим. ред.*

протонами в ядре-мишени и в падающей частице в виде одного члена $Z_1 Z_2 e^2 / r_c$ является приближенным. Имеются дополнительные члены, которые, хотя они и малы, могут обуславливать неупругое рассеяние. Такое рассеяние кулоновским полем называется „кулоновским возбуждением“. Это рассеяние хорошо изучено теоретически [57] и его существование полностью подтверждено экспериментально. Ясно, что отношение сечения кулоновского возбуждения данного уровня к сечению возбуждения этого уровня посредством механизма составного ядра может быть увеличено до любой желаемой величины путем уменьшения энергии бомбардирующей частицы на достаточную величину ниже кулоновского барьера. При этих низких энергиях вероятность образования составного ядра чрезвычайно мала, так как почти ни одна падающая частица не проникает через барьер и не достигает ядра-мишени. Поскольку процесс кулоновского возбуждения не требует близких столкновений, на него не так сильно влияет уменьшение энергии. В отличие от трех других упомянутых выше процессов, этому процессу при достаточно низких энергиях всегда будет обязана значительная доля полного сечения реакции. Тем не менее кулоновское возбуждение вообще весьма слабо влияет на сечения реакций, отличных от неупругого рассеяния заряженных частиц. Однако имеются случаи, когда наличие эффекта кулоновского возбуждения (реального или виртуального) является причиной других типов реакций. Например, недавно было показано [58], что реакция $N^{14}(N^{14}, N^{13})N^{15}$ обусловлена виртуальным кулоновским возбуждением, которое происходит перед тем, как в игру вступает собственно ядерное взаимодействие.

Тот факт, что механизм кулоновского возбуждения исключается из рассмотрения в связи с предположением „4“ § 2, требующим выбора конечных величин a_c , выделяет этот механизм из остальных трех, которые могут быть согласованы с этим предположением путем выбора достаточно больших значений a_c . Так как R -матричная теория является точной, если предположение „4“ удовлетворяется, то механизмы „1“, „2“ и „3“ могут быть описаны с помощью этой теории. Однако, хотя эта теория способна описывать большинство механизмов ядерных реакций, применение ее для описания механизма составного ядра наиболее просто. Это следует из того факта, что в теории фигурирует набор

состояний всех частиц, которые естественным образом сопоставляются с промежуточными состояниями в механизме составного ядра. Совсем не так легко понять, как можно приспособить \mathbf{R} -матричную теорию для описания прямых процессов. Тем не менее, как было показано Блохом [34, 35] (и подробно описано в § 6 гл. XI), это оказывается возможным. При этом существенным оказался тот факт, что единственным фактором в \mathbf{R} -матричной теории, который мог бы соответствовать механизмам прямых процессов, являются суммы по далеко отстоящим уровням. При использовании \mathbf{R} -матричной теории для описания механизма составного ядра такие суммы обращаются в нуль в результате предположения о случайном распределении знаков амплитуд приведенных ширин. Эта аппроксимация исключает механизмы прямых процессов. Следовательно, для описания этих механизмов нельзя пользоваться приближением случайного распределения знаков, а следует выполнить суммирование по далеко отстоящим уровням, пользуясь соотношениями полноты (см. § 6 гл. XI).

Глава III

ЯДЕРНОЕ КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО И ТИПЫ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Теперь мы изложим основы **R**-матричной теории. Сначала мы обсудим некоторые концепции и определения и введем понятие ядерного конфигурационного пространства. Затем мы опишем различные типы волновых функций, которые нам могут встретиться.

Теория ядерных реакций, подобно любой другой современной теории в физике, сильно страдает от разнобоя в обозначениях. Это обстоятельство выступает особенно ярко, если мы сравним статьи Вигнера и сотрудников [16—19] с книгой Блатта и Вайскопфа [36]. (Например, символ γ^2 в статьях Вигнера и др. обозначает приведенную ширину, а в книге Блатта и Вайскопфа — корень квадратный из той же самой величины!) Мы будем следовать по возможности обозначениям Вигнера, лишь иногда допуская небольшие изменения. Так, например, наша приведенная ширина γ^2 равна приведенной ширине Вигнера, деленной на расстояние a_c . Такое изменение в размерности представляется нам необходимым для того, чтобы величина γ^2 оправдывала свое название „ширины“ (т. е. для придания величине γ^2 размерности энергии вместо вызывающей путаницу размерности энергии, умноженной на длину).

§ 1. Определения и обозначения

Основными понятиями **R**-матричной теории ядерных систем являются, в частности, понятия а) полной системы, разделенной на всевозможные пары ядер (иногда эти пары называются „альтернативами“), и б) соответствующих радиусов взаимодействия a_c . Именно эти понятия и их интерпретацию в ядерном конфигурационном пространстве мы и рассмотрим теперь.

Разделенные пары (или „альтернативы“) s . До сих пор символ s был определен у нас в слишком общем смысле, т. е. как индекс пары ядер. Теперь мы уточним, на какие характеристики данной пары ядер этот символ s указывает. Рассмотрим полную систему из A нуклонов, разделенную на две группы, каждая из которых содержит A_1 и A_2 нуклонов соответственно. Если эти группы представляют собой связанные образования, то они будут ядрами в определенных квантовых состояниях, скажем α_1 и α_2 , соответственно со спинами I_1 и I_2 , компоненты которых в некотором заданном направлении равны i_1 и i_2 . Мы могли бы характеризовать пару ядер, в том числе и их спиновые ориентации, набором величин $\{\alpha(I_1 I_2) i_1 i_2\}$, где вместо индексов α_1 и α_2 написан заменяющий их индекс α . Однако на практике удобно пользоваться другим представлением. Вместо величин i_1 и i_2 мы введем так называемый „спин канала“ s и его компоненту ν , так что в новом представлении состояние будет характеризоваться набором величин $\{\alpha(I_1 I_2) s \nu\}$. Спин канала s образуется путем сложения спинов I_1 и I_2 ($s = I_1 + I_2$) и может принимать значения между $|I_1 - I_2|$ и $|I_1 + I_2|$.

В определении символа s удобно ввести не только характеристики отдельно каждого ядра из заданной пары в этом представлении, но и характеристики относительного движения этих ядер. Для описания относительного движения мы имеем, как и во всякой теории ядерных реакций, две возможности. Одна заключается в использовании представления, в котором состояния представляются плоскими волнами, каждая из которых распространяется в определенном направлении (характеризующимся обычно волновым вектором \mathbf{k}). Плоская волна содержит все моменты импульса относительного движения. Это представление оказывается поэтому более удобным для случая высоких энергий падающих частиц, когда в реакциях, в которых затрагивается лишь небольшой интервал углов вокруг направления падающего пучка, играет роль большое число парциальных волн, отвечающих определенным моментам импульса относительного движения. Другая возможность заключается в использовании представления, в котором состояние имеет определенный момент импульса относительного движения l (с компонентой m), но охватывает весь интервал углов. Это представление является удобным обычно при более низких энергиях падающих частиц, когда в сечение реакции

дает вклад лишь небольшое число моментов количества движения. Таким образом, оно более удобно для исследования реакций, идущих с образованием составного ядра. Мы будем использовать именно это представление, так что символ s будет означать полный набор величин $\{\alpha(I_1 I_2) s \nu l m\}$.

В отдельных случаях может оказаться полезным небольшое изменение этого представления, заключающееся в том, что из спина канала s и орбитального момента относительного движения l получается „полный спин“ $\mathbf{J} = \mathbf{s} + \mathbf{l}$ и его проекция M . В этом случае символ s означает набор $\{\alpha(I_1 I_2) s l, JM\}$.

Радиусы взаимодействия. Для данной пары ядер s „радиус взаимодействия“ a_c есть то минимальное расстояние между ядрами пары, на котором указанные ядра еще не влияют друг на друга посредством каких-либо поляризующих сил. Поскольку это определение подразумевает зависимость только от α , но не от $(s \nu l m)$, то вместо величины a_c можно писать величину a_α , как мы иногда и будем делать. Многими авторами было высказано предположение, что величина a_α имеет простую зависимость от массовых чисел A_1 и A_2 . Обычно используется соотношение

$$a_\alpha = r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}), \quad (1.1)$$

где величина r_0 не зависит от A_1 и A_2 и имеет численное значение в пределах между $1,40 \cdot 10^{-13}$ и $1,50 \cdot 10^{-13}$ см.

Конфигурационное пространство и каналы. Полезно ввести понятие конфигурационного пространства всех A нуклонов. Так как каждая частица имеет три пространственные степени свободы, то это пространство будет пространством $3A$ измерений. Если же мы учтем еще две степени свободы каждого нуклона, связанные с его внутренним спином, то мы получим пространство уже $6A$ измерений. В этом пространстве имеется область, названная Вигнером и Айзенбудом „внутренней областью“, которой в физическом пространстве соответствует ситуация, когда все нуклоны находятся в объеме ядерных размеров. Другие области, названные Брейтом [40] „каналами“, соответствуют ситуации, при которой нуклоны, разделенные на две группы из A_1 и A_2 частиц, расположены в физическом пространстве на расстоянии $r > a_\alpha$ друг от друга. Все оставшееся конфигурационное пространство соот-

ветствует ситуациям в физическом пространстве, которые осуществляются с пренебрежимо малой вероятностью. Канал, отвечающий некоторому заданному разбиению $A = (A_1, A_2)$, отделяется от других каналов именно такими областями. Это означает, что пара ядер одного канала не может превратиться каким-либо прямым путем в другую пару (соответствующую другому каналу). Такое превращение может произойти лишь косвенным путем посредством перехода через внутреннюю область. Эта внутренняя область ограничивается „поверхностями канала“ $r_\alpha = a_\alpha$, где r_α — расстояние между ядрами пары α .

Пока мы определили понятие канала только для различных разбиений (A_1, A_2) полного числа нуклонов. Данному же разбиению (A_1, A_2) вообще соответствует множество пар s , каналы которых занимают в конфигурационном пространстве одну и ту же область. Например, все те пары s , которые содержат в себе пару ядер с одинаковым значением α , но с различными значениями квантовых чисел (l, m) , в конфигурационном пространстве соответствуют одному и тому же каналу. Более того, все пары s , отвечающие различным внутренним возбужденным состоянием двух ядер данного разбиения (A_1, A_2) , также соответствуют одному и тому же каналу. Тем не менее не возникнет никаких противоречий и парадоксов, если мы будем говорить, что *любая* данная пара s имеет свой собственный канал, неперекрывающийся с другими каналами. В конечном счете это связано с тем обстоятельством, что когда обе компоненты пары s находятся во внешней области, то они не могут влиять друг на друга. Другими словами, волновые функции различных пар не могут перекрываться друг с другом, поскольку, в соответствии с определением радиусов взаимодействия, во внешней области нет сил, которые могли бы вызвать такое перекрывание.

Однако не только различные пары занимают в конфигурационном пространстве один и тот же канал, но и, наоборот, в конфигурационном пространстве существует несколько каналов, отвечающих одной и той же паре s . По крайней мере дело обстоит именно так, когда мы в данной паре не делаем никакого различия между нуклонами. Если в паре s одна группа содержит A_1 нуклонов, среди которых имеется N_1 нейтронов и Z_1 протонов, а другая группа содержит A_2 нуклонов, среди которых имеется N_2 нейтронов и Z_2 протонов,

то в конфигурационном пространстве паре c соответствует $C_N^{N_1} \cdot C_Z^{Z_1}$ каналов, где N и Z — полные числа нейтронов и протонов соответственно

$$(N_1 + N_2 = N, \quad Z_1 + Z_2 = Z, \quad N + Z = A).$$

Неразличимость нуклонов, являющихся фермионами, приводит к необходимости антисимметризовать все волновые функции. Благодаря этому обстоятельству становится желательным *не делать различия* между отдельными нуклонами, когда мы говорим о канале пары c . Поэтому в дальнейшем, когда мы будем говорить о „канале пары c “, мы неявно будем иметь в виду сумму по всем $C_N^{N_1} \cdot C_Z^{Z_1}$ каналам в конфигурационном пространстве:

Поверхность канала \mathcal{S}_c . Внутренняя и внешняя области конфигурационного пространства отделены друг от друга совокупностью поверхностей каналов $r_a = a_a$. Эти поверхности перекрываются, однако области перекрытия соответствуют физическим ситуациям, которые осуществляются с пренебрежимо малой вероятностью. Рассмотрим, например, две поверхности, соответствующие разбиениям полной системы на нейтрон и остаточное ядро и на протон и остаточное ядро. Область перекрытия между этими поверхностями соответствует такой физической ситуации, при которой нейтрон и протон отделены от остальной системы. Такая ситуация оказывается весьма маловероятной, если полная энергия системы не допускает реального разделения такого типа или если по каким-либо другим причинам трехчастичные процессы оказываются несущественными. Все это обеспечивается предположением „2“.

Мы обозначаем символом \mathcal{S}_c поверхность канала пары c . Все каналы (а следовательно, и все \mathcal{S}_c) различных пар c , возникающих из данного разбиения (A_1, A_2) , фактически совпадают, но мы можем, не впадая в противоречие, эти каналы (и \mathcal{S}_c) считать различными. Совокупность всех поверхностей мы обозначим через

$$\mathcal{S} = \sum_c \mathcal{S}_c.$$

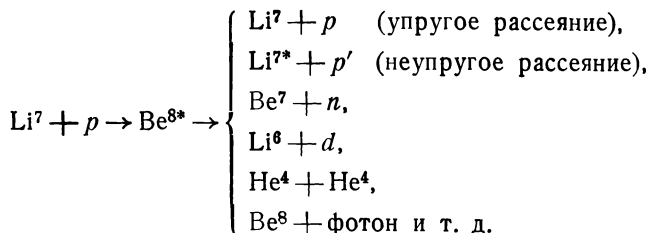
Сакс [59] предложил рассматривать поверхность \mathcal{S} как многогранник, каждая грань (гиперповерхность) которого соответствует входу канала; каналы же представляют собой цилиндры,

расположенные перпендикулярно этим граням. Элемент поверхности \mathfrak{S}_c равен

$$d\mathfrak{S}_c = a_\alpha^2 d\Omega_c dq_\alpha, \quad (1.2)$$

где $d\Omega_c$ — элемент телесного угла вокруг линии, соединяющей обе компоненты пары c , а q_α представляет собой внутренние координаты пары α . Удобно не делать различия между отдельными нуклонами данной пары c , так что поверхность \mathfrak{S}_c в действительности оказывается суммой $C_{N_1}^{N_1} \cdot C_Z^Z$ поверхностей каналов.

Рассмотрим в качестве примера, иллюстрирующего изложенное, ядерные реакции, имеющие место при взаимодействии ядра Li^7 с протонами:



Исходной паре $\text{Li}^7 + p$ соответствует несколько каналов c . Поскольку спин (I_1) ядра Li^7 равен $3/2$, а спин протона (I_2) равен $1/2$, то спин канала s может быть равен 1 или 2. За исключением случая очень низких энергий, в сечение реакции могут дать вклад несколько входящих парциальных волн (отвечающих квантовому числу l орбитального момента), связанных с падающей плоской волной. Таким образом, эта реакция инициируется падающими волнами в *нескольких* каналах c . Когда расстояние между компонентами пар становится в этих каналах меньше a_α , то протон оказывается внутри ядра Li^7 . Эта „внутренняя область“ конфигурационного пространства соответствует составному ядру Be^{8*} . Распад составного ядра Be^{8*} вызывает появление выходящих волн во всех каналах, где энергия относительного движения положительна. Например, если энергетически возможен распад на $\text{Be}^7 + n$, то расходящиеся волны будут в тех каналах, которые могут дать эту пару. (Так как имеется четыре нейтрона, которые могут быть испущены, то каждый из этих каналов будет

в действительности представлять собой сумму четырех каналов, по одному для каждого нейтрона.)

Наконец, введем еще следующие характеристики каналов:

$E_c \equiv E_\alpha$ — энергия относительного движения частиц пары c ;

$M_c \equiv M_\alpha = \frac{M_{\alpha_1} M_{\alpha_2}}{M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2}}$ — приведенная масса;

$k_c \equiv k_\alpha = \left(\frac{2M_\alpha |E_\alpha|}{\hbar^2} \right)^{1/2}$ — волновое число;

$v_c \equiv v_\alpha = \frac{\hbar k_\alpha}{M_\alpha}$ — относительная скорость;

$\eta_c \equiv \eta_{\alpha l} = \frac{Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} e^2}{\hbar v_\alpha}$ — параметр кулоновского поля;

$\sigma_c \equiv \sigma_{\alpha l} = \arg \Gamma(1 + l_c + i\eta_c)$ — кулоновский сдвиг фазы;

$\rho_c \equiv \rho_\alpha = k_\alpha r_\alpha$.

Величины M_{α_1} , Z_{α_1} и M_{α_2} , Z_{α_2} представляют собой соответственно массы и заряды двух частиц пары α . Иногда, когда не может возникнуть двусмысленности, эти величины будут обозначаться как M_1 , Z_1 , M_2 и Z_2 . Величины E_α положительны для тех каналов, через которые распад энергетически возможен, и отрицательны для каналов, распад через которые энергетически запрещен; каналы последнего типа можно также называть „каналами с отрицательной энергией“, или „виртуальными каналами“.

§ 2. Волновые функции во внешней области

Предполагается, что волновая функция заданной полной системы удовлетворяет во всем конфигурационном пространстве уравнению Шредингера

$$H\Psi = E\Psi,$$

где E — полная энергия, а оператор Гамильтона H равен сумме операторов кинетической и потенциальной энергий ($H = T + V$).

Оператор кинетической энергии T имеет вид

$$- \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_{X_i}^2,$$

где m_i — масса i -й частицы и

$$\nabla_{X_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right).$$

Величина $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i, z_i)$ представляет собой радиус-вектор i -й частицы относительно произвольно фиксированного начала координат. Для любой системы, состоящей из A частиц, в выражении для оператора кинетической энергии можно выделить часть, зависящую от координат центра тяжести $\left[\mathbf{R} = \left(\sum_i m_i \right)^{-1} \sum_i m_i \mathbf{X}_i \right]$, если произвести ортогональное преобразование $(\mathbf{X}_i) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{q}_i)$, где \mathbf{q}_i представляет собой набор $(3A - 3)$ внутренних координат, зависящих только от положения частиц относительно друг друга. (Требование, чтобы преобразование было ортогональным, накладывает на выбор координат \mathbf{q}_i , которые нас и интересуют, одно-единственное ограничение.) В результате этого преобразования оператор T принимает вид

$$T = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + T_{\text{внутр.}},$$

где первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию движения центра тяжести (M — полная масса, равная $\sum_i m_i$), а второе слагаемое является кинетической энергией внутреннего движения. Второе слагаемое имеет вид

$$\sum_i c_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2},$$

где c_i — коэффициенты, определяющиеся ортогональным преобразованием. Производя такого рода преобразование отдельно над каждым из операторов кинетической энергии подсистем α_1 и α_2 пары α , получаем

$$T = T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} = -\frac{\hbar^2}{2M_{\alpha_1}} \nabla_{\mathbf{R}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2M_{\alpha_2}} \nabla_{\mathbf{R}_2}^2 + \\ + (T_{\text{внутр.}})_{\alpha_1} + (T_{\text{внутр.}})_{\alpha_2},$$

где \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 представляют собой радиус-векторы центра тяжести подсистем α_1 и α_2 . Для того чтобы получить окончательную форму оператора T , удобную для рассмотрения канала, соответствующего паре α , необходимо произвести

второе преобразование: нужно перейти от радиус-векторов $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ к радиус-вектору центра тяжести всей системы \mathbf{R} и относительному радиус-вектору \mathbf{r}_α подсистем α_1 и α_2 :

$$\mathbf{R} = \frac{M_{\alpha_1} \mathbf{R}_1 + M_{\alpha_2} \mathbf{R}_2}{M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2}},$$

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1.$$

Это преобразование приводит нас к следующему выражению для оператора кинетической энергии:

$$T = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2M_\alpha} \nabla_{\mathbf{r}_\alpha}^2 + (T_{\text{внутр.}})_{\alpha_1} + (T_{\text{внутр.}})_{\alpha_2}.$$

Из определения внешней области и каналов следует, что в канале c потенциальную энергию V можно записать в виде $V = (V_{\text{внутр.}})_{\alpha_1} + (V_{\text{внутр.}})_{\alpha_2} + V_c(r_\alpha)$, где последний член складывается из кулоновского потенциала и из других дальнедействующих потенциалов взаимодействия между подсистемами α_1 и α_2 . Таким образом, можно предположить, что в заданном канале c гамильтониан представляет собой сумму четырех слагаемых:

$$H = H_0 + H_c + H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2},$$

где

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2,$$

$$H_c = -\frac{\hbar^2}{2M_\alpha} \nabla_{\mathbf{r}_\alpha}^2 + V_c(\mathbf{r}_\alpha),$$

$$H_{\alpha_1} = (T_{\text{внутр.}})_{\alpha_1} + (V_{\text{внутр.}})_{\alpha_1},$$

$$H_{\alpha_2} = (T_{\text{внутр.}})_{\alpha_2} + (V_{\text{внутр.}})_{\alpha_2}.$$

Соответственно волновая функция Ψ в канале c может быть взята в виде произведения четырех сомножителей:

$$\Psi = \Phi(\mathbf{R}) \chi(\mathbf{r}_\alpha) \psi_{\alpha_1}(q_{\alpha_1}) \psi_{\alpha_2}(q_{\alpha_2}),$$

где

$$H_0 \Phi = \epsilon \Phi, \quad H_c \chi = \mathcal{E} \chi,$$

$$H_{\alpha_1} \psi_{\alpha_1} = E_{\alpha_1} \psi_{\alpha_1}, \quad H_{\alpha_2} \psi_{\alpha_2} = E_{\alpha_2} \psi_{\alpha_2}.$$

Волновые функции Φ , χ , ψ_{α_1} и ψ_{α_2} описывают соответственно движение центра тяжести, относительное движение подсистем α_1 и α_2 и внутренние состояния тех же подсистем. Ве-

личины ϵ , \mathcal{E} , E_{α_1} и E_{α_2} представляют собой соответствующие энергии указанных движений.

В дальнейшем нам не придется рассматривать движение центра тяжести в явном виде. Для удобства мы будем предполагать, что центр тяжести покоится, так что $\epsilon = 0$. В этом случае полная энергия в заданном канале представляется в виде суммы только трех слагаемых:

$$E = \mathcal{E} + E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению волновых функций, описывающих внутренние состояния („волновых функций спина канала“), и волновых функций относительного движения.

а. Волновые функции спина канала

Потенциал $V_c(r_\alpha)$ не зависит от относительной ориентации спинов I_1 и I_2 подсистем α_1 и α_2 , так что по проекциям этих спинов имеется вырождение. По этой причине мы можем в качестве основного набора волновых функций канала Ψ взять совокупность *линейных комбинаций произведений* (а не просто совокупность произведений) волновых функций, описывающих внутренние состояния подсистем α_1 и α_2 . Мы выберем эти линейные комбинации так, чтобы каждая волновая функция Ψ имела в качестве квантового числа заданное значение спина канала s . Более точно, волновая функция спина канала $\psi_{\alpha s \nu}$, соответствующая паре α , конструируется с помощью векторного сложения (нормированных) волновых функций подсистем α_1 и α_2 :

$$\psi_{\alpha s \nu} = \sum_{i_1 + i_2 = \nu} (I_1 I_2 i_1 i_2 | s \nu) \psi_{\alpha_1 I_1 i_1} \psi_{\alpha_2 I_2 i_2}. \quad (2.1)$$

Коэффициенты $(I_1 I_2 i_1 i_2 | s \nu)$ являются элементами матрицы ортогонального преобразования от схемы $(I_1 i_1, I_2 i_2)$ к схеме $(I_1 I_2, s \nu)$; они называются „коэффициентами векторного сложения“ (см., например, [60]).

Волновые функции спина канала являются ортонормированными:

$$\int \psi_{\alpha s \nu}^* \psi_{\alpha' s' \nu'} d\mathcal{S} = 4\pi a_\alpha^2 \delta_{\alpha s \nu, \alpha' s' \nu'}, \quad (2.2)$$

где

$$\delta_{\alpha s \nu, \alpha' s' \nu'} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'} \delta_{\nu\nu'}.$$

В соотношении (2.2) интеграл берется по совокупности поверхностей каналов

$$\mathfrak{S} = \sum_c \mathfrak{S}_c.$$

Ортонормированность по отношению к индексам s и ν является следствием свойства унитарности коэффициентов векторного сложения. Когда индексы α и α' соответствуют двум разным разбиениям полной системы, ортонормированность по отношению к индексам α является следствием отсутствия пространственного перекрытия функций ψ . Когда же индексы α и α' соответствуют различным возбужденным состояниям одной и той же пары, ортонормированность является следствием обычной ортонормированности связанных состояний заданной системы. Рассматриваемые нами функции являются вещественными в том смысле, что они при обращении времени ведут себя следующим образом:

$$K\psi(s\nu) = (-1)^{s-\nu} \psi(s-\nu). \quad (2.3)$$

В соотношении (2.3) мы временно записали функцию $\psi_{\alpha s \nu}$ в виде $\psi(s\nu)$. Оператор K есть оператор обращения времени [60]. Свойство, описываемое соотношением (2.3), следует из (2.1), если функции $\psi(I_1 i_1)$ и $\psi(I_2 i_2)$ сами обладают этим же свойством. Действительно,

$$\begin{aligned} K\psi(s\nu) &= \sum_{i_1 i_2} (I_1 I_2 i_1 i_2 | s\nu) K\psi(I_1 i_1) K\psi(I_2 i_2) = \\ &= \sum_{i_1 i_2} (I_1 I_2 i_1 i_2 | s\nu) (-1)^{I_1 - i_1 + I_2 - i_2} \psi(I_1 - i_1) \psi(I_2 - i_2) = \\ &= \sum_{i_1 i_2} (I_1 I_2 - i_1 - i_2 | s-\nu) (-1)^{-s+\nu} \psi(I_1 - i_1) \psi(I_2 - i_2) = \\ &= (-1)^{s-\nu} \psi(s-\nu). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Третье равенство является следствием одного из свойств симметрии коэффициентов векторного сложения, а четвертое следует из (2.1) и из того факта, что $s-\nu$ всегда является целым числом. Как впервые показал Вигнер [61], действие оператора K означает переход к комплексно-сопряженной величине и умножение на спиновые операторы $-\iota\sigma_y$ всех элементарных частиц ядра. Более детальное исследование свойств оператора K и интерпретацию результатов действия этого

оператора на волновые функции читатель найдет в работах [61, 18, 19, 59]. Соотношение (2.3) использовалось Биденхарном и Роузом [62].

б. Волновые функции относительного движения

Волновая функция относительного движения имеет вид

$$\chi \sim r_\alpha^{-1} u_{\alpha sl}(r_\alpha) (i^l Y_m^{(l)}(\Omega_\alpha)), \quad (2.5)$$

где r_α и Ω_α означают длину и направление вектора, проведенного от частицы 1 к частице 2. Функции $Y_m^{(l)}$ представляют собой обычные нормированные сферические гармоники (см. Кондон и Шортли [60]), удовлетворяющие соотношению

$$Y_m^{(l)*} = (-1)^m Y_{-m}^{(l)}. \quad (2.6)$$

Как указал Хьюби [63], удобнее иметь дело со сферическими гармониками, умноженными на добавочный множитель i^l , поскольку такие функции удовлетворяют соотношению типа (2.3), именно

$$K(i^l Y_m^{(l)}) = (-1)^{l-m} (i^l Y_{-m}^{(l)}), \quad (2.7)$$

и поскольку множители i^l , появляющиеся в разложении плоской волны, могут быть присоединены к сферическим гармоникам (это приводит к упрощению формул). Радиальные части волновой функции $u_{\alpha sl}(r_\alpha)$ являются решениями радиального уравнения Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr_\alpha^2} - \frac{l(l+1)}{r_\alpha^2} - \frac{2M_\alpha}{\hbar^2} (V_{\alpha sl} - E_\alpha) \right] u_{\alpha sl}(r_\alpha) = 0. \quad (2.8)$$

Сначала рассмотрим только кулоновское взаимодействие $V_{\alpha sl} = Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} e^2 / r_\alpha$ во внешней области. В этом случае уравнение (2.8) удобно представить в безразмерной форме

$$u''_{\alpha l}(\rho_\alpha) - [l(l+1)\rho_\alpha^{-2} + 2\eta_\alpha \rho_\alpha^{-1} \mp 1] u_{\alpha l}(\rho_\alpha) = 0, \quad (2.9)$$

где штрихи при u означают дифференцирование по ρ_α ; верхний знак относится к каналам с положительной энергией, а нижний — к каналам с отрицательной энергией.

Для каналов с положительной энергией двумя линейно независимыми решениями уравнения (2.9), которые наиболее

естественным путем входят в теоретическое рассмотрение, являются решения, отвечающие входящей и выходящей волнам. Удобно иметь дело с решениями, асимптотическая форма которых при больших ρ_α имеет вид

$$I_c^+ \equiv I_{\alpha l}^+ \sim \exp \left[-i \left(\rho_\alpha - \eta_\alpha \ln 2\rho_\alpha - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_{\alpha 0} \right) \right], \quad (2.10a)$$

$$O_c^+ \equiv O_{\alpha l}^+ \sim \exp \left[i \left(\rho_\alpha - \eta_\alpha \ln 2\rho_\alpha - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_{\alpha 0} \right) \right], \quad (2.10b)$$

где I отвечает *входящей волне*, O — *выходящей волне*, а значок „+“ указывает на положительность энергии. Эти решения, очевидно, являются комплексно-сопряженными друг другу. Для расчетов более удобно иметь формулы, в которые входят два вещественных, линейно независимых решения. Обычно используются те решения, которые являются *регулярными* (F) и *сингулярными* (G) в начале координат и асимптотическая форма которых при больших ρ_α может быть записана следующим образом:

$$F_c \equiv F_{\alpha l} \sim \sin \left(\rho_\alpha - \eta_\alpha \ln 2\rho_\alpha - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_{\alpha l} \right), \quad (2.11a)$$

$$G_c \equiv G_{\alpha l} \sim \cos \left(\rho_\alpha - \eta_\alpha \ln 2\rho_\alpha - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_{\alpha l} \right). \quad (2.11b)$$

Вронскиан для этой пары решений есть

$$F'_c G_c - G'_c F = 1; \quad (2.12)$$

он сохраняется для всех значений величины ρ_α , поскольку вронскиан вообще не зависит от ρ_α . Эти функции подробно изучались Брейтом с сотрудниками [64] и в настоящее время имеются таблицы этих функций для ряда интервалов значений ρ , η и l (см. Приложение). Связь между двумя указанными наборами решений очевидна:

$$I_c^+ = (G_c - lF_c) \exp(i\omega_c), \quad (2.13a)$$

$$O_c^+ = (G_c + lF_c) \exp(-i\omega_c), \quad (2.13b)$$

$$\omega_c \equiv \omega_{\alpha l} = \sigma_{\alpha l} - \sigma_{\alpha 0} = \sum_{n=1}^l \arctg \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right). \quad (2.13b)$$

В отсутствие кулоновского поля ($\eta_\alpha = 0$) функции I и O связаны с функциями Ханкеля следующим образом:

$$I_c^+ = -i \left(\frac{\pi \rho_\alpha}{2} \right)^{1/2} H_{l+1/2}^{(2)}(\rho_\alpha), \quad (2.14a)$$

$$O_c^+ = i \left(\frac{\pi \rho_\alpha}{2} \right)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(\rho_\alpha), \quad (2.14b)$$

а связь между функциями F и G , с одной стороны, и функциями Бесселя типа J — с другой, представляется в виде

$$F_c^+ = \left(\frac{\pi \rho_\alpha}{2} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(\rho_\alpha), \quad (2.15a)$$

$$G_c^+ = (-1)^l \left(\frac{\pi \rho_\alpha}{2} \right)^{1/2} J_{-(l+1/2)}(\rho_\alpha). \quad (2.15b)$$

Для каналов с отрицательной энергией в обычных приложениях встречается только то решение уравнения (2.9), которое на бесконечности обращается в нуль. Выберем в качестве решения типа O решение, имеющее асимптотическую форму

$$O_c^- \equiv O_{\alpha l}^- \sim \exp(-\rho_\alpha - \eta_\alpha \ln 2\rho_\alpha), \quad (2.16)$$

так что с точностью до множителя i^{-l} это есть аналитическое продолжение в комплексной плоскости волнового числа k решения типа O^+ , определяемого уравнением (2.10b), с положительной вещественной оси на положительную мнимую ось. Это решение совпадает с вещественной, „экспоненциально убывающей“ функцией Уиттекера, описанной в Приложении:

$$O_c^- = W\left(-\eta_\alpha, l + \frac{1}{2}; 2\rho_\alpha\right). \quad (2.17)$$

В отсутствие кулоновского поля это решение связано с функцией Бесселя второго рода:

$$O_c^- = \left(\frac{2\rho_\alpha}{\pi} \right)^{1/2} K_{l+1/2}(\rho_\alpha). \quad (2.18)$$

Аналогично, в качестве аналитического продолжения функции I^+ , определяемой выражением (2.10a), можно было бы взять решение типа I^- . Поскольку решения такого типа в практических расчетах обычно не встречаются, нам нет нужды их точно определять, несмотря на то, что они и появляются в процессе теоретического рассмотрения.

в. Полные волновые функции канала

Теперь мы можем для положительных энергий записать полные волновые функции канала, которые соответствуют *входящим* и *выходящим* волнам, отвечающим единичному потоку, проходящему через поверхность произвольной сферы с центром в начале координат; в схеме $(\alpha slvm)$ они имеют вид

$$\mathcal{J}_{\alpha slvm}^+ = (i^l Y_m^{(l)}) \frac{I_{\alpha l}^+}{v_{\alpha}^{1/2} r_{\alpha}} \psi_{\alpha sv}, \quad (2.19a)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha slvm}^+ = (i^l Y_m^{(l)}) \frac{O_{\alpha l}^+}{v_{\alpha}^{1/2} r_{\alpha}} \psi_{\alpha sv}. \quad (2.19b)$$

Соответствующие функции в схеме $(\alpha slJM)$ имеют вид

$$\mathcal{J}_{\alpha slJM}^+ = \sum_{\nu+m=M} (slvm | JM) \mathcal{J}_{\alpha slvm}^+, \quad (2.20a)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha slJM}^+ = \sum_{\nu+m=M} (slvm | JM) \mathcal{G}_{\alpha slvm}^+. \quad (2.20b)$$

Функции последнего набора ведут себя при обращении времени следующим образом:

$$K \mathcal{J}_{\alpha slJM}^+ = (-1)^{J-M} \mathcal{G}_{\alpha slJ-M}^+, \quad (2.21a)$$

$$K \mathcal{G}_{\alpha slJM}^+ = (-1)^{J-M} \mathcal{J}_{\alpha slJ-M}^+. \quad (2.21b)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (2.3) и тем фактом что оператор K действует на радиальные части волновых функций (2.19) как оператор комплексного сопряжения. Решения, аналогичные (2.19) и (2.20), могут быть введены и для каналов с отрицательной энергией с помощью простой замены функций I^+ и O^+ соответственно на I^- и O^- . Поскольку радиальные части этих решений могут быть взяты вещественными, то действие оператора K обращения времени может быть представлено в виде

$$K \mathcal{J}_{\alpha slJM}^- = (-1)^{J-M} \mathcal{J}_{\alpha slJ-M}^-, \quad (2.22a)$$

$$K \mathcal{G}_{\alpha slJM}^- = (-1)^{J-M} \mathcal{G}_{\alpha slJ-M}^-. \quad (2.22b)$$

Удобно ввести поверхностные функции

$$\varphi_{\alpha slvm} = r_{\alpha}^{-1} \psi_{\alpha sv} (i^l Y_m^{(l)}), \quad (2.23)$$

которые, будучи умноженными на радиальную функцию u_{asl} , дают полную волновую функцию канала. На поверхности \mathfrak{S} они нормированы и взаимно ортогональны:

$$\int \varphi_{aslv}^* \varphi_{a's'l'v'm'} d\mathfrak{S} = \delta_{aslv; a's'l'v'm'}. \quad (2.24)$$

Функции

$$\varphi_{asJM} = \sum_{v+m=M} (slvm | JM) \varphi_{aslv}, \quad (2.25)$$

соответствующие схеме $(aslJM)$, также являются нормированными и взаимно ортогональными на поверхности \mathfrak{S} :

$$\int \varphi_{asIJM}^* \varphi_{a's'I'J'M'} d\mathfrak{S} = \delta_{asIJM; a's'I'J'M'}. \quad (2.26)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (2.24) и свойством унитарности коэффициентов векторного сложения. Предполагается, что обе совокупности образуют полные системы поверхностных функций на \mathfrak{S} . Более детальное обсуждение предполагаемой полноты этих наборов читатель найдет в книге Сакса [59].

§ 3. Волновые функции во внутренней области

Во внутренней области полная волновая функция Ψ для заданной энергии возбуждения E строится из различных волновых функций Ψ_{JM} , соответствующих заданному моменту количества движения J и его проекции M . Эти волновые функции удовлетворяют волновому уравнению

$$H\Psi_{JM} = E\Psi_{JM} \quad (3.1)$$

и во внутренней области могут быть формально разложены в ряд по взаимно ортогональным собственным функциям $X_{\lambda JM}$ этой области:

$$\Psi_{JM} = \sum_{\lambda} A_{\lambda J} X_{\lambda JM}, \quad (3.2)$$

причем эти собственные функции являются решениями волнового уравнения с вещественными собственными значениями энергии $E_{\lambda J}$:

$$HX_{\lambda JM} = E_{\lambda J} X_{\lambda JM}. \quad (3.3)$$

Позднее (§ 2 гл. V) мы точно укажем, каким образом функции $X_{\lambda JM}$ определяются как решение задачи на *собственные*

значения, которая возникает при задании определенных граничных условий на поверхности \mathfrak{S} . Коэффициенты разложения $A_{\lambda J}$ вообще являются функциями энергии возбуждения E и зависят от *истинных* граничных условий на поверхности \mathfrak{S} ; в отсутствие сферически несимметричных внешних полей, таких, например, как магнитное поле, коэффициенты $A_{\lambda J}$ не зависят от M . Собственные функции предполагаются вещественными в смысле соотношения (2.3):

$$KX_{\lambda JM} = (-1)^{J-M} X_{\lambda J-M}. \quad (3.4)$$

§ 4. Волновые функции на граничной поверхности \mathfrak{S}

В гл. V и VII, где в процессе вывода нам придется „сшивать“ на поверхности \mathfrak{S} внешнюю и внутреннюю функции, нам понадобятся значения радиальных частей внешней и внутренней функций и значения их производных на поверхности \mathfrak{S} , т. е. понадобятся значения функций $u_{aSl}(r_a)$, определяемых соотношением (2.5), и их производных. Имея это в виду, введем величину V_c — значение функции на поверхности \mathfrak{S} :

$$V_c = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} u_c(a_c) \quad (4.1a)$$

и величину D_c — значение производной на поверхности \mathfrak{S} :

$$D_c = \left(\frac{a_c \hbar^2}{2M_c} \right)^{1/2} \left(\frac{du_c}{dr_c} \right)_{r_c = a_c}. \quad (4.1b)$$

Безразмерное отношение D_c/V_c , представляющее собой логарифмическую производную, также оказывается важной величиной; эта логарифмическая производная равна произведению радиуса a_c и взятой на поверхности \mathfrak{S} логарифмической производной от произведения величины r_c и радиальной части внешней или внутренней функции. Введенные выше величины могут быть представлены в виде поверхностных интегралов:

$$V_c = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} \int \varphi_c^* \Psi d\mathfrak{S}, \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} D_c &= \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} \int \varphi_c^* \text{grad}_n (r_c \Psi) d\mathfrak{S} = \\ &= V_c + \left(\frac{a_c \hbar^2}{2M_c} \right)^{1/2} \int \varphi_c^* \text{grad}_n \Psi d\mathfrak{S}, \end{aligned} \quad (4.2b)$$

где Ψ — полная волновая функция системы, а grad_n — оператор составляющей градиента, нормальной к поверхности \mathfrak{S} . На поверхности \mathfrak{S} разложение волновой функции Ψ и нормальной составляющей ее градиента в ряд по поверхностным функциям φ_c , которые, как предполагается, образуют полную систему, имеет вид

$$\Psi = \sum_c \left(\frac{2M_c a_c}{\hbar^2} \right)^{1/2} V_c \varphi_c, \quad (4.3a)$$

$$\text{grad}_n(r_c \Psi) = \sum_c \left(\frac{2M_c a_c}{\hbar^2} \right)^{1/2} D_c \varphi_c, \quad (4.3b)$$

$$\text{grad}_n \Psi = \sum_c \left(\frac{2M_c}{a_c \hbar^2} \right)^{1/2} (D_c - V_c) \varphi_c.$$

а. Внешние функции

Поскольку во внешней области функции $u(r_\alpha)$ выражаются в виде линейной комбинации волновых функций типа I и O , полезно ввести некоторые символические обозначения для часто встречающихся комбинаций этих функций и их производных, взятых на поверхности. Логарифмическую производную волновой функции типа O будем записывать в виде

$$L_c \equiv \left(\frac{\rho_c O'_c}{O_c} \right)_{r_c = a_c} = S_c + iP_c, \quad (4.4)$$

где, согласно (2.136), (2.12) и (2.17), ее вещественные и мнимые части определяются следующим образом:

$$S_c^+ = \left[\frac{\rho_c (F_c F'_c + G_c G'_c)}{F_c^2 + G_c^2} \right]_{r_c = a_c}, \quad (4.4a)$$

$$S_c^- = \left(\frac{\rho_c W'_c}{W_c} \right)_{r_c = a_c},$$

$$P_c^+ = \left[\frac{\rho_c}{F_c^2 + G_c^2} \right]_{r_c = a_c}, \quad (4.4b)$$

$$P_c^- = 0.$$

Для каналов с положительной энергией отношение

$$\Omega_c^+ = \left(\frac{I_c}{O_c} \right)_{r_c = a_c}^{1/2} \quad (4.5)$$

является комплексным числом с модулем, равным единице, которое можно поэтому записать в виде

$$\Omega_c^+ \equiv \Omega_{al}^+ = \exp i(\omega_c - \phi_c^+), \quad (4.5a)$$

где

$$\phi_c^+ \equiv \phi_{al}^+ = \operatorname{arctg} \left(\frac{F_c}{G_c} \right). \quad (4.5b)$$

Мы введем также величины

$$\mathfrak{L}_c = \left(\frac{\rho_c I'_c}{I_c} \right)_{r_c = a_c}, \quad (4.6a)$$

$$\mathfrak{P}_c = \left(\frac{\rho_c}{I_c O_c} \right)_{r_c = a_c} \quad (4.6b)$$

и вронскиан

$$\omega = (O'_c I_c - I'_c O_c)_{r_c = a_c}, \quad (4.6b)$$

который, строго говоря, не является поверхностной величиной, поскольку его значение не зависит от положения поверхности \mathfrak{S} . Для каналов с положительной энергией имеем

$$\mathfrak{L}_c^+ = L_c^{+*}, \quad (4.7a)$$

$$\mathfrak{P}_c^+ = P_c^+, \quad (4.7b)$$

$$\omega_c^+ = 2i. \quad (4.7b)$$

Устанавливать подобные соотношения для каналов с отрицательной энергией нет необходимости.

В определение внешней функции на поверхности \mathfrak{S} входят четыре величины: I , I' , O и O' или F , F' , G и G' . Однако если мы фиксируем значение вронскиана с помощью соотношения (4.6b) или (2.12), то нам понадобятся только три независимые величины. В качестве таких величин мы можем взять S_c^+ , P_c^+ и ϕ_c^+ . Величину S_c^+ (так же, как и S_c^-) назовем *фактором сдвига*, поскольку она появляется в качестве множителя в выражении для сдвига уровня, величину P_c — *фактором проницаемости*, поскольку эта вели-

чина появляется в качестве множителя в выражении для ширины уровня, и, наконец, величину $-\phi_c^+$ — сдвигом фазы для рассеяния на непроницаемой сфере, поскольку этот сдвиг фазы соответствует рассеянию на абсолютно твердой сфере радиуса a_c (на потенциале отталкивания, имеющем радиус a_c и бесконечную высоту). Этот сдвиг фазы соответствует узлу волновой функции при $r_c = a_c$. Обращение величины P_c^- в нуль отражает тот факт, что для каналов с отрицательной энергией не могут иметь места никакие потоки частиц. Некоторые полезные для приложений соотношения, относящиеся к этим трем величинам, даны в Приложении.

б. Внутренние функции

Значения внутренней собственной функции и ее производной на поверхности обычно обозначаются следующим образом:

$$\gamma_{\lambda c} \equiv V_{\lambda c} = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} \int \varphi_c^* X_{\lambda JM} dS, \quad (4.8a)$$

$$\delta_{\lambda c} \equiv D_{\lambda c} = \gamma_{\lambda c} + \left(\frac{a_c \hbar^2}{2M_c} \right)^{1/2} \int \varphi_c^* \text{grad}_n X_{\lambda JM} dS, \quad (4.8b)$$

где индекс c означает совокупность $(aslJM)$. Важным свойством этих величин является то, что эти величины вещественны и не зависят от M . Согласно Вигнеру [61, 18, 19], этим свойством обладает любое определенное на поверхности скалярное произведение двух функций, которые при обращении времени ведут себя одинаковым образом:

$$\begin{aligned} \int \varphi_{aslJM}^* X_{\lambda JM} dS &\equiv (\varphi_{JM}, X_{JM}) = (X_{JM}, \varphi_{JM})^* = \\ &= (K X_{JM}, K \varphi_{JM}) = (-1)^{2J-2M} (X_{J-M}, \varphi_{J-M}) = (\varphi_{J-M}, X_{J-M})^*. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Чтобы получить этот результат, мы воспользовались соотношением (2.3) и тем фактом, что величина $2J - 2M$ всегда четна. Поскольку эти скалярные произведения не зависят от M , можно показать, что

$$(\varphi_{JM}, X_{JM}) = (\varphi_{JM}, X_{JM})^*. \quad (4.10)$$

Эти скалярные произведения обращаются в нуль, если значения J у сомножителей не равны друг другу или если отличаются значения M .

Величина $\gamma_{\lambda c}^2$ называется *приведенной шириной уровня*; из соотношения (4.8а) видно, что она имеет размерность энергии. Величина же $\gamma_{\lambda c}$ называется *амплитудой приведенной ширины*. Отношение амплитуд

$$\frac{\delta_{\lambda c}}{\gamma_{\lambda c}} = \frac{D_{\lambda c}}{V_{\lambda c}} \equiv B_c \quad (4.11)$$

представляет собой значение логарифмической производной на \mathfrak{S} , входящей в определение (вещественных) граничных условий, которым на поверхности \mathfrak{S} должны удовлетворять функции $X_{\lambda JM}$ (см. § 2 гл. V).

Глава IV

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ С НУЛЕВЫМ СПИНОМ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

Приступим теперь непосредственно к построению формального аппарата R -матричной теории. Поскольку, однако, он должен включать спин, возможность реакций, наличие кулоновских полей и возможность использования произвольных граничных условий, то все это может привести к тому, что физические принципы, лежащие в основе теории, окажутся скрытыми указанными усложнениями. Поэтому рассмотрение желательно начать с простейшего примера, на котором можно было бы продемонстрировать смысл и значение большинства принципов, лежащих в основе теории. Таким примером может служить рассеяние частицы с нулевым спином на другой частице с нулевым спином, обусловленное центрально-симметричным взаимодействием.

§ 1. Вывод формулы для сечения

Поскольку предполагается, что взаимодействующие частицы являются бесспиновыми, спин канала s и его проекция ν будут равны нулю. Так как падающий пучок, отвечающий плоской волне, имеет относительно направления движения нулевой момент количества движения, то компоненты m угловых моментов l также будут равны нулю, если мы выберем в качестве оси квантования направление движения пучка. Поэтому в данном случае индексы s , ν и m не будут использоваться; мы можем опустить и индекс α , так как предполагается, что реакции отсутствуют. Следовательно, в качестве индекса, характеризующего данный канал, нужно оставить только квантовое число l .

а. R-функция

Вывод общего R-матричного соотношения, представленного в следующей главе, основан на применении теоремы Грина. В случае же упругого рассеяния аналогичное соотношение без труда можно получить, если воспользоваться уравнением Шредингера для радиальной части $r^{-1}u_l(r)$ внутренней волновой функции с заданным значением квантового числа l , записав его для двух значений энергии E_1 и E_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u_1}{dr^2}\right) + \left(\frac{2M}{\hbar^2}\right)(E_1 - V)u_1 &= 0, \\ \left(\frac{d^2u_2}{dr^2}\right) + \left(\frac{2M}{\hbar^2}\right)(E_2 - V)u_2 &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь потенциал взаимодействия V включает в себя также и центробежный „потенциал“; индексы 1 и 2 относятся к двум значениям энергии, а не к значениям квантового числа l . Умножим первое из этих уравнений на u_2 , а второе на u_1 . Вычитая второй результат из первого и интегрируя затем полученную разность от нуля до значения радиуса канала a , получаем

$$\int_0^a \left(u_2 \frac{d^2u_1}{dr^2} - u_1 \frac{d^2u_2}{dr^2}\right) dr + \frac{2M}{\hbar^2} (E_1 - E_2) \int_0^a u_1 u_2 dr = 0. \quad (1.2)$$

Формула Грина получается при интегрировании первого интеграла по частям (теорема Грина):

$$\left(u_2 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{du_2}{dr}\right)_{r=a} + \frac{2M}{\hbar^2} (E_1 - E_2) \int_0^a u_1 u_2 dr = 0, \quad (1.3)$$

причем

$$\left(u_2 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{du_2}{dr}\right)_{r=0} = 0,$$

поскольку при $r=0$ функция u должна обращаться в нуль, если радиальная часть $r^{-1}u(r)$ должна оставаться конечной.

При определенных вещественных значениях энергии E_λ решения уравнения Шредингера (III. 3.1) будут иметь на поверхности производную, равную нулю:

$$\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)_{r=a} = 0. \quad (1.4)$$

Эти значения энергии являются *собственными значениями* энергии, а соответствующие решения — *собственными функциями*, удовлетворяющими *граничным условиям* (1.4) при $r = a$. Подставив в (1.3) две собственные функции u_λ и $u_{\lambda'}$, принадлежащие двум разным собственным значениям E_λ и $E_{\lambda'}$, немедленно находим, что во внутренней области собственные функции ортогональны; их можно считать также и нормированными:

$$\int_0^a u_\lambda u_{\lambda'} dr = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.1), относящееся к *любой* энергии E , может теперь быть разложено во внутренней области в ряд по собственным функциям u_λ :

$$u_E(r) = \sum_\lambda A_\lambda u_\lambda(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (1.6)$$

где

$$A_\lambda = \int_0^a u_\lambda u_E dr.$$

Для определения коэффициентов разложения A_λ мы снова можем воспользоваться соотношением (1.3):

$$-u_\lambda(a) \left(\frac{du_E}{dr} \right)_a + \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right) (E_\lambda - E) \int_0^a u_E u_\lambda dr = 0,$$

или

$$A_\lambda = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{u_\lambda(a)}{E_\lambda - E} \left(\frac{du_E}{dr} \right)_a. \quad (1.7)$$

Отсюда получаем соотношение

$$u_E(r) = G(r, a) \left(\frac{a du_E}{dr} \right)_a, \quad (1.8)$$

где функция

$$G(r, a) = \frac{\hbar^2}{2Ma} \sum_\lambda \frac{u_\lambda(r) u_\lambda(a)}{E_\lambda - E} \quad (1.9)$$

является *функцией Грина*, которая связывает значение волновой функции во внутренней области со значением ее про-

изводной на поверхности. R -функция определяется следующим образом:

$$R = G(a, a) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E}, \quad (1.10)$$

где величина

$$\gamma_{\lambda} = \left(\frac{\hbar^2}{2Ma} \right)^{1/2} u_{\lambda}(a) \quad (1.10a)$$

представляет собой амплитуду приведенной ширины, которая была нами введена с помощью соотношения (III. 4.8a). Согласно (1.8), R -функция равна деленному на a обратному значению логарифмической производной функции u , взятой при $r = a$:

$$R = \frac{u_E(a)}{a (du_E/dr)_a}. \quad (1.11)$$

б. Функция столкновений U

Общее решение Ψ_l во внешней области всегда может быть представлено в виде линейной комбинации линейно независимых волновых функций \mathcal{J}_l и \mathcal{G}_l [см. (III. 2.19)]:

$$\Psi_l \sim \mathcal{J}_l - U_l \mathcal{G}_l. \quad (1.12)$$

Таким образом, коэффициент U_l представляет собой амплитуду выходящей волны \mathcal{G}_l , связанной с входящей волной \mathcal{J}_l , отвечающей единичному потоку; этот коэффициент называется *функцией столкновений*, или *функцией рассеяния*.

в. Связь между R -функцией и функцией столкновений

Функция столкновений может быть выражена через R -функцию, если при $r = a$ приравнять логарифмические производные внутренней и внешней волновых функций:

$$\left(\frac{u_l}{r u_l'} \right)_a = R_l = \frac{I_l - U_l O_l}{r (I_l' - U_l O_l')}, \quad (1.13)$$

откуда следует, что

$$U_l = \frac{I_l}{O_l} \frac{1 - L_l^* R_l}{1 - L_l R_l}, \quad (1.14)$$

где L_l — логарифмическая производная (III.4.4). Так как R_l -функция является вещественной, то функцию столкновений U_l можно выразить через сдвиг фазы δ_l :

$$U_l = \exp(2i\delta_l), \quad (1.15)$$

$$\delta_l = \operatorname{arctg} \left[\frac{R_l P_l}{1 - R_l S_l} \right] - \phi_l + \omega_l, \quad (1.15a)$$

где величины S_l , P_l , ϕ_l и ω_l определяются соотношениями (III.4.4), (III.4.5) и (III.2.13в). Величина ω_l равна нулю, поскольку мы пренебрегаем кулоновским полем. Вообще говоря, для каждой парциальной волны l имеется свой набор величин $\gamma_{\lambda l}^2$, $E_{\lambda l}$, R_l и δ_l . Резонансный вклад в фазу δ_l за счет первого члена возрастает на π , когда энергия E изменяется от уровня к уровню, а между резонансами, при значении энергии, где $R_l = 0$, фаза δ_l равна с точностью до слагаемого, кратного целому числу π , величине $-\phi_l$, так называемому сдвигу фазы рассеяния на непроницаемой сфере.

Если энергия E близка к значению энергии одного из уровней E_{λ} , то в разложении (1.10) для R -функции можно пренебречь вкладом всех уровней, кроме E_{λ} :

$$R_l \approx \frac{\gamma_{\lambda l}^2}{E_{\lambda} - E}. \quad (1.16)$$

Таким образом, мы получили однорезонансное приближение для сдвига фазы

$$\delta_l = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{1}{2} \Gamma_{\lambda l}}{E_{\lambda l} + \Delta_{\lambda l} - E} \right) - \phi_l, \quad (1.17a)$$

где ширина уровня

$$\Gamma_{\lambda l} = 2\gamma_{\lambda l}^2 P_l \quad (1.17b)$$

определяет скорость изменения фазы при прохождении энергии E через резонансное значение $E_{\lambda l} = E_{\lambda} + \Delta_{\lambda l}$, а сдвиг уровня

$$\Delta_{\lambda l} = -\gamma_{\lambda l}^2 S_l \quad (1.17в)$$

является величиной, определяющей отклонение резонансной энергии $E_{\lambda l}$ относительно собственного значения E_{λ} . Первое слагаемое в правой части равенства (1.17a) называется резо-

нансным вкладом в фазу, а второе слагаемое называется вкладом потенциального рассеяния.

Однорезонансное приближение, определяемое соотношением (1.16), можно без особых усложнений улучшить, положив

$$R_l = R_l^0 + \frac{\gamma_{\lambda l}^2}{E_{\lambda l} - E}, \quad (1.18)$$

где R_l^0 — вклад от всех других уровней, кроме $E_{\lambda l}$. В этом случае сдвиг фазы может быть выражен в виде

$$\delta_l = \text{arctg} \left(\frac{\frac{1}{2} \Gamma'_{\lambda l}}{E_{\lambda l} + \Delta'_{\lambda l} - E} \right) - \phi'_l, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma'_{\lambda l} &= \gamma_{\lambda l}^2 P'_l, \quad \Delta'_{\lambda l} = -\gamma_{\lambda l}^2 S'_l, \\ \phi'_l &= \phi_l - \text{arctg} \left[\frac{R_l^0 P_l}{1 - R_l^0 S_l} \right], \\ S'_l &= \frac{S_l (1 - R_l^0 S_l) - R_l^0 P_l^2}{d_l}, \quad P'_l = \frac{P_l}{d_l}, \\ d_l &= (1 - R_l^0 S_l)^2 + (R_l^0 P_l)^2. \end{aligned}$$

Если R_l^0 таково, что соотношение (1.18) является точным, то соотношение (1.19), как и соотношение (1.15а), будет также точным. Хотя соотношение (1.19) имеет ту же форму, что и (1.17а), ширина уровня $\Gamma'_{\lambda l}$, сдвиг уровня $\Delta'_{\lambda l}$ и фаза потенциального рассеяния ϕ'_l будут уже другими благодаря вкладу остальных уровней. Ниже (см. § 4 гл. XI) будет показано, что вклад остальных уровней в ϕ'_l равен по порядку величины вкладу ϕ_l , соответствующему рассеянию на непроницаемой сфере. Поэтому является мало оправданной интерпретация наблюдаемого потенциального рассеяния как рассеяния на непроницаемой сфере.

2. Связь между функцией столкновений и сечением

Чтобы получить дифференциальное сечение упругого рассеяния, выраженное через U_l , образуем следующую линейную комбинацию решений волнового уравнения:

$$i\pi^{1/2} k^{-1} \sum_l (2l+1)^{1/2} (\mathcal{J}_l - U_l \mathcal{G}_l). \quad (1.20)$$

Эта волновая функция не изменится, если мы прибавим к ней и вычтем из нее функцию

$$\begin{aligned} v^{-1/2} \exp(ikz) \psi &= v^{-1/2} k^{-1} \sum_l i^l (2l+1) r^{-1} F_l(\rho) P_l(\cos \theta) \psi = \\ &= i\pi^{1/2} k^{-1} \sum_l (2l+1)^{1/2} (\mathcal{J}_l - \mathcal{G}_l), \end{aligned} \quad (1.21)$$

которая является функцией, описывающей единичный поток частиц, направленный вдоль оси z ; здесь $P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра, а суммирование производится от $l=0$ до $l=\infty$. Таким образом, мы получаем решение

$$v^{-1/2} \exp(ikz) \psi + i\pi^{1/2} k^{-1} \sum_l (2l+1)^{1/2} (1 - U_l) \mathcal{G}_l, \quad (1.22)$$

асимптотическая форма которого имеет вид [заметим, что $Y_0^{(l)} = (2l+1/4\pi)^{1/2} P_l$]

$$v^{-1/2} \left[\exp(ikz) + \frac{\exp(ikr)}{r} A(\theta) \right] \psi, \quad (1.23)$$

где

$$A(\theta) = \frac{1}{2} ik^{-1} \sum_l (2l+1) (1 - U_l) P_l(\cos \theta)$$

есть комплексная *амплитуда рассеяния*. Решение (1.22) представляет собой, очевидно, сумму плоской волны, отвечающей единичному падающему потоку, и выходящих волн, описывающих рассеянные частицы. Следовательно, дифференциальное сечение упругого рассеяния на единицу телесного угла равно

$$\sigma(\theta) = |A(\theta)|^2 = \frac{1}{4} k^{-2} \left| \sum_l (2l+1) (1 - U_l) P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (1.24)$$

Проинтегрировав (1.24) по углам, получим полное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_{\text{el}} = \int \sigma(\theta) d\Omega = \pi k^{-2} \sum_l (2l+1) |1 - U_l|^2. \quad (1.25)$$

В обзорных статьях Блатта, Биденхарна и Роуза [65, 66] дано разложение дифференциального сечения (1.24) в ряд по полиномам Лежандра с вещественными коэффициентами. В тех же статьях можно найти и другие подробности, касающиеся этого разложения.

§ 2. Зависимость R -функции от граничного условия и радиуса взаимодействия

В предыдущем параграфе предполагалось, что собственные функции подчиняются граничному условию частного вида; именно считалось, что на границе производная равна нулю [см. (1.4)]. Пока речь идет о формальной теории, мы можем в равной степени воспользоваться и более общим граничным условием для логарифмической производной, например, типа

$$\left(\frac{r}{u_\lambda} \frac{du_\lambda}{dr}\right)_a = B, \quad (2.1)$$

где B — некоторое вещественное число (не зависящее от λ). Условие ортонормированности (1.5) будет справедливым и при этом граничном условии, однако другие соотношения претерпят ряд изменений. Для коэффициентов разложения (1.6) получим

$$A_\lambda = \frac{\hbar^2}{2M} \left(u_\lambda \frac{du_E}{dr} - u_E \frac{du_\lambda}{dr} \right)_a / (E_\lambda - E), \quad (2.2)$$

так что

$$u_E(r) = \frac{\hbar^2}{2Ma} \left(a \frac{du_E}{dr} - B u_E \right)_a \sum_\lambda \frac{u_\lambda(r) u_\lambda(a)}{E_\lambda - E}. \quad (2.3)$$

Положив в этом соотношении $r = a$ и используя определение R -функции (1.10), получим

$$R(B) = (f - B)^{-1}, \quad (2.4)$$

где мы, следуя Фешбаху, Пизли и Вайскопфу [23], положили

$$f = \left(\frac{r}{u_E} \frac{du_E}{dr} \right)_a.$$

Иначе говоря, f есть значение логарифмической производной от радиальной волновой функции, умноженное на a . Так как f не зависит от B , то соотношение между $R(B)$ и R -функцией, отвечающей граничному условию с нулевой логарифмической производной, принимает вид

$$BR(B) = \frac{BR(0)}{1 - BR(0)}. \quad (2.5a)$$

С другой стороны, зависимость R от B может быть выражена в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial R}{\partial B} = R^2. \quad (2.56)$$

Формулы (1.13)—(1.19) останутся справедливыми и для этого граничного условия, если только фактор сдвига S заменить на S^0 :

$$S^0 = S - B. \quad (2.6)$$

Хотя выражение (1.15а) для сдвига фазы должно через фактор S^0 содержать зависимость от B , эта зависимость, однако, компенсируется зависимостью R от B , так что сдвиг фазы фактически не зависит от B , как это и должно быть. Выбор наиболее приемлемого граничного условия обсуждается в гл. XII.

Зная приведенные ширины и положения уровней для граничного условия частного вида, скажем для $B=0$, можно в принципе получить соответствующие величины для любого другого граничного условия. Из (2.5) видно, что энергии $E_\lambda(B)$ являются решениями уравнения

$$R(0) = \frac{1}{B}. \quad (2.7)$$

Приведенные ширины $\gamma_\lambda^2(B)$ могут быть определены с помощью величины $R^2/(dR/dE)$. Эта величина, которую мы обозначим через $\gamma^2(E)$, не зависит от выбора граничного условия (от выбора B). [Это можно усмотреть из соотношения (2.4), показывающего, что $\gamma^2(E)$ равна величине $-(df/dE)^{-1}$, и из того факта, что f не зависит от B .] Таким образом,

$$R^2(B) \left(\frac{\partial R(B)}{\partial E} \right)^{-1} = \gamma^2(E) = R^2(0) \left(\frac{\partial R(0)}{\partial E} \right)^{-1}. \quad (2.8)$$

Положив в (2.8) $E = E_\lambda(B)$ и используя (2.7), получим

$$\gamma_\lambda^2(B) = \gamma^2[E_\lambda(B)] = \left[B^2 \left(\frac{\partial R(0)}{\partial E} \right)_{E=E_\lambda(B)} \right]^{-1}. \quad (2.9)$$

Поскольку структура формальной теории остается неизменной при любом частном выборе граничного условия (т. е.

величины B), она не изменится также и при любом частном выборе радиуса взаимодействия (т. е. величины a) при условии, что радиус взаимодействия будет больше минимальной величины, допускаемой предположением „4“ (см. § 2 гл. II). Действительно, пока речь идет о формальной теории, величины a и B являются просто параметрами. Дело будет обстоять иначе, когда речь пойдет о конкретных приложениях теории, где, как мы увидим позже (например, в гл. XII), мы должны будем выбрать определенные значения величин a и B для того, чтобы извлечь из теории максимум пользы. Однако сначала мы исследуем лишь формальные аспекты теории.

Функция столкновений и эффективное сечение, конечно, не могут зависеть от a и B . Следовательно, хотя в выражениях для этих величин встречаются a и B , последние всегда входят во взаимно компенсирующихся комбинациях. Например, мы только что видели, как комбинация $f = B + [1/R(B)]$ должна быть не зависящей от B . Для величины a компенсация оказывается несколько более сложной, так как a встречается как во „внутренней“ функции R , так и во „внешних“ функциях I , O и L .

Тейхман [67, 68] исследовал формальную зависимость величин E_λ и γ_λ^2 от выбора величин a и B и представил эту зависимость в виде простых дифференциальных уравнений первого порядка. Зависимость от B следует из уравнения (2.5б), если в нем перейти к пределу $E \rightarrow E_\lambda$:

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial B} = -\gamma_\lambda^2,$$

$$\frac{\partial (\gamma_\lambda^2)}{\partial B} = 2\gamma_\lambda^2 \sum_{\mu (\neq \lambda)} \frac{\gamma_\mu^2}{E_\mu - E_\lambda}.$$

Соответствующие уравнения, описывающие зависимость от a , оказываются несколько более сложными, поскольку, как и следовало ожидать, они содержат внешние потенциалы. Подробности, касающиеся этих уравнений, а также уравнений, соответствующих случаю многих каналов (общая теория реакций для многих каналов развивается в последующих главах), читатель найдет в цитированной работе Тейхмана.

§ 3. Случай прямоугольной потенциальной ямы

Специальный случай прямоугольной потенциальной ямы, описывающей внутренние взаимодействия, позволяет выяснить некоторые свойства разложения R -функции. В этом случае потенциал взаимодействия V в уравнении (1.1) во внутренней области ($r < a$) равен константе V_0 ; к тому же для орбитального момента l вклад в потенциал V дает также центральный потенциал $l(l+1)\hbar^2/2Mr^2$.

а. Нулевой момент ($l=0$)

Во внутренней области решение уравнения (1.1) для произвольного значения энергии E равно

$$u_E(r) = \sin Kr, \quad (3.1)$$

где

$$K = \left[\frac{2M(E - V_0)}{\hbar^2} \right]^{1/2},$$

и, следовательно, R -функция в соответствии с (1.11) равна при $B=0$

$$R = \mu^{-1} \operatorname{tg} \mu, \quad (3.2)$$

где $\mu = Ka$. Собственными значениями энергии являются те энергии, при которых производная функции (3.1) на поверхности обращается в нуль, т. е. при которых

$$\mu_\lambda = K_\lambda a = \pi \left(\lambda - \frac{1}{2} \right), \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.3a)$$

или

$$E_\lambda = V_0 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2Ma^2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (3.3b)$$

Амплитуды приведенных ширин можно получить, если воспользоваться определением (1.10a); замечая, что функции (3.1) должны быть нормированными, получаем

$$\gamma_\lambda = (-1)^{\lambda+1} \left(\frac{\hbar^2}{Ma^2} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Тогда разложение R -функции принимает вид

$$R = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2}; \quad (3.5)$$

легко видеть, что оно представляет собой разложение функции $\mu^{-1} \operatorname{tg} \mu$ [см. (3.2)] на простейшие дроби.

Мы можем получить простое выражение для вклада в (3.5) при энергии E , равной энергии уровня E_λ , от всех других уровней (кроме уровня с энергией E_λ), т. е. для величины $R^0(E_\lambda)$ [см. (1.18)]. Из (2.8) следует, что

$$\frac{d\gamma^2}{dE} = 2R - R^2 \frac{d^2R}{dE^2} / \left(\frac{dR}{dE} \right)^2. \quad (3.6)$$

Подставляя (1.18) в (3.6) и переходя к пределу $E = E_\lambda$, получаем соотношение

$$R^0(E_\lambda) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma^2}{dE} \right)_{E_\lambda}, \quad (3.7)$$

которое справедливо, независимо от того, рассматриваем мы величину R^0 как константу или нет. Затем, воспользовавшись выражением (3.2) для вычисления правой части соотношения (3.7), получаем

$$[R^0(E_\lambda)]^{-1} = 2\mu(E_\lambda)^2 = 2\pi^2 \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (3.8)$$

Легко видеть, что вклад от всех уровней, отличных от уровня λ , уменьшается с увеличением λ . Подобная зависимость функции R^0 от λ отражает тот факт, что чем больше λ , тем сильнее взаимная компенсация положительных и отрицательных членов в представляющей функцию R^0 сумме (при $\lambda = 1$ в этой сумме все члены положительны).

б. Произвольный момент

Решением уравнения (1.1) для произвольного значения момента количества движения является функция $F_l(\mu)$ типа (III. 2.15а), где $\mu = Ka$. Тогда R -функция для граничного условия $B = 0$ имеет вид

$$R_l = f_l^{-1} = \frac{F_l(\mu)}{\mu F'_l(\mu)}, \quad (3.9)$$

где штрих означает дифференцирование по μ . Удобно ввести безразмерную величину

$$\theta_l^2 = \frac{Ma^2}{\hbar^2} \gamma_l^2. \quad (3.10)$$

Далее, из соотношений (2.4) и (2.8) находим

$$-\theta_l^{-2} = \left(\frac{\hbar^2}{Ma^2} \right) \left(\frac{df_l}{dE} \right) = \mu^{-1} f'_l(\mu). \quad (3.11)$$

Воспользовавшись уравнением для $F_l(\mu)$

$$F_l'' + [1 - l(l+1)\mu^{-2}] F_l = 0, \quad (3.12)$$

получаем

$$\theta_l^{-2} = \frac{(f_l + l)(f_l - l - 1) + \mu^2}{\mu^2}. \quad (3.13)$$

Теперь, выбрав в качестве граничного условия равенство

$$B_l = -l, \quad (3.14)$$

легко найти, что $\theta_l^{-2}(E_\lambda) = 1$. Из (2.9) следует, что $\theta_\lambda^2 = 1$; следовательно, выражение (3.4) для амплитуды приведенной ширины оказывается справедливым для всех значений l . Чтобы найти собственные значения энергии $E_{\lambda l}$, определим соответствующие значения $\mu_{\lambda l}$, для которых правая часть соотношения (3.9) равна $-1/l$. Пользуясь рекуррентной формулой

$$F'_l = F_{l-1} - \frac{l}{\mu} F_l \quad (3.15)$$

и соотношением (3.9), получаем

$$F_{l-1}(\mu_{\lambda l}) = 0, \quad (3.16a)$$

так что

$$E_{\lambda l} = V_0 + \left(\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \right) \mu_{\lambda l}^2, \quad (3.16b)$$

где $\mu_{\lambda l}$ — корень уравнения (3.16a), имеющий номер λ . Величина $R^0(E_\lambda)$ определяется так же, как и в случае нулевого момента количества движения. Из соотношений (3.13), (3.6) и (3.7) следует, что

$$R_l^0(E_{\lambda l}) = \frac{2l+1}{2\mu_{\lambda l}^2}. \quad (3.17)$$

Таким образом, с возрастанием l вклад в R_l^0 всех уровней, отличных от уровня λ , становится все более существенным.

§ 4. Определение резонансного уровня

Теперь имеет смысл обсудить наше определение резонансного (или виртуального) уровня энергии. Согласно равенству (1.17в), резонансные уровни лежат при энергиях E_r , удовлетворяющих условию

$$E_\lambda + \Delta_\lambda(E_r) - E_r = 0. \quad (4.1)$$

Таким образом, это — энергии, при которых резонансный вклад в сдвиг фазы [см. (1.17а) или лучше (1.19)] равен нечетному целому числу $\pi/2$. Именно этим определением мы и будем пользоваться в дальнейшем. Поскольку сдвиг уровня $\Delta_\lambda(E)$ является ограниченной монотонной функцией энергии E , то имеет место взаимнооднозначное соответствие между резонансными уровнями и собственными значениями энергии. Так как число собственных значений энергии бесконечно, то бесконечным будет также и число резонансных уровней.

По некоторым причинам данное нами определение может показаться неудовлетворительным. Прежде всего точные значения, которые мы получаем для величины E_r , зависят от того, какую формулу для сдвига уровня мы используем при интерпретации данных по резонансам: формулу (1.17в) или же формулу (1.19). Кроме того, если для определения вклада потенциального рассеяния в сдвиг фазы используем формулу (1.19), то может иметь место также некоторая зависимость от граничного условия. Однако главная причина заключается в том, что даже в области, где взаимодействие отсутствует, имеется бесконечный спектр резонансных уровней, как показывает соотношение (3.3б) при $V_0 = 0$. В этом случае вклады резонансного рассеяния, с одной стороны, и потенциального рассеяния — с другой, в сдвиг фазы равны по величине и противоположны по знаку, так что сдвиг фазы обращается в нуль. Приведенное соображение является примером тех трудностей, с которыми мы можем встретиться, если попытаемся в наблюдаемом сдвиге фазы отделить вклад резонансного рассеяния от вклада, связанного с потенциальным рассеянием.

По этим причинам резонансные энергии в литературе иногда определяются как такие энергии, при которых сдвиг фазы равен нечетному числу, умноженному на $\pi/2$. Хотя это определение является вполне однозначным, при таком опре-

деления, однако, отсутствует взаимнооднозначное соответствие между величинами E_r и E_λ . В самом деле, ядерная система может иметь всего лишь несколько резонансных уровней или же вовсе не иметь их.

Несмотря на указанные трудности, мы все же будем придерживаться определения (4.1), во-первых, для того, чтобы избежать путаницы, и, во-вторых, ввиду того, что это определение является удобным для интерпретации „резонансных“ данных, с которыми нам главным образом и придется иметь дело. Проблема установления наилучшего определения понятия резонансной энергии имеет, скорее, академический интерес. На практике в случае наличия узкого пика в эффективном сечении большинство определений приводят к значениям энергии в пределах ширины пика. Лишь для очень широких пиков разные определения приводят к сильно различающимся значениям энергии. При наличии широких пиков пользоваться резонансной интерпретацией не имеет смысла.

§ 5. Разложение для производной от волновой функции

Если мы хотим получить производную функции $u_E(r)$ при $r = a$ путем дифференцирования каждого слагаемого в разложении для функции $G(r, a)$, входящей в правую часть соотношения (1.8), то мы получим нуль, поскольку, согласно (1.4), производные от отдельных слагаемых все равны нулю. Объяснение этого парадокса заключается в том, что полученный таким способом ряд для производной не является равномерно сходящимся вблизи поверхности. Сходимость такого ряда, хотя и неравномерная, была показана Джексоном [69] для случая, когда потенциал взаимодействия является ограниченным. Доказательство состоит в следующем.

Ряд для производной от функции (1.8) имеет вид

$$u'(r) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{\lambda} \frac{u'_\lambda(r) u_\lambda(a)}{E_\lambda - E} u'(a), \quad (5.1)$$

где штрих теперь означает дифференцирование по r . Интегрируя уравнение Шредингера (1.1) для функции $u_\lambda(r)$ от r до a и используя условия (1.4), получаем

$$u'_\lambda(r) = \frac{2M}{\hbar^2} \int_r^a (E_\lambda - V) u_\lambda dr. \quad (5.2)$$

Следовательно, ряд для производной может быть представлен в виде

$$\frac{u'(r)}{u'(a)} = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(a) \int_r^a u_{\lambda} dr + \sum_{\lambda} (E_{\lambda} - E)^{-1} u_{\lambda}(a) \int_r^a (E - V) u_{\lambda} dr. \quad (5.3)$$

Если функция V ограничена, то, согласно Куранту, ни одно из значений E_{λ} не будет отличаться от соответствующего значения E_{λ} , получаемого в случае отсутствия взаимодействия, на величину, бóльшую максимального значения функции V . Следовательно, вторая сумма в (5.3) сходится и обращается в нуль при $r \rightarrow a$, поскольку для больших λ , как показывает соотношение (3.36), $E_{\lambda} \sim \lambda^2$. Когда r близко к a , первая сумма представляет собой разложение функции, равной единице в интервале от r до a и нулю вне этого интервала, так что $u'(r) \rightarrow u'(a)$ при $r \rightarrow a$.

Вследствие указанной трудности, связанной с перестановкой порядка суммирования и дифференцирования, невозможно развить удовлетворительную \mathbf{R} -матричную теорию с помощью функций X_{λ} , обращающихся в нуль на поверхности \mathfrak{S} (т. е. при $B = \infty$). Можно было бы надеяться, что, воспользовавшись этими функциями X_{λ} и проведя выкладки, аналогичные выкладкам в § 1, мы получим соотношение

$${}_{\mathfrak{R}}R^a = \left(\frac{r}{u_E} \frac{du_E}{dr} \right),$$

аналогичное соотношению (1.11), но с „ R^a “-функцией вида

$$\sum_{\lambda} \frac{\delta_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E},$$

где δ_{λ}^2 — величины, определенные с помощью формулы (III. 4.86). Однако на последнем этапе вывода этого соотношения, именно при сшивании на поверхности \mathfrak{S} внутренней и внешней нормальных производных, мы сталкиваемся с вышеупомянутой трудностью перестановки порядка суммирования и дифференцирования. Тем не менее, существует прием (который описан в § 3, а гл. V), не содержащий такого сшивания, который

может быть использован для получения „ R “-функции вида

$${}_n R^a = R^\infty + \sum_{\lambda} \frac{[(\Delta + E)/(E_{\lambda} + \Delta)] \delta_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E},$$

где Δ — произвольная константа, имеющая размерность энергии, а R^∞ — вещественная симметрическая матрица. Константа Δ появляется в результате применения тождества

$$\frac{E_2 - E_1}{(E_{\lambda} - E_1)(E_{\lambda} - E_2)} = \frac{\Delta + E_2}{(E_{\lambda} + \Delta)(E_{\lambda} - E_2)} - \frac{\Delta + E_1}{(E_{\lambda} + \Delta)(E_{\lambda} - E_1)},$$

которое может быть использовано вместо соответствующего тождества, используемого в § 3, а гл. V. Если бы величина Δ была бесконечной, как в обычном разложении для R -матрицы, то сумма в последнем выражении для „ R “-функции, вообще говоря, была бы расходящейся, так как величины δ_{λ}^2 с ростом энергии E_{λ} имеют тенденцию к возрастанию в противоположность величинам γ_{λ}^2 , которые с ростом E_{λ} либо остаются постоянными, либо уменьшаются. Разложение Миттаг-Леффлера для логарифмической производной волновой функции, отвечающей прямоугольной потенциальной яме, соответствует приведенному выше разложению „ R “-функции с $\Delta = 0$ и $R^\infty = -1$.

§ 6. Свойства R -функций

а. Математические R -функции

„Физическую“ R -функцию, определенную с помощью соотношения (1.10), можно рассматривать как функцию, принадлежащую к более широкому классу „математических“ R -функций. Последние определяются как мероморфные функции комплексного переменного, мнимые части которых неотрицательны в верхней полуплоскости и неположительны в нижней. Функция R [см. (1.10)] является, очевидно, функцией такого рода, если ее рассматривать как функцию комплексного переменного $\mathcal{E} = E + iF$, имеющую вид

$$R(\mathcal{E}) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - \mathcal{E}}, \quad (6.1)$$

при условии, что полюса E_λ вещественны, а их вычеты $-\gamma_\lambda^2$ отрицательны, как это имеет место в физических приложениях. Хотя в только что описанной теории упругого рассеяния имеют дело с вычислением значений R -функции лишь вдоль вещественной оси, где величина \mathcal{E} совпадает с вещественной энергией E ядерной системы, позже (в гл. XI) мы покажем, что, если вместе с рассеянием рассматривается и поглощение, в теорию должна быть введена комплексная энергия, мнимая часть которой равна половине полной ширины поглощения. Вигнером [70—74] были изучены как общие свойства математических R -функций, так и определенные типы R -функций, представляющие особый физический интерес для резонансной теории. Некоторые из его результатов, используемых в физических приложениях, мы сейчас и изложим.

1) R -функция вещественна на вещественной оси и только на вещественной оси. Из этой теоремы и из определения R -функции следует, что

$$R(\mathcal{E}^*) = R(\mathcal{E})^*. \quad (6.2)$$

2) Производная от R -функции положительна в каждой регулярной точке вещественной оси. Для физических R -функций, заданных соотношением (6.1), это очевидно, поскольку имеет место неравенство

$$\frac{dR(E)}{dE} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{(E_{\lambda} - E)^2} > 0, \quad (6.3)$$

справедливое всюду, кроме точек $E = E_\lambda$. Это свойство является особенно важным, и одно из его следствий в теории рассеяния будет рассмотрено нами в следующей главе. Все производные нечетного порядка от функции R положительны на вещественной оси всюду, снова кроме точек $E = E_\lambda$, и все производные удовлетворяют на вещественной оси следующему неравенству [16, 17]:

$$\left(\frac{R^{(n+m)}}{(n+m)!} \right)^2 \leq \frac{R^{(2n+1)} R^{(2m-1)}}{(2n+1)! (2m-1)!}. \quad (6.4)$$

3) Все полюса R -функции должны лежать на вещественной оси; эти полюса являются простыми и имеют

отрицательные вычеты. Эти свойства представляются очевидными для физических R -функций (6.1).

4) Любая R -функция может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд Миттаг-Леффлера:

$$R = \alpha \mathcal{E} + \beta + \sum_{\mu} \left(\frac{\gamma_{\mu}^2}{E_{\mu} - \mathcal{E}} - \frac{\gamma_{\mu}^2}{E_{\mu}} \right), \quad (6.5)$$

где α и γ_{μ}^2 положительны, а β и E_{μ} вещественны. Для физических R -функций (6.1) имеем $\alpha = 0$, $\beta = \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^2 / E_{\mu}$.

5) Дробно-линейная функция

$$Q = \frac{a_1 R + b_1}{a_2 R + b_2}, \quad (6.6)$$

где функция R берется из нашего класса R -функций, а коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 и b_2 вещественны (причем $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$), также является R -функцией. С частным случаем этой теоремы мы уже встречались при рассмотрении изменения, вызываемого в R изменением в B (см. § 2). Эта теорема оказывается более важной при исследовании соотношения (1.15а). В этом случае теорема указывает на то, что, если величины P и S , входящие в (1.15а), считаются константами, дробно-линейная функция

$$Q = \frac{RP}{1 - RS} \quad (6.6a)$$

оказывается R -функцией, поскольку величина P всегда положительна. Следовательно, функция Q может быть разложена в ряд (6.5). Более того, можно показать, что отсутствие линейного члена $\alpha \mathcal{E}$ в R -функции, входящей в (1.15а), влечет за собой отсутствие подобного члена в Q . Следовательно, сдвиг фазы может быть выражен в виде

$$\delta = \text{arctg} \left(Q_0 + \sum_{\mu} \frac{\theta_{\mu}^2}{H_{\mu} - E} \right) - \phi, \quad (6.7a)$$

где новые константы H_{μ} и Q_0 вещественны, θ_{μ}^2 положительно (все константы связаны с величинами P , S , γ_{λ}^2 и E_{λ} , впрочем, довольно сложным образом). Практически P и S не являются постоянными величинами, и, в частности, P будет иметь довольно сильную энергетическую зависимость, если во внешней области имеется сильный кулоновский барьер. С другой

стороны, величина S обычно хорошо аппроксимируется в очень широком интервале энергий на вещественной оси линейной функцией

$$S = S_0 + S_1 E,$$

где $S_1 \geq 0$. Дробно-линейная функция

$$\frac{R}{1 - R(S_0 + S_1 \mathcal{E})}$$

также является R -функцией, если S_1 положительна и линейный член в разложении (6.5) отсутствует. Таким образом, сдвиг фазы лучше всего представлять в виде

$$\delta = \arctg P \left(Q_0 + \sum_{\mu} \frac{\theta_{\mu}^2}{H_{\mu} - E} \right) - \phi. \quad (6.76)$$

В этом случае мы не накладываем никаких ограничений на P , а функция S может изменяться указанным выше образом; константы в (6.76) не совпадают с константами выражения (6,7а).

6) Произвольная R -функция может быть представлена в виде

$$R = b + a \operatorname{tg} g(\mathcal{E}), \quad (6.8)$$

где b — произвольное вещественное число, a — положительное число, а функция $g(\mathcal{E})$ представляется сходящимся рядом

$$g(\mathcal{E}) = \eta \mathcal{E} + E_0 + \sum_{\nu} \left[\arctg \frac{\mathcal{E} - E_{\nu}}{x_{\nu}} + \arctg \frac{E_{\nu}}{x_{\nu}} \right], \quad (6.8a)$$

где η и x_{ν} положительны, а E_0 и E_{ν} вещественны. Константы η , E_0 , E_{ν} и x_{ν} , входящие в разложение заданной R -функции, зависят от выбора величин a и b . Вследствие сильной энергетической зависимости и разрывной природы R -функций иногда для интерпретации экспериментальных данных удобно наносить на график функцию

$$g(E) = \arctg \frac{R - b}{a},$$

которая в отличие от R -функции является непрерывной.

7) Любая R -функция может быть разложена в абсолютно сходящееся произведение вида

$$R(\mathcal{E}) = c \frac{x_0 - \mathcal{E}}{Z_0 - \mathcal{E}} \prod_{\nu} \frac{1 - \mathcal{E}/x_{\nu}}{1 - \mathcal{E}/Z_{\nu}} \prod_{\nu} \frac{1 - \mathcal{E}/x_{-\nu}}{1 - \mathcal{E}/Z_{-\nu}}, \quad (6.9)$$

причем числа x_n и Z_n удовлетворяют условиям:

$$\dots Z_{-2} < x_{-2} < Z_{-1} < x_{-1} < Z_0 < x_0 < Z_1 < x_1 \dots$$

8) Решение $R(r, \mathcal{E})$ уравнения Риккати

$$\frac{dR(r, \mathcal{E})}{dr} = R^2 + \mathcal{U}(r)R - \mathcal{V}(r) + \mathcal{E} \quad (6.10)$$

с начальным условием $R(0, \mathcal{E}) = R_0$, где R_0 вещественно, является R -функцией по параметру \mathcal{E} для любого значения r , лежащего в интервале $(0, a)$; в этом интервале $\mathcal{U}(r)$ и $\mathcal{V}(r)$ являются вещественными непрерывными функциями. Подставляя $R = -(du/dr)/u$ в (1.1), получаем выражение (6.10), в котором $\mathcal{U} = 0$, $\mathcal{V} = (2M/\hbar^2)V(r)$, $\mathcal{E} = 2ME/\hbar^2$. Следовательно, взятые со знаком минус логарифмические производные функций Бесселя и многих других функций, включая логарифмические производные Γ -функций, являются R -функциями и допускают представление как в виде ряда Миттаг-Леффлера (6.5), так и в виде произведения (6.9). Хотя физическая R -функция является функцией, обратной логарифмической производной от волновой функции, теорема „5“ показывает, что эта логарифмическая производная, взятая со знаком минус, также является R -функцией.

б. Однородные R -функции

R -функция называется однородной, если она обладает плотностью полюсов ρ и конечной силой s и если в разложении (6.5) для R -функции отсутствует линейный член. Под „конечной силой“ следует понимать то, что для произвольного ϵ существует некоторое число $L(\epsilon)$ такое, что сумма вычетов всех полюсов внутри любого интервала длины $L > L(\epsilon)$ на вещественной оси лежит между $-(1-\epsilon)sL$ и $-(1+\epsilon)sL$, где $s > 0$. Термин „плотность полюсов“ имеет подобный смысл. Польза от введенных функций станет очевидной после того, как мы укажем несколько относящихся к ним теорем и введем специальный класс однородных функций, называемых „статистическими R -функциями“.

Тривиальным примером однородной R -функции может служить функция $\pi s \operatorname{tg} \pi r \mathcal{E}$, примером же неоднородной R -функции — функция, определенная соотношением (3.5), т. е. обратная логарифмической производной от волновой функции частицы, движущейся в прямоугольной потенциальной яме.

9) Если R -функция обладает некоторой плотностью полюсов, то эта плотность инвариантна относительно дробно-линейного преобразования (6.6). Эта теорема показывает, что если функция R в (1.15а) является однородной R -функцией, то функция $R/(1 - RS)$, где S — константа, будет иметь ту же плотность полюсов (или уровней), что и R .

10) Если R -функция имеет конечную силу s и если в ее разложении (6.5) отсутствует линейный член $\alpha\mathcal{E}$, то мнимая часть R -функции будет равномерно сходиться (по E) к величине πs , когда мнимая часть F величины $\mathcal{E} = E + iF$ стремится к бесконечности. Это свойство становится очевидным, если мы при вычислении мнимой части, когда F велико по сравнению со средним расстоянием между уровнями, заменим суммирование по уровням однородной R -функции вида (6.1) соответствующим интегрированием. Указанный выше пример однородной R -функции обладает этим свойством, поскольку $\operatorname{tg} i\infty = i$. Однородная R -функция обладает также тем свойством, что ее вещественная часть стремится к пределу, не зависящему от E , когда F стремится к бесконечности при условии, что средняя сила стремится к своему асимптотическому значению достаточно быстро (точнее, при условии, что величина $L(\epsilon)$, входящая в определение s , удовлетворяет при $\epsilon < 1$ дополнительному условию

$$L(\epsilon) < \frac{A}{\epsilon^\nu},$$

где A и ν положительны).

Поскольку дробно-линейное преобразование Q [см. (6.6)] однородной R -функции, удовлетворяющей такому дополнительному условию, также будет однородной R -функцией и также будет удовлетворять этому дополнительному условию, то мы можем получить силу s_Q и соответствующую вещественную часть Q_0 путем вычисления правой части в (6.6) при $\mathcal{E} = i\infty$. Для преобразования $Q = R/(1 - RS)$ получаем, что поскольку $R(\mathcal{E}) \rightarrow R_0 + i\pi s_R$, $Q(\mathcal{E}) \rightarrow Q_0 + i\pi s_Q$ при $\mathcal{E} \rightarrow i\infty$, где

$$Q_0 = \frac{R_0(1 - R_0S) - \pi^2 S s_R^2}{(1 - R_0S)^2 + (\pi s_R S)^2},$$

$$s_Q = \frac{s_R}{|(1 - R_0S)^2 + (\pi s_R S)^2|}.$$
(6.11)

Последнее из этих соотношений показывает, что величина θ_{μ}^2 , входящая в разложение типа (6.7а), имеет среднее значение, которое, вообще говоря, отличается от среднего значения величины γ_{λ}^2 , несмотря на то, что плотность уровней остается неизменной.

11) Для произвольной однородной R -функции расстояние между двумя ближайшими полюсами никогда не может превзойти определенной конечной величины, и имеется верхний предел для вычета любого полюса. Это сразу же вытекает из определения силы и соответствующего определения плотности полюсов.

в. Статистические R -функции

Однородная R -функция называется статистической R -функцией, если она обладает такими распределениями расстояний между полюсами и сил, которые не зависят от интервала, фигурирующего в определении этих распределений. Условие существования распределения для сил, обозначаемого через $s(r)$, заключается в том, что для любого положительного $\varepsilon < 1$ существует такое $L(\varepsilon)$, что для любого целого числа $L > L(\varepsilon)$ на вещественной оси

$$\int_0^{\varepsilon} \left| \frac{s(r) - s_L(r)}{L} \right| dr < \varepsilon,$$

где $s_L(r)$ — число вычетов, меньших r и принадлежащих полюсам из интервала L ; сила $s = \int s(r) dr$. Величины $s_L(r)$ и $s(r)$ являются монотонно убывающими функциями своего аргумента. Такое же условие существования имеет место и для расстояния D между соседними полюсами; оно приводит к функции распределения $P(D)$, определенной как число расстояний, больших D ; при этом плотность полюсов есть $\rho = P(0) = s(0)$. В качестве примера статистической R -функции укажем функцию

$$R = \operatorname{tg} \left[\eta \mathcal{E} + \vartheta + \sum_k \operatorname{arctg} \{ \operatorname{th}(\lambda_k x_k) \operatorname{tg}(\lambda_k (\mathcal{E} - x_k)) \} \right], \quad (6.12)$$

где индекс суммирования k пробегает конечное число значений, а все величины, обозначенные греческими буквами,

кроме ϑ , положительны. Вигнер [71] показал, что распределения для расстояний между полюсами и для сил R -функций в форме (6.12) являются инвариантными относительно ортогонального дробно-линейного преобразования [см. (6.6)], где $a_1^2 + b_1^2 = 1$, $a_2 = -b_1$, $b_2 = -a_1$ (при условии, что числа λ_R несоизмеримы с η). Однако относительно инвариантности „большинства“ статистических R -функций мы можем высказать лишь некоторые правдоподобные соображения.

Общее дробно-линейное преобразование однородной R -функции (6.6), удовлетворяющей дополнительному условию, может быть представлено в виде последовательности трех дробно-линейных преобразований. Первое из них является просто линейным преобразованием

$$R_n = \frac{R - R_0}{\pi S}, \quad (6.13)$$

где R_0 — величина, определенная в § 6,б после теоремы „10“. Полученная таким способом R -функция обладает тем свойством, что $R_n(E + i\infty) = i$; она называется нормированной однородной R -функцией. Вторым преобразованием является „ортогональное“ преобразование

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{aR_n + b}{-bR_n + a} = \\ &= \frac{R_n \cos \phi + \sin \phi}{-R_n \sin \phi + \cos \phi} = \frac{R_n + \operatorname{tg} \phi}{1 - R_n \operatorname{tg} \phi}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $a^2 + b^2 = 1$. Наконец, третьим преобразованием снова является линейное преобразование

$$Q = cQ_n + c'. \quad (6.15)$$

В случае преобразования (6.6а) находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi &= \frac{\pi S}{1 - R_0 S}, \quad c = \frac{\pi S}{q}, \\ c' &= \frac{R_0(1 - R_0 S) - (\pi S)^2 S}{q}, \end{aligned}$$

где

$$q = (\pi S)^2 + (1 - R_0 S)^2.$$

Первое и третье преобразования не меняют положения полюсов и лишь умножают все вычеты на одно и то же число. Следовательно, эти преобразования не влияют ни на распре-

деление расстояний между полюсами, ни на статистику от-
ношений вычетов. Второе преобразование не влияет на плот-
ность полюсов и преобразует одни нормированные R -функции
в другие нормированные R -функции. Однако это преобразо-
вание может изменить частоту, с которой встречаются опре-
деленные расстояния между полюсами, и статистику вычетов,
не меняя при этом средних значений каких-либо величин.

Для исследования второго преобразования [т. е. преоб-
разования (6.14)] представим R и Q_n в виде выражений (6.8),
в которых $a = 1$ и $b = 0$:

$$R_n = \operatorname{tg} g_R(\mathcal{E}), \quad Q_n = \operatorname{tg} g_Q(\mathcal{E}). \quad (6.16)$$

Из ортогональности преобразования следует, что

$$\dot{g}_Q = \frac{\dot{Q}_n}{1 + Q_n^2} = \frac{\dot{R}_n}{1 + R_n^2} = \dot{g}_R, \quad (6.17)$$

где точка означает дифференцирование по энергии, так что
производная

$$\dot{g}(\mathcal{E}) = \eta + \sum_{\nu} \frac{x_{\nu}}{x_{\nu}^2 + (\mathcal{E} - E_{\nu})^2} \quad (6.18)$$

является одной и той же для обоих представлений и по этой
причине называется „инвариантной производной“. Следова-
тельно, как R_n , так и Q_n могут быть представлены в одном
и том же виде

$$\operatorname{tg} \int_c^{\mathcal{E}} \dot{g}(\mathcal{E}) d\mathcal{E}, \quad (6.19)$$

но с разными значениями нижнего предела интегрирования c .
В самом деле, (6.17) дает

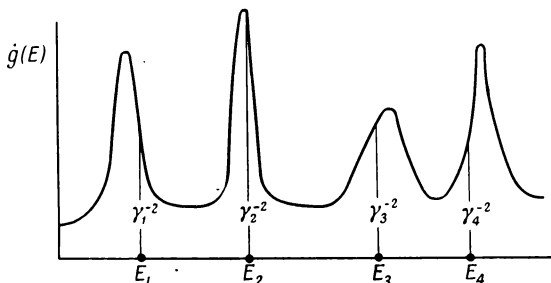
$$g_Q = g_R + \phi, \quad (6.20)$$

где $\phi = \operatorname{arctg}(b/a)$. Фиг. 1, где изображен график инвариант-
ной производной, показывает, что если задать какой-нибудь
полюс (скажем, E_1), то следующий полюс E_2 определяется
как точка абсциссы, для которой площадь под кривой \dot{g}
между точками E_1 и E_2 равна π . Взяв для R_n разложение

(6.1) и подставив его в (6.17), найдем, что приведенные ширины равны

$$\gamma_\lambda^2 = \frac{1}{\dot{g}(E_\lambda)}. \quad (6.21)$$

Уровни и ширины, соответствующие функции Q_n , могут быть получены тем же путем, но с другой исходной абсциссой.



Фиг. 1. Построение собственных значений E_ν и приведенных ширин γ_ν^2 с помощью инвариантной производной $\dot{g}(E)$, определяемой соотношением (6.18).

Если собственное значение E_1 задано, то положение уровня E_2 находится из того условия, что площадь под кривой между точками E_1 и E_2 равняется π . Положение E_3, E_4 и других полюсов может быть найдено подобным же образом.

На графике изображен случай, когда $\eta\Delta \ll \pi$ и $\chi_\nu \ll \Delta$, где Δ — среднее расстояние между уровнями E_ν . Этот случай соответствует разделенным пикам и слабому фону. Площадь под отдельным изолированным пиком равняется π , так что для изолированных пиков имеется взаимно однозначное соответствие между пиками и E_ν . В действительности же пики не являются изолированными; так, если полюс E_1 расположен вблизи некоторого максимума функции \dot{g} , последовательные значения E_ν располагаются в порядке возрастания слева от максимумов и начинают приближаться к максимумам справа. Следовательно, по крайней мере для $\eta > 0$ значения $\dot{g}(E_\nu)$, равные обратным значениям приведенных ширин, проходят через максимумы и минимумы, а их распределение оказывается не зависящим от положения E_1 .

Если χ_ν и E_ν в (6.18) не принимают каких-либо „особых“ значений или если $\eta \neq 0$, то вероятность найти определенное значение величины g будет в конце концов одной и той же, независимо от того, с какой точки на оси абсцисс мы начинаем. Поэтому представляется правдоподобным утверждение, что распределения ширин и расстояний между уровнями, соответствующие Q_n , будут такими же, как и для R_n , т. е. *распределения сил полюсов и расстояний между полюсами*

инвариантны относительно ортогонального дробно-линейного преобразования (6.14). Поскольку то же самое справедливо и для преобразований (6.13) и (6.15), то отсюда следует, что *распределения инвариантны относительно любого дробно-линейного преобразования* (6.6).

Будучи примененным к преобразованию (2.5), соответствующему изменению граничного условия, это утверждение позволяет получить нам то, что мы могли бы получить и на основе физических соображений, а именно, что распределения величин γ_λ^2 и D не зависят от выбора B . Другое применение указанного утверждения связано с преобразованием (6.6а). В этом случае мы можем сделать заключение, что статистические распределения величин θ_μ^2 и H_μ в соотношении (6.7а), вероятно, не изменяются под влиянием взаимодействий, имеющих во внешней области, которые ответственны за отличный от нуля фактор S в преобразовании (6.6а) при условии, что этот фактор может рассматриваться как постоянная величина, а величины χ_ν , E_ν и η , входящие в (6.18), не принимают каких-либо „особых“ значений.

Инвариантность законов распределения ничего не говорит о форме самих законов распределения. Чтобы вывести эти формы законов, требуется значительная дополнительная информация, например, о деталях распределения сил полюсов и расстояний между полюсами для функции $\dot{g}(\mathcal{E})$, определенной формулой (6.18). Вигнер [73], например, показал, что если величины E_ν в соотношении (6.18) распределены случайно и если величина χ_ν характеризуется некоторым произвольным распределением, то можно получить выражения для распределений величин γ_λ^2 и разностей последовательных значений E_λ .

До сих пор мы ничего не сказали о возможности корреляций между силой полюса и расстоянием между уровнями. Конечно, мы ожидаем, что предыдущие соображения относительно инвариантности распределений применимы к такого рода корреляциям. Однако, опять-таки инвариантность корреляций ничего не говорит ни о том, насколько эти корреляции существенны, ни о том, какова их форма.

Пусть, например, график функции \dot{g} в зависимости от энергии состоит из ряда хорошо разделенных пиков (т. е. если χ_ν много меньше расстояния между полюсами); тогда

поскольку площадь под каждым пиком равна $\sim \pi$, получаем, что любая корреляция между величинами γ_λ^2 и расстояниями между последовательными значениями E_λ , связанными с R -функцией, определяется непосредственно корреляцией (если она вообще имеется) между величинами x_ν и расстояниями между последовательными значениями E_ν , связанными с функцией g . С другой стороны, если функция g является сглаженной, то возникает дополнительная корреляция между величинами γ_λ^2 и расстояниями между последовательными значениями E_λ . Именно большие ширины соответствуют большим расстояниям, а малые ширины соответствуют малым расстояниям. Впервые на такого рода корреляцию указали, исходя из более качественных соображений, Фешбах, Пизли и Вайскопф [23]. На нее же, исходя из соотношения (2.9), указали также Тейхман и Вигнер [75]. С этими предположениями связана трудность, заключающаяся в том, что эти рассуждения основываются на неявном приписывании функциям свойств, относительно существования которых в действительности ничего не известно. Например, соотношение (2.9) само по себе не дает никакой информации о корреляциях [что можно видеть из рассмотрения случая $B = 0$, при котором соотношение (2.9) сводится к тождеству $\gamma_\lambda^2(0) = \gamma_\lambda^2(0)$]. Таким образом, относительно поведения функции $\gamma_\lambda^2(B)$ приходится *ad hoc* делать некоторые предположения. В работах [23, 75] предполагается, что ширины имеют довольно узкое распределение. Однако экспериментальные данные показывают, что это распределение является очень широким [76].

г. Физические R -функции

„Физические R -функции“, фигурирующие в теории ядерных реакций, не являются „однородными“ в смысле определения, данного выше. Хорошо известен тот экспериментальный факт, что средняя ширина уровня и функция силы полюса меняются на больших энергетических интервалах. Тем не менее, мы можем считать, что физические R -функции являются однородными в ограниченном смысле, именно, что они являются однородными в ограниченных энергетических интервалах. Действительно, можно найти интервал I , содержащий большое число уровней, внутри которого функция

силы полюса $s(E)$ и плотность уровней $\rho(E)$ определены и не меняются значительно на длине интервала. (Ясно также, что, если в этом интервале не меняются также и распределения, физические R -функции будут статистическими R -функциями в указанном выше ограниченном смысле.) Далее, мы можем истинную (физическую) R -функцию записать в виде суммы R -функции, обозначаемой через R' , которая *однородна* всюду, и слагаемого $-R_0$, которое учитывает отклонение истинной R -функции от однородной R -функции R' вне интервала I :

$$R(\mathcal{E}) = R'(\mathcal{E}) - R_0(\mathcal{E}). \quad (6.22)$$

Однородная R -функция R' конструируется таким образом, чтобы ее полюса в интервале I совпадали с полюсами функции R , а соответствующие вычеты были равны. Вне интервала I полюса и вычеты функции R' должны быть определены таким образом, чтобы обеспечить ее однородный характер. Эти полюса и вычеты будут, вообще говоря, отличаться от полюсов и вычетов функции R . Вследствие этого для приближенного вычисления R_0 представляется разумным суммирование, содержащееся в $R' - R$, заменить интегрированием, после чего для $\mathcal{E} = E + iF$ (причем $F > 0$) можно получить

$$R_0(\mathcal{E}) \equiv R' - R \approx i\pi s(E) - \bar{R}(\mathcal{E}), \quad (6.23a)$$

где величина

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = \int \frac{s(E') dE'}{E' - \mathcal{E}} \quad (6.23b)$$

является трансформантой Стильтьеса функции $s(E)$. Если функция $s(E)$ может быть определена и если она медленно меняется на энергетическом интервале, содержащем большое число уровней, функция R_0 также будет медленно меняться и, таким образом, будет почти постоянной в интервале типа I .

Трансформантой, обратной к (6.23b), является функция

$$s(E) = \lim_{F \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \bar{R}(\mathcal{E}) \right]. \quad (6.23в)$$

Следовательно, для расчета функции R на вещественной оси мы можем рассмотреть соотношение

$$R(E) = R'(E) + \lim_{F \rightarrow +0} \operatorname{Re} \bar{R}(\mathcal{E}), \quad (6.24)$$

где член с пределом понимается просто как главное значение интеграла $\int s(E') dE' / (E' - \mathcal{E})$. С другой стороны, когда мнимая часть F велика по сравнению с расстоянием между уровнями, функция $R'(\mathcal{E})$ стремится, согласно теореме „10“, к $i\pi s(E)$, и, следовательно,

$$R(\mathcal{E}) \sim \bar{R}(\mathcal{E}). \quad (6.25)$$

Так как предполагается, что трансформанта $\bar{R}(\mathcal{E})$ является медленно меняющейся функцией энергии E , то сильная зависимость функции R от энергии, или „резонансная структура“ функции R , которая имела место для вещественных значений энергии, в этом предельном случае не является более очевидной. Это свойство функции $R(\mathcal{E})$ играет важную роль при рассмотрении процесса образования составного ядра в области перекрывающихся уровней (см. гл. XI, § 2).

§ 7. Рассмотрение связанных состояний

Несмотря на то, что R -матричная теория была разработана для трактовки ядерных реакций и рассеяния, представляется весьма интересным применить ее к исследованию связанных состояний.

В случае простых двухчастичных систем связанные состояния появляются при тех энергиях, при которых логарифмическая производная внутренней волновой функции совпадает с логарифмической производной внешней волновой функции, обращающейся в нуль на бесконечности. Логарифмическая производная внешней волновой функции представляет собой величину S_c^- , определяемую соотношением (III. 4.4a), а логарифмическая производная внутренней волновой функции равна величине $(R^{-1} + B)$ [см. (2.4)]. Поскольку для незаряженных частиц величина S_c^- монотонно возрастает, так же как и величина R , то каждому из уровней E будет соответствовать либо связанное, либо резонансное состояние (хотя и сдвинутое по энергии относительно E_λ).

Амплитуда внешней волновой функции зависит от значения инвариантной величины γ^2 [см. (2.8)] или же от ее безразмерного эквивалента θ^2 [см. (3.10)]. Если полная волновая

функция нормируется во всем конфигурационном пространстве на единицу, то имеет место соотношение

$$\int_0^a u^2 dr + \int_a^\infty u^2 dr = 1. \quad (7.1)$$

Второе слагаемое в (7.1) можно преобразовать с помощью соотношения

$$\int_a^\infty u^2 dr = -au^2(a) \left(\frac{\partial S}{\partial(\rho^2)} \right)_a, \quad (7.2)$$

которое может быть получено из формулы Грина, подобной (1.3), где, однако, $E_1 \rightarrow E_2$, а интеграл берется в пределах от конечного радиуса a до бесконечности. Амплитуда внешней волновой функции выражается через константу нормировки N , на которую необходимо умножить волновую функцию типа O [см. (III. 2.18)], чтобы получить нормировку (7.1):

$$u(r) = \theta \left(\frac{2N}{a} \right)^{1/2} \left[\frac{O(r)}{O(a)} \right] \quad (r \geq a). \quad (7.3)$$

Из определения величины θ [см. (3.10)] и из (1.10a) находим

$$N^{-1} = 1 - 2\theta^2 \left[\frac{\partial S}{\partial(\rho^2)} \right]_a. \quad (7.4)$$

Величина $[\partial S / \partial(\rho^2)]_a$ отрицательна для связанных каналов; она протабулирована в Приложении для нескольких значений момента количества движения. Для малых значений величины θ амплитуда прямо пропорциональна θ , что и следовало ожидать, поскольку величина θ пропорциональна амплитуде волновой функции на поверхности ядра, если внутренняя функция нормирована на единицу.

§ 8. Аналитические свойства функции столкновений на комплексной плоскости; условие причинности

В последнее время существенное внимание было обращено на ограничения, которые накладывает принцип причинности на аналитические свойства функции столкновений $U(k)$, рассматриваемой как функция волнового числа k . Для исследования этого вопроса установим аналитическое продолжение

функции $U(k)$ с положительной вещественной оси на комплексную плоскость. В частности, рассмотрим некоторые соотношения между функциями $U(k)$, $U(k^*)$ и $U(-k)$, которые следуют из общих физических принципов (принцип причинности мы пока оставим в стороне).

Функция столкновений $U(k)$ определяется как взятый со знаком минус коэффициент при выходящей волне $\exp(ikr)$, которой на бесконечности соответствует входящей волне $\exp(-ikr)$. Другими словами, асимптотическая форма волновой функции ψ_k имеет следующий вид:

$$r\psi_k(r) \sim \exp(-ikr) - U(k)\exp(ikr). \quad (8.1)$$

Здесь функция ψ_k представляет собой решение уравнения

$$H\psi_k = E\psi_k,$$

где энергия E связана с волновым числом k соотношением $E = (\hbar^2 k^2 / 2m)$. Предположив, что оператор H является самосопряженным, получим для двух решений ψ_1 и ψ_2 , соответствующих энергиям E_1 и E_2 ,

$$(E_1^* - E_2) \int_{r < a} \psi_1^* \psi_2 d\tau \sim \left[(r\psi_1)^* \frac{d}{dr} (r\psi_2) - (r\psi_2) \frac{d}{dr} (r\psi_1^*) \right]_a, \quad (8.2)$$

где a — радиус произвольно большой сферы. При подстановке $k_1 = k_2$ левая часть обращается в нуль, и последующее использование (8.1) дает

$$U(k) [U(k^*)]^* = 1. \quad (8.3)$$

Соотношение (8.3) является обобщением для комплексной плоскости обычного соотношения унитарности, которое для вещественных положительных значений k имеет вид

$$U(k)U^*(k) \equiv |U(k)|^2 = 1.$$

Связь между $U(k)$ и $U(-k)$ можно получить, если в (8.1) заменить k на $-k$ и умножить полученное выражение на $-U(k)$:

$$-U(k)r\psi_{-k}(r) \sim [U(k)U(-k)]\exp(-ikr) - U(k)\exp(ikr).$$

Сравнивая это выражение с (8.1) и предполагая, что для данной выходящей волны имеется только одна входящая

волна, получаем

$$U(k)U(-k) = 1. \quad (8.4)$$

Конкретное выражение (1.14), которое функция U принимает в теории с R -функциями, удовлетворяет соотношениям (8.3) и (8.4). (Это имеет место благодаря тому, что функция $U(k)$ может быть записана в виде $\exp[2i\delta(k)]$, где $\delta(k)$ — вещественная нечетная функция своего аргумента.) Следует ожидать, что соотношения (8.3) и (8.4) будут справедливы и для функций U , получаемых в конкретной теории, поскольку эти соотношения следуют из самых общих физических принципов, на которые должна опираться всякая конкретная теория. Соотношение (8.3), если его рассматривать на вещественной оси, является следствием закона сохранения, выраженного в самосопряженности оператора H . Согласно Ван-Кампену [77], соотношение (8.4), если его рассматривать на вещественной оси, оказывается справедливым при условии, что полная энергия имеет нижнюю границу.

Обратимся к условию причинности. Ван-Кампен [78] дал количественную формулировку этого условия и показал, что из принципа причинности и закона сохранения, упомянутого выше, следует, что функция $U(k)$ регулярна в первом квадранте комплексной k -плоскости (за исключением возможных полюсов на мнимой оси) и что ее можно записать в виде

$$U(k) = \prod_{\lambda} \left(\frac{1 - k^2/k_{\lambda}^2}{1 - k^2/k_{\lambda}^{*2}} \right) \exp \left(ibk^2 - i \int_0^{\infty} \frac{s^2 k^2 - 1}{s^2 + k^2} d\alpha(s) \right),$$

где b — неотрицательная константа, а $\alpha(s)$ — функция с ограниченным изменением. Используя соотношение (8.4), получаем, что функция $U(k)$ регулярна во втором квадранте и что ее можно записать более конкретно в виде

$$U(k) = e^{-2ia\alpha} \prod_{\lambda} \left(\frac{1 - k/k_{\lambda}}{1 - k/k_{\lambda}^*} \frac{1 + k/k_{\lambda}^*}{1 + k/k_{\lambda}} \right) \prod_{\mu} \left(\frac{1 - k/iP_{\mu}}{1 + k/iP_{\mu}} \right), \quad (8.5)$$

где α — константа, бóльшая или равная a (a — внутренний радиус области, где отсутствуют взаимодействия), а величина iP_{μ} дает положение μ -го нуля функции U на мнимой оси.

Выражение (8.5) для функции U эквивалентно соотношению дисперсионного типа:

$$\frac{U(k) e^{2iak} - 1}{k^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} [U(k') e^{2iak'}]}{k' (k'^2 - k^2)} dk' - \sum_n \frac{2b_n}{K_n^2 (K_n^2 + k^2)}, \quad (8.6)$$

где величины $\hbar^2 K_n^2 / 2M = -E_n$ являются сингулярными точками, отвечающими связанным состояниям, а b_n — вычеты в этих точках.

Поводом для исследования аналитической формы функции $U(k)$ послужили замечание Вигнера и статья Шустера и Тиомно [41], которые предположили (хотя и не смогли дать строгого доказательства), что аналитическая форма функции $U(k)$, получающейся в теории R -функций, является следствием условия причинности. Хоть это сразу и не видно из (8.5), можно, однако, показать [79], что выражение (8.5) для $U(k)$ эквивалентно частному случаю (1.14), полученному в теории R -функции при наличии взаимодействия, сосредоточенного в ограниченной области. Другими словами, выражение (8.5) для функции $U(k)$ означает, что функция $R(E)$, определяемая соотношением

$$R(E) = \frac{1}{ik\alpha} \frac{U e^{2ik\alpha} - 1}{U e^{2ik\alpha} + 1}, \quad (8.7)$$

где $E = \hbar^2 k^2 / 2M$, обладает в сущности теми же свойствами, какие имеет определенная ранее R -функция, т. е. R является вещественной и мероморфной функцией и голоморфной в верхней энергетической полуплоскости.

Любой зависящий от момента количества движения потенциальный барьер или дальнедействующий потенциал могут фигурировать в теории, которая исходит из принципа причинности, только в том случае, если последние обрываются и включены во внутренние взаимодействия. Таким образом, как это можно было бы и ожидать, при получении вида функции $U(k)$ из одного лишь условия причинности нет возможности отличить „внутренние“ взаимодействия от „внешних“ барьеров. Лишь при более частном выводе, основанном на теории R -функции, может быть учтена физическая информация этого типа.

§ 9. Некоторые особенности энергетической зависимости сдвигов фаз δ_l

В § 1 сдвиг фазы δ_l определялся через функцию столкновений с помощью соотношения (1.15):

$$U_l = \exp(2i\delta_l).$$

Это определение приводит нас к соотношению (1.15а) между δ_l и R -функцией

$$\delta_l = \text{arctg} \left(\frac{R_l P_l}{1 - R_l S_l} \right) - \phi_l + \omega_l$$

и к следующему соотношению между δ_l и эффективным сечением для l -й парциальной волны:

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi (2l + 1)}{k^2 + (k \text{ctg } \delta_l)^2}. \quad (9.1)$$

а. Предельное соотношение Вигнера [80] для производной по энергии

Вигнер заметил, что следствием положительно определенного характера величины

$$\frac{dR_l}{dE} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{(E_{\lambda} - E)^2}$$

является существование нижнего предела для величин $(d\delta_l/dE)$. При дифференцировании соотношения (1.15а) по E мы получаем перед производной dR_l/dE положительный множитель

$$P_l [(1 - R_l S_l)^2 + (R_l P_l)^2]^{-1}.$$

Следовательно, если в дифференциальном соотношении опустить слагаемое, содержащее dR_l/dE , то мы получим нижний предел для величины $d\delta_l/dE$. Рассмотрим в качестве примера случай, соответствующий s -нейтронам, когда $S = 0$, $P = \rho$, $\omega = 0$ и $\phi = \rho$:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dE} &= \frac{\rho}{1 + (\rho R)^2} \frac{dR}{dE} + \left(\frac{R}{1 + (\rho R)^2} - 1 \right) \frac{d\rho}{dE} > \\ &> \left(\frac{\sin 2(\delta + \rho)}{2\rho} - 1 \right) \frac{d\rho}{dE}. \quad (9.2) \end{aligned}$$

Пусть при какой-нибудь энергии нам задана величина δ . Тогда соотношение (9.2) даст нам нижний предел для значения производной $d\delta/dE$ при той же энергии. Для низких энергий $(dp/dE) \gg (dR/dE)$, так что неравенство по существу превращается в равенство. В этом предельном случае соотношение (9.2) выражает лишь тот известный факт, что при очень малых энергиях фаза δ пропорциональна величине ρ .

б. Разложение по эффективному радиусу

Работы Блатта и Джексона [81] и Бете [82] показали, что в некоторых случаях величину $f(k) \operatorname{ctg} \delta_l$ полезно рассматривать как функцию, представленную в виде ряда по степеням величины k^2 . Если функция $f(k)$ выбрана удачно, то степенной ряд может быстро сходиться, так что энергетическая зависимость эффективного сечения (9.1) может быть описана с помощью всего лишь двух или трех параметров, а не бесконечного числа параметров, необходимого при использовании соотношения (1.15а) с R -функцией. Эти параметры соответствуют коэффициентам $R^{(0)} \equiv R(E=0)$, $R^{(1)} \equiv (dR/dE)_{E=0}$, ..., входящим в разложение Тейлора функции $R(E)$ около нулевой энергии падающих частиц ($E=0$):

$$R(E) = R^{(0)} + ER^{(1)} + \frac{E^2}{2!} R^{(2)} + \dots \quad (9.3)$$

Это соответствие показывает, что разложение по эффективному радиусу справедливо в энергетических областях, где функция R меняется не сильно. Этим способом, например, нельзя исследовать те области энергии, которые содержат резонансы [т. е. бесконечности функции $R(E)$]. Условие того, что функция меняется медленно, хорошо выполняется в таких случаях, как рассеяние нуклона на нуклоне, в которых обычно применяется теория эффективного радиуса. В тех случаях, когда имеется столь большое число нуклонов, что оказывается возможным образование большого числа составных состояний, указанное условие уже не выполняется. И действительно, имеется лишь небольшое число легких ядер, для которых теория эффективного радиуса имеет известную ценность. Другими словами, область практического применения разложения, соответствующего R -функции, почти полностью отли-

чается от области применимости разложения по эффективному радиусу. Связь между этими двумя теориями была исследована Тейхманом [83], который начал свой анализ с того, что соотношение (1.15а) записал в виде

$$\operatorname{ctg}(\delta_l - \omega_l) = -\frac{G_l - \rho G'_l R_l}{F_l - \rho F'_l R_l}, \quad (9.4)$$

где F и G — функции, определенные в гл. III (взятые при $r = a$), а штрих означает дифференцирование по ρ .

Для s -нейтронов соотношение (9.4) может быть сразу же приведено к виду, соответствующему стандартному разложению по эффективному радиусу:

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\alpha + \frac{1}{2} r_0 k^2 - \rho r_0^3 k^4 \dots \quad (9.5)$$

со следующими коэффициентами:

$$\text{„Длина рассеяния“} = \frac{1}{\alpha} = a - aR^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \text{„Эффективный радиус“} &= & (9.6) \\ &= r_0 = 2 \left[a - a^2 \alpha + \frac{a^2 a^3}{3} - \frac{\hbar^2 a a^3}{2M} R^{(1)} \right]. \end{aligned}$$

Так как $k \operatorname{ctg} \delta$ не может зависеть от выбора величины a , то от этого выбора не могут зависеть и коэффициенты α , r_0 и т. д. Следовательно, соотношения (9.6) в действительности определяют зависимость величин $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, ..., от a . Соотношения (9.6) можно выразить через логарифмическую производную $f = R^{-1}$:

$$\begin{aligned} [f]_{E=0}^{-1} &= R^{(0)} = 1 - \frac{1}{\beta}, \\ \gamma^2(E=0) &\equiv - \left(\frac{df}{dE} \right)_{E=0}^{-1} = - \frac{R^{(1)}}{[R^{(0)}]^2} = & (9.7) \\ &= \frac{\hbar^2}{2Ma^2} \left[\frac{(1-\beta)^2}{1-\beta + \frac{1}{3}\beta^2 - r_0/2a} \right], \end{aligned}$$

где $\beta = a\alpha$.

Физический смысл коэффициентов $1/\alpha$ и r_0 отчасти можно выяснить, если рассмотреть прямоугольную потенциальную

яму, имеющую радиус a и глубину V , в следующих двух случаях:

$$1) \text{ Резонанс при } E = 0; R^{(0)} = \infty, \frac{\hbar^2}{2Ma^2} \frac{R^{(1)}}{[R^{(0)}]^2} = 1:$$

$$\frac{1}{a} = \infty, \quad r_0 = a.$$

$$2) \text{ „Антирезонанс“ при } E = 0; R^{(0)} = 0:$$

$$\frac{1}{a} = a, \quad r_0 = \frac{2a}{3} \left[1 - \frac{3}{8V} \left(\frac{\hbar^2}{Ma^2} \right) \right].$$

Эти соотношения иллюстрируют тот факт, что величина α чувствительна к положению ближайшего к $E = 0$ резонанса, в то время как значение величины r_0 к этому гораздо менее чувствительно и всегда близко к значению радиуса ямы.

Для s -протонов разложение по эффективному радиусу мы можем получить из (9.4) и (9.3), если воспользуемся разложениями функций F и G :

$$\frac{2\pi\eta (k \operatorname{ctg} \eta)}{e^{2\pi\eta} - 1} + \eta k g(\eta) = -\alpha_c + \frac{1}{2} r_{0c} k^2 - p_c r_{0c}^3 k^4, \quad (9.8)$$

где

$$g(\eta) = -2 \ln \eta + 2\eta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu^2 + \eta^2)}. \quad (9.9)$$

Индекс c указывает, что соответствующие величины зависят от кулоновского поля. Этого и следовало ожидать, поскольку добавление одного потенциала к другому меняет сдвиг фазы, вообще говоря, довольно сложным образом. Если добавленный потенциал является гладким, то мы можем надеяться, что величина эффективного радиуса r_0 сильно не изменится, даже если при этом длина рассеяния изменится существенным образом. Степень изменения длины рассеяния зависит от величины добавленного потенциала. В случае добавления внешнего кулоновского поля Тейхман [83] получил для разности $\alpha_c - \alpha$ приближенное выражение

$$\alpha_c - \alpha \approx 2\eta k [\ln 2\eta a + \gamma], \quad (9.10)$$

где γ — постоянная Эйлера, а величина a берется равной радиусу короткодействующего (ядерного) взаимодействия, т. е., в сущности, равной радиусу r_0 . Джексон и Блатт [84]

показали, что в квадратных скобках должен быть еще дополнительный член, равный $-0,824$, при условии, что кулоновский потенциал действует также и во внутренней области.

Разность (9.10) определяется в основном величиной отношения $2\eta k$ к α . Для рассеяния протонов на протонах величина $2\eta k$ составляет всего лишь несколько процентов от величины 10^{13} см^{-1} , так что, исключая случай малых значений величины α , можно сделать вывод о том, что влияние кулоновского поля на α мало. Однако, в общем случае произвольного ядерного столкновения величина $2\eta k$ будет гораздо больше, и между величинами α и α_c , которые в этом случае могут сильно отличаться друг от друга, никакого простого соотношения не существует.

Глава V

Р-МАТРИЦА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ МНОГИХ КАНАЛОВ

Рассмотрение, проведенное в гл. IV, можно легко обобщить и учесть наличие спинов у частиц и возможность многих каналов реакции. Прежде всего получим обобщенный вариант основного соотношения **R**-матричной теории. Для вывода этого соотношения можно идти различными путями. Как и в гл. IV, мы приведем вывод, основанный на применении теоремы Грина.

§ 1. Использование теоремы Грина

Общий вывод, учитывающий как возможность рассеяния, так и возможность различных реакций, основывается на применении теоремы Грина для случая многих каналов, которая является аналогом теоремы Грина для случая одного канала (IV. 1.3). Вывод формулы Грина для случая многих каналов аналогичен выводу соотношения (IV. 1.3). В этом случае, однако, „поверхностный“ член (IV. 1.3) заменяется, как и следовало ожидать, суммой подобных членов, каждый из которых отвечает одному из каналов реакции.

Как и в предыдущем случае [см (IV. 1.1)], запишем волновые уравнения для системы из A нуклонов, соответствующие двум энергиям:

$$H\Psi_1 = E_1\Psi_1, \quad H\Psi_2 = E_2\Psi_2, \quad (1.1)$$

где H — гамильтониан. Умножим первое из этих уравнений на Ψ_2^* , а уравнение, комплексно сопряженное второму, — на Ψ_1 ; проинтегрируем разность полученных таким образом уравнений по объему внутренней области τ :

$$(E_2 - E_1) \int_{\tau} \Psi_2^* \Psi_1 d\tau = \int_{\tau} [(H\Psi_2)^* \Psi_1 - \Psi_2^* H\Psi_1] d\tau. \quad (1.2)$$

Предположим, что член V , описывающий в гамильтониане H взаимодействие, является самосопряженным, так что

$$\int_{\tau} [(V\Psi_2)^*\Psi_1 - \Psi_2^*V\Psi_1] d\tau = 0. \quad (1.3)$$

Оставшиеся члены, соответствующие кинетической энергии, могут быть проинтегрированы с помощью теоремы Грина (в 3А-мерном пространстве). В результате получаем

$$\begin{aligned} (E_2 - E_1) \int_{\tau} \Psi_2^*\Psi_1 d\tau &= \int_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\hbar^2}{2M_c} \right) (\Psi_2^* \text{grad}_n \Psi_1 - \Psi_1 \text{grad}_n \Psi_2^*) d\mathfrak{S} = \\ &= \sum_c [V_{2c}^* D_{1c} - V_{1c} D_{2c}^*]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Последнее равенство получено путем замены Ψ и $\text{grad}_n \Psi$ их значениями на поверхности (III. 4.2). Примечательно, что вследствие той формы, которую имеет оператор кинетической энергии на поверхности канала (см. § 2 гл. III), в соотношение (1.4) вошла приведенная масса канала M_c . При вычислении поверхностного интеграла (1.4) принималось во внимание лишь возможность распада составного ядра на две части; распадом на три, четыре и более частей пренебрегалось. Потому соотношение (1.4) не может быть использовано для описания, например, реакции $(n, 2n)$. Однако если эту реакцию можно интерпретировать как последовательность двух процессов испускания нейтронов, то соотношение (1.4) может быть использовано (см. § 2 гл. XIII).

Полезно рассмотреть частный случай соотношения (1.4), когда $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$ и $E_1 = E_2 = E$. В этом случае, беря вещественную и мнимую части (1.4), получаем

$$\int_{\tau} |\Psi|^2 d\tau = \sum_c \left\{ -2 \text{Im}(f_c) \text{Im} \left(V_c \frac{dV_c^*}{dE} \right) - \frac{d}{dE} [\text{Re}(f_c)] |V_c|^2 \right\} \quad (1.5)$$

и

$$O = \sum_c |V_c|^2 \text{Im}(f_c), \quad (1.6)$$

где $\operatorname{Re}(f_c)$ и $\operatorname{Im}(f_c)$ определены как вещественная и мнимая части логарифмических производных

$$f_c = \frac{D_c}{V_c}. \quad (1.7)$$

Соотношение подобного же типа имеет место для интеграла перекрытия, взятого по объему между поверхностями \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2 данного канала c . Применяя соотношение (1.4) к такому объему, получаем

$$(E_2 - E_1) \int_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2} \Psi_2^* \Psi_1 d\tau = \left[V_{2c}^* D_{1c} - V_{1c} D_{2c}^* \right]_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2}. \quad (1.8)$$

Положив, как и в (1.5), $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$ и $E_1 = E_2 = \mathfrak{E}$, приходим к соотношению

$$\int_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2} |\Psi|^2 d\tau = \left[-2 \operatorname{Im}(f_c) \operatorname{Im} \left(V_c \frac{dV_c^*}{dE} \right) - \frac{d}{dE} \operatorname{Re}(f_c) |V_c|^2 \right]_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2}. \quad (1.9)$$

§ 2. Основное соотношение R-матричной теории

Основным соотношением R-матричной теории является обобщение соотношения (IV.1.10) на случай многих каналов. Это соотношение используется для определения матрицы столкновений \mathbf{U} точно так же, как соотношение (IV.1.10) использовалось для определения функции столкновений U в случае одного канала. Оно может быть получено с помощью формулы Грина (1.4).

По аналогии со случаем одного канала (IV.2.1) запишем граничные условия, которым должны удовлетворять волновые функции полной системы состояний $X_{\lambda JM}$ (III.3.3) на поверхностях \mathfrak{S}_c . Выберем эти условия в следующем виде:

$$\frac{D_{\lambda c}}{V_{\lambda c}} \left(\equiv \frac{\delta_{\lambda c}}{\gamma_{\lambda c}} \right) = B_c, \quad (2.1)$$

где B_c не зависит от λ (здесь подразумеваются также опущенные для простоты индексы J и M).

Применив формулу (1.4) к любым двум частным решениям X_λ и $X_{\lambda'}$, соответствующим энергиям E_λ и $E_{\lambda'}$, убеждаемся, что при таком выборе граничных условий все частные решения взаимно ортогональны. Кроме того, их можно считать нормированными. Таким образом,

$$\int_{\tau} X_{\lambda'}^* X_{\lambda} d\tau = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.2)$$

Волновая функция Ψ может быть разложена в объеме τ в ряд по X_λ :

$$\Psi = \sum_{\lambda} A_{\lambda} X_{\lambda}, \quad (2.3)$$

где зависящие от энергии коэффициенты A_{λ} определяются следующим образом:

$$A_{\lambda} = \int_{\lambda} X_{\lambda}^* \Psi d\tau. \quad (2.4)$$

Как и ранее, эти коэффициенты могут быть определены путем применения формулы (1.4) к решению Ψ , соответствующему энергии E , и к решению X_λ , соответствующему энергии E_λ ; для Ψ и $\text{grad}_n \Psi$ на поверхности \mathfrak{S} могут быть использованы разложения (III.4.3). Таким образом, мы сразу же находим, что

$$A_{\lambda} = (E_{\lambda} - E)^{-1} \sum_c D_c^0 \gamma_{\lambda c},$$

$$D_c^0 = D_c - B_c V_c, \quad (2.5)$$

где в соответствии с определением (III.4.8a) $V_{\lambda c}$ заменено на $\gamma_{\lambda c}$. Теперь разложение (2.3) принимает следующий вид:

$$\Psi = \sum_c \left[\sum_{\lambda} \frac{X_{\lambda} \gamma_{\lambda c}}{E_{\lambda} - E} \right] D_c^0. \quad (2.6)$$

Это соотношение связывает значение Ψ в любой точке в объеме τ с ее „производными“ D_c^0 на поверхности \mathfrak{S} . Оно является аналогом соотношения (IV.1.8). Величина в квадратных скобках в соотношении (2.6) может рассматриваться как функция Грина. Умножив (2.6) на φ_c^* , проинтегрировав

по \mathfrak{S} и используя соотношение (III. 4.8а), получим основное соотношение \mathbf{R} -матричной теории:

$$V_{c'} = \sum_c R_{c'c} D_c^0, \quad (2.7a)$$

где

$$R_{c'c} = \sum_\lambda \frac{\gamma_{\lambda c'} \gamma_{\lambda c}}{E_\lambda - E}. \quad (2.8a)$$

Соотношения (2.7а) и (2.8а) более удобно переписать в матричном обозначении

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{D}^0, \quad (2.7б)$$

$$\mathbf{R} = \sum_\lambda \frac{\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda}{E_\lambda - E}. \quad (2.8б)$$

Здесь \mathbf{V} и \mathbf{D}^0 являются векторами-столбцами с компонентами V_c и D_c^0 . Матрица $(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)$ является диадой векторов γ_λ с компонентами $\gamma_{\lambda c}$. Матрица \mathbf{R} является симметричной и вещественной (поскольку вещественны $\gamma_{\lambda c}$).

Теперь целесообразно рассмотреть так называемый „интеграл от квадрата“ по внутренней области, который является мерой вероятности того, что все частицы будут находиться вместе, образуя „составную систему“ (которая может и не являться составным ядром), имеющую размеры порядка размеров ядра. Этот интеграл можно вычислить, используя (2.6):

$$\int_\tau |\Psi|^2 d\tau = \sum_\lambda \left| \sum_c (E_\lambda - E)^{-1} D_c^0 \gamma_{\lambda c} \right|^2 = \sum_{cc'} D_c^0 \frac{d}{dE} (R_{cc'}) D_{c'}^{0*}. \quad (2.9a)$$

В матричном обозначении этот интеграл может быть выражен в виде скалярного произведения

$$\int_\tau |\Psi|^2 d\tau = \left(\mathbf{D}^{0*}, \frac{d}{dE} (\mathbf{R}) \mathbf{D}^0 \right). \quad (2.9б)$$

Обозначенное здесь через (\mathbf{x}, \mathbf{y}) скалярное произведение двух векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} получается умножением транспонированного вектора \mathbf{x} на вектор \mathbf{y} . (При этом мы не берем здесь комплексного сопряжения вектора \mathbf{x} .) Подобным же образом может быть выражен и интеграл перекрытия для волновых

функций $\Psi_1(E_1)$ и $\Psi_2(E_2)$, у которых производные, взятые на поверхности, равны D_{1c}^0 и D_{2c}^0 :

$$\int_{\tau} \Psi_1^* \Psi_2 d\tau = \sum_{\lambda} \left[\sum_c (E_{\lambda} - E_1)^{-1} \gamma_{\lambda c} D_{1c}^{*0} \right] \times \\ \times \left[\sum_c (E_{\lambda} - E_2)^{-1} \gamma_{\lambda c} D_{2c}^0 \right] = (D_1^{*0}, R_{12}(E_1, E_2) D_2^0), \quad (2.10)$$

где

$$R_{12}(E_1, E_2) = \frac{R(E_1) - R(E_2)}{E_1 - E_2} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{(E_{\lambda} - E_1)(E_{\lambda} - E_2)}.$$

Приняв во внимание (2.7), мы видим, что выражения для интегралов (2.9) и (2.10) эквивалентны полученным ранее выражениям (1.5) и (1.4).

§ 3. Другие выводы основного соотношения R-матричной теории

Известны также три других вывода соотношения (2.7). Два из них весьма близки к только что рассмотренному выводу. Третий же отличается от них тем, что он основан на принципе причинности.

а. Вывод Вигнера

В первых работах Вигнера по R-матричной теории [16, 17] волновая функция не предполагалась непрерывной на поверхности \mathcal{S} , как при выводе (2.7) из соотношения (2.6). Вместо этого к двум решениям, имеющим вид (2.6) и относящимся к различным энергиям, снова применялась формула Грина (1.4). В результате матрица (2.7) принимала вид

$$R = R^{\infty} + \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{E_{\lambda} - E}, \quad (3.1)$$

где R^{∞} — произвольная, не зависящая от энергии симметричная вещественная матрица. Таким образом, требование непрерывности эквивалентно требованию равенства R^{∞} нулю. Вывод формулы (3.1) проводится следующим образом.

Подставим в формулу Грина (1.4) разложения (2.6) для любых двух решений Ψ_1 и Ψ_2 , соответствующих энергиям E_1 и E_2 . Тогда получим

$$\sum_c (V_{2c}^* D_{1c}^0 - V_{1c} D_{2c}^{0*}) = \\ = (E_2 - E_1) \sum_{c'c''} \left(\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c'} \gamma_{\lambda c''}}{(E_{\lambda} - E_1)(E_{\lambda} - E_2)} \right) D_{1c'}^0 D_{2c''}^{0*}. \quad (3.2)$$

Если считать, что V_{2c}^* и V_{1c} определяются соотношениями (2.7), то после некоторых преобразований приходим к следующему соотношению:

$$\sum_{cc'} \left[(R_{2cc'}^* - R_{1cc'}) - \right. \\ \left. - \left(\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E_2} - \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E_1} \right) \right] D_{1c}^0 D_{2c'}^{0*} = 0. \quad (3.3)$$

Положив сначала одно из значений D_{1c}^0 и одно из значений $D_{2c'}^{0*}$ равными единице, а все остальные равными нулю, приравняв затем единице $D_{1c'}^0$ и D_{2c}^{0*} и положив все остальные компоненты равными нулю, убедимся, что матрица \mathbf{R} имеет форму (3.1) и обладает всеми указанными выше свойствами для \mathbf{R}^{∞} . Симметричную постоянную матрицу \mathbf{R}^{∞} можно формально заменить суммой

$$\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{E_{\lambda} - E},$$

в которой E_{λ} и γ_{λ} бесконечны, однако так чтобы сумма имела конечное значение.

б. Вывод из вариационного принципа

Мы обсудим этот вывод для случая одного канала. Аналогичным образом может быть произведено обобщение и на случай многих каналов [85, 86].

Обычный вариационный принцип для энергии связанного состояния здесь не пригоден. Надо сформулировать этот принцип так, чтобы для любой *данной* энергии он приводил

к стационарному значению логарифмической производной $f_E(a)$ волновой функции в некоторой „внешней“ точке $r = a$. Кон [85] записал этот принцип следующим образом:

$$f_E(a) = \frac{2Ma_0}{\hbar^2} \frac{\int_0^a u_E (H - E) u_E dr}{u_E^2(a)} - \frac{a}{u_E} \frac{du_E}{dr}. \quad (3.4)$$

При малых вариациях функции $u_E(r)$ вблизи точной волновой функции правая часть стационарна; следовательно, $\delta f_E = 0$. Поступая так же, как и при выводе соотношения для **R**-функции, проводившемся в § 1 гл. IV и § 2 гл. V, рассмотрим пробную волновую функцию в виде

$$u_E = \sum_{\lambda} A_{\lambda} u_{\lambda}, \quad (3.5)$$

где u_{λ} образуют полную ортонормированную систему волновых функций, т. е. являются точными решениями уравнения

$$H u_{\lambda} = E_{\lambda} u_{\lambda} \quad (3.6)$$

и удовлетворяют граничному условию $u'_{\lambda}(a) = 0$.

Примем теперь, что пробная функция (3.5) состоит из конечного числа членов. Подставив (3.5) в (3.4) и используя (3.6), получим

$$f_E(a) = \frac{\sum_{\lambda} A_{\lambda}^2 (E_{\lambda} - E)}{\left(\sum_{\lambda} A_{\lambda} \gamma_{\lambda}\right)^2}, \quad (3.7)$$

где γ_{λ} являются амплитудами приведенных ширин (IV.1.10a). Из свойства стационарности f

$$\frac{\partial f_E}{\partial A_{\lambda}} = 0 \quad (3.8)$$

следует, что

$$\frac{A_{\lambda} (E_{\lambda} - E)}{\gamma_{\lambda}} = \frac{\sum_{\mu} A_{\mu}^2 (E_{\mu} - E)}{\sum_{\mu} A_{\mu} \gamma_{\mu}} = C, \quad (3.9)$$

где C не зависит от λ . Подставляя это в (3.7), получаем

$$f_E(a) = \left(\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E} \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

При увеличении числа членов в разложении пробной функции (3.5) до бесконечности полученное выражение для f_E становится эквивалентным соотношению для R -функции (IV. 1.10).

в. Вывод из принципа причинности

В § 8. гл. IV было показано, что в случае одного канала реакции при условии, что на расстояниях, больших некоторого конечного расстояния $r = a$, в канале не имеется никаких потенциальных барьеров, аналитическая форма R -функции является следствием принципа причинности. Использование этого принципа приводит к определенной аналитической форме функции столкновений $U(k)$, а поэтому и к определенному виду функции $R(E)$, что следует из теории R -функции. В настоящее время проведено лишь предварительное исследование проблемы распространения этого результата на случай многих каналов¹⁾.

¹⁾ N. G. Van Kampen, частное сообщение.

МАТРИЦА СТОЛКНОВЕНИЙ U

В этой главе мы дадим точное определение матрицы U и перечислим некоторые из ее основных свойств. Свойства симметрии и унитарности не обсуждались в гл. IV, поскольку в случае одного канала (т. е. в случае одного лишь упругого рассеяния) они тривиальны.

§ 1. Определение

Как упоминалось в гл. III, имеется две возможные системы обозначений канала: $\{aslv_m\}$ и $\{asIJM\}$. Матрица U может быть определена при любой системе обозначений, причем форма определения совершенно не зависит от выбора этой системы.

Рассмотрим наиболее общее решение волнового уравнения во внешней области. Следуя определениям входящих и выходящих волн, данным в § 2 гл. III, оно может быть записано в виде

$$\Psi_{\text{общ.}} = \sum_c (x_c \mathcal{G}_c + y_c \mathcal{J}_c). \quad (1.1)$$

Числа y_c являются амплитудами входящих волн \mathcal{J}_c в разных каналах c , в то время как x_c — амплитудами выходящих волн \mathcal{G}_c . Для данной полной системы, когда y_c заданы, числа x_c определяются природой системы. Роль матрицы столкновений состоит в том, чтобы просто дать выражение x_c через y_c :

$$x_{c'} = - \sum_c U_{c'c} y_c, \quad (1.2a)$$

или, в матричном обозначении,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{U}\mathbf{y}. \quad (1.26)$$

Волны \mathcal{J}_c и \mathcal{G}_c могут быть легко преобразованы из одной системы обозначений к другой путем перестановки векторной связи; таким путем легко преобразовать матрицу \mathbf{U} от одной системы обозначений к другой (см. § 3).

Часто используется частный случай общего решения (1.1), соответствующий падающим волнам только в одном канале. Обозначим этот канал через c и положим u_c равным единице в этом канале и нулю во всех остальных. Тогда

$$\Psi \text{ (падающая волна только в канале } c) = \mathcal{J}_c - \sum_{c'} U_{c'c} \mathcal{G}_{c'}. \quad (1.3)$$

§ 2. Некоторые общие свойства матрицы \mathbf{U}

Как впервые показал Брейт [40], матрица столкновений имеет определенные общие свойства, которые не связаны с выбором используемой теории реакций (какой, например, является \mathbf{R} -матричная теория), а являются следствием лишь общих физических принципов. Мы сейчас установим унитарность и свойства симметрии матрицы \mathbf{U} .

а. Свойство унитарности (следующее из принципа сохранения вероятности)

Рассмотрим два частных решения типа (1.3) волнового уравнения, которые имеют асимптотическую форму:

$$\begin{aligned} \Psi_{1p} &= \sum_c (\delta_{pc} \mathcal{J}_{1c} - U_{1cp} \mathcal{G}_{1c}), \\ \Psi_{2m} &= \sum_c (\delta_{mc} \mathcal{J}_{2c} - U_{2cm} \mathcal{G}_{2c}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь Ψ_{1p} является решением, соответствующим энергии E_1 при входящей волне только в канале p , а Ψ_{2m} — решением, соответствующим энергии E_2 при входящей волне только в канале m . Подставляя эти решения в формулу Грина (V. 1.4) и выбирая при этом поверхность \mathcal{S} достаточно большой,

получаем

$$\begin{aligned}
 (E_1 - E_2) \int_{\tau} \Psi_{2m}^* \Psi_{1p} d\tau = & \\
 = \frac{1}{2} \sum_{c^+} [(\delta_{mc} \mathcal{G}_{2c'} - U_{2cm}^* \mathcal{J}_{2c'}) (\delta_{pc} \mathcal{J}_{1c} - U_{1cp} \mathcal{G}_{1c}) - & \\
 - (\delta_{pc} \mathcal{J}_{1c'} - U_{1cp} \mathcal{G}_{1c'}) (\delta_{mc} \mathcal{G}_{2c} - U_{2cm}^* \mathcal{J}_{2c})] = & \\
 = \frac{1}{2} \hbar \{ \delta_{pm} (\mathcal{G}_{2p'} \mathcal{J}_{1p} - \mathcal{J}_{1p'} \mathcal{G}_{2p}) + & \\
 + \sum_{c^+} U_{2cm}^* U_{1cp} (\mathcal{J}_{2c'} \mathcal{G}_{1c} - \mathcal{G}_{1c'} \mathcal{J}_{2c}) - & \\
 - U_{2pm}^* \mathcal{J}_{2p'} \mathcal{J}_{1p} - U_{1mp} \mathcal{G}_{2m'} \mathcal{G}_{1m} + & \\
 + U_{1mp} \mathcal{G}_{1m'} \mathcal{G}_{2m} + U_{2pm}^* \mathcal{J}_{1p'} \mathcal{J}_{2p} \} & \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

(при условии, что поверхность \mathcal{S} расположена достаточно далеко, для того чтобы можно было пренебречь вкладом от каналов c^- с отрицательной энергией). Если $E_1 = E_2$, то левая часть (2.2) обращается в нуль, так что, приняв во внимание значение вронскиана (III. 4.7в), получим

$$\sum_{c^+} U_{cm}^* U_{cp} = \delta_{cp}, \quad (2.3a)$$

или, в матричном обозначении,

$$(U^{++})^+ (U^{++}) = 1, \quad (2.3б)$$

где символ „+“ означает комплексное сопряжение и транспонирование, а символ „++“ указывает на то, что рассматриваются только те элементы, которые соответствуют каналам с положительной энергией. Соотношение (2.3б) эквивалентно утверждению, что матрица U^{++} унитарна. Можно отметить, что это свойство является следствием сохранения потока вероятности, которое находит свое выражение в формуле Грина (V. 1.4), лежащей в основе настоящего доказательства.

В отличие от свойства симметрии, обсуждаемого ниже, свойство унитарности было установлено без использования какой-либо конкретной системы обозначения каналов.

б. Свойство симметрии (следующее из обращения времени)

Рассмотрим решения, которые имеют асимптотическую форму (2.1) в системе обозначения каналов $\{\alpha s l J M\}$

$$\Psi_m = \sum_{c^+} (\delta_{mc} \mathcal{J}_c - U_{cm} \mathcal{G}_c) - \sum_{c^-} U_{cm} \mathcal{G}_c. \quad (2.4)$$

Здесь выделены каналы, соответствующие отрицательным энергиям. Поскольку оператор обращения времени K (см. § 2 гл. III) коммутирует с гамильтонианом, решением является также следующее выражение:

$$\begin{aligned} (-1)^{J-M} K \Psi_{-m} &= \sum_{c^+} (\delta_{-mc} \mathcal{G}_{-c} - U_{c-m}^* \mathcal{J}_{-c}) - \sum_{c^-} U_{c-m}^* \mathcal{G}_{-c} = \\ &= \sum_{c^+} (\delta_{mc} \mathcal{G}_c - U_{cm}^* \mathcal{J}_c) - \sum_{c^-} U_{cm}^* \mathcal{G}_c \end{aligned} \quad (2.5)$$

благодаря свойствам \mathcal{J}_c и \mathcal{G}_c по отношению к операции обращения времени и тому факту, что U не зависит от M . Знак минус перед индексом канала означает, что рассматриваются лишь отрицательные компоненты M полного момента количества движения. Если Ψ_r является решением вида (2.4) при наличии падающей волны только в канале r , то линейная комбинация таких решений также является решением. В частности, решением является и следующая комбинация:

$$\begin{aligned} - \sum_{r^+} U_{rm}^* \Psi_r &= - \sum_{c^+ r^+} (\delta_{rc} U_{rm}^* \mathcal{J}_c - U_{rm}^* U_{cr} \mathcal{G}_c) + \\ &+ \sum_{c^- r^+} (U_{rm}^* U_{cr} \mathcal{G}_c) = \sum_{c^+} \left[\sum_{r^+} (U_{rm}^* U_{cr} \mathcal{G}_c) - U_{cm}^* \mathcal{J}_c \right] + \\ &+ \sum_{c^- r^+} U_{rm}^* U_{cr} \mathcal{G}_c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Частные решения (2.5) и (2.6) имеют одинаковые входящие волны, и, следовательно, коэффициенты при выходящих волнах в каждом из каналов должны быть равны между собой:

$$\sum_{r^+} U_{rm}^* U_{c+r} = \delta_{mc^+}, \quad (2.7a)$$

$$\sum_{r^+} U_{rm}^* U_{c-r} = -U_{c-m}^*. \quad (2.8a)$$

В матричной записи эти соотношения принимают вид

$$(U^{++})(U^{++})^* = 1, \quad (2.76)$$

$$(U^{-+})(U^{++})^* + (U^{-+})^* = 0. \quad (2.86)$$

Из сравнения (2.76) и (2.36) становится очевидным, что субматрица U^{++} является симметричной:

$$U^{++} = \tilde{U}^{++}, \quad (2.9)$$

где \tilde{U}^{++} означает транспонированную матрицу U^{++} .

Обращенное во времени решение типа Ψ_m может быть выражено в виде линейной комбинации решений, соответствующих наличию падающих волн в различных каналах:

$$K\Psi_m = (-1)^{J-M-1} \sum_{r^+} U_{r-m}^* \Psi_r. \quad (2.10)$$

Поэтому обращенные во времени решения не являются независимыми от первоначального набора решений.

В проведенных выше рассмотренных мы пользовались системой обозначений канала $\{\alpha s l J M\}$. Можно непосредственно показать, что в системе обозначений канала $\{\alpha s l v m\}$

$$U_{rp}^{++} = (-1)^{r+p} U_{-p-r}^{++} = U_{pr}^{++}, \quad (2.11)$$

где $(-1)^r = (-1)^{s-v+l-m}$, а $-r$ означает канал r , в котором все компоненты обращены по направлению. Эти равенства применимы и в случае использования системы обозначений $\{\alpha s l J M\}$, поскольку в этой системе благодаря независимости U от M $(-1)^{r+p} = 1$.

в. Аналитические свойства $U(k)$

С формальной точки зрения представляет интерес рассмотреть матрицу столкновений как аналитическую функцию переменных k_c — волновых чисел каналов. Обсуждение вопроса об аналитичности, содержащееся в данном параграфе, совершенно аналогично рассмотрению, проведенному в § 8 гл. IV, где рассматривался специальный случай функции столкновений при упругом рассеянии. Особенностью общего случая (случая многих каналов), на которую необходимо обратить внимание, является лишь наличие отрицательных энергий или связанных каналов. Они могут быть включены

в рассмотрение наравне с каналами с положительной энергией при условии, что обычное соотношение $E_c = \hbar^2 k_c^2 / 2M$ сохраняет силу (т. е. волновые числа k_c являются для связанных каналов чисто мнимыми) и что входящие и выходящие волны выбираются так, чтобы их вронскиан (III. 4.6в) и (III. 4.7в) был таким же, как и в случае каналов, соответствующих положительным энергиям.

Как и в § 8 гл. V, мы сначала обобщим для комплексной плоскости свойства унитарности и симметрии матрицы U , которые до сих пор относились лишь к положительной вещественной полуоси k . Из асимптотического поведения выходящих и входящих волновых функций (III. 2.10) явствует, что в случаях, когда можно пренебречь кулоновским полем или обрезать его, для радиальных частей этих волновых функций справедливы следующие соотношения симметрии:

$$\begin{aligned} O(k^*)^* &= I(k), & I(k^*)^* &= O(k), \\ O(-k) &= I(k), & I(-k) &= O(k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

При обобщении свойства унитарности будем предполагать, что гамильтониан является самосопряженным. В этом случае формула Грина имеет вид (V. 1.4). Если положить

$$\Psi_{1p} = \Psi_{1p}(k), \quad \Psi_{2m} = \Psi_{2m}(k^*),$$

то разность энергий в левой части (V. 1.2) обращается в нуль, а рассмотрение правой части приводит к матричному соотношению

$$U(k) [U(k^*)]^+ = 1, \quad (2.13)$$

которое является обобщением соотношения унитарности (2.3), выполняющегося на вещественной оси энергий. Для обобщения свойства симметрии (2.9) произведем аналогичные преобразования с решениями (2.5) и (2.6). Если величины в (2.4) и (2.5) рассматривать как функцию k^* , а не k , то мы приходим к соотношению

$$U(k) [U(k^*)]^* = 1. \quad (2.14)$$

Из соотношений (2.13) и (2.14) следует свойство симметрии

$$U(k) = \tilde{U}(k). \quad (2.15)$$

Другое свойство симметрии, относящееся к матрице $U(-k)$ (и, следовательно, не имеющее аналога на положительной

вещественной полуоси), может быть получено путем рассмотрения волновой функции в форме

$$\begin{aligned}\Psi_p(-k) &= \mathcal{J}_p(-k) - \sum_c U_{cp}(-k) \mathcal{G}_c(-k) = \\ &= (-i) \mathcal{G}_p(k) - \sum_c U_{cp}(-k) (-i) \mathcal{J}_c(k).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Множитель $(-i)$ в последнем равенстве появляется благодаря нормировочному фактору в бегущих волнах. Линейная комбинация решений типа (2.16) также является решением; в частности, решением является и комбинация

$$\begin{aligned}\Psi_r(k) &= -i \sum_p U_{pr}(k) \Psi_p(-k) = \\ &= \sum_{cp} U_{pr}(k) U_{cp}(-k) \mathcal{J}_c(k) - \sum_p U_{pr}(k) \mathcal{G}_p(k).\end{aligned}\quad (2.17)$$

Выходящие волны в (2.17) таковы же, что и в обычном разложении

$$\Psi_r(k) = \mathcal{J}_r(k) - \sum_p U_{pr}(k) \mathcal{G}_p(k); \quad (2.18)$$

поэтому и входящие волны должны быть такими же, т. е.

$$U(-k)U(k) = 1. \quad (2.19)$$

Сравнивая (2.19) с (2.14), получаем

$$U(-k) = [U(k^*)]^*. \quad (2.20)$$

Из рассмотрения выражения для матрицы столкновений U через R -матрицу в форме (VII. 1.6) и условия, что внешние волновые функции обладают свойствами симметрии (2.12) и имеют соответствующий вронскиан, становится очевидным, что эта специальная форма матрицы U обладает указанными выше свойствами симметрии (2.13), (2.15) и (2.20) в комплексной плоскости.

Чтобы провести полную параллель со случаем упругого рассеяния, рассмотренным в § 8 гл. IV, следовало бы показать, что аналитические свойства U являются следствием принципа причинности. Однако, насколько нам известно, до сих пор этот вопрос рассматривался лишь в некоторых неопубликованных работах Ван-Кампена ¹⁾.

¹⁾ N. G. Van Kampen, частное сообщение.

§ 3. Связь между матрицами столкновений, выраженными в системах обозначения канала $\{\alpha slJM\}$ и $\{\alpha slvm\}$

Матрицы столкновений, которые получены из теории, развитой в гл. V и VII, относятся к системе обозначения канала $\{\alpha slJM\}$. Для определения дифференциальных сечений, которое мы произведем в гл. VIII, нам потребуется преобразовать матрицу столкновений к системе обозначения канала $\{\alpha slvm\}$. Чтобы получить связь между этими матрицами, рассмотрим решение, соответствующее наличию входящей волны в одном лишь канале $\{\alpha slJM\}$. Во внешней области это решение имеет следующий вид:

$$\Psi_{JM} = \mathcal{J}_{\alpha slJM} - \sum_{\alpha' s' l'} U_{\alpha' s' l'}^J \mathcal{G}_{\alpha' s' l' JM} \quad (3.1a)$$

и при использовании разложений (III. 2.20) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{JM} = & \sum_{\nu'' m''} (sl\nu'' m'' | JM) \mathcal{J}_{\alpha sl\nu'' m''} - \\ & - \sum_{\alpha' s' l'} U_{\alpha' s' l'}^J \sum_{\nu' m'} (s' l' \nu' m' | JM) \mathcal{G}_{\alpha' s' l' \nu' m'}. \end{aligned} \quad (3.1b)$$

Линейная комбинация таких решений также является решением; в частности, решением является и следующая комбинация:

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu m} = & \sum_{JM} (sl\nu m | JM) \Psi_{JM} = \sum_{JM \nu'' m''} (sl\nu m | JM) (sl\nu'' m'' | JM) \mathcal{J}_{\alpha sl\nu m} - \\ & - \sum_{JM \alpha' s' l' \nu' m'} (sl\nu m | JM) U_{\alpha' s' l'}^J \sum_{\nu' m'} (s' l' \nu' m' | JM) \mathcal{G}_{\alpha' s' l' \nu' m'}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя свойство унитарности

$$\sum_{JM} (sl\nu m | JM) (sl\nu'' m'' | JM) = \delta_{\nu m, \nu'' m''},$$

это решение можно свести к

$$\Psi_{\nu m} = \mathcal{J}_{\alpha sl\nu m} - \sum_{\alpha' s' l' \nu' m'} U_{\alpha' s' l' \nu' m'} \mathcal{G}_{\alpha' s' l' \nu' m'}, \quad (3.3a)$$

где

$$U_{\alpha' s' l' \nu' m', \alpha sl\nu m} = \sum_{JM} (sl\nu m | JM) U_{\alpha' s' l'}^J (s' l' \nu' m' | JM) \quad (3.3b)$$

есть „обычная“ матрица столкновений в системе обозначения канала $\{\alpha slvm\}$.

§ 4. Обобщенные матрицы столкновений

По определению, данному в § 1, матрица столкновений позволяет выразить коэффициенты при волновых функциях выходящих волн θ через коэффициенты при волновых функциях входящих волн \mathcal{J} . Волновые функции этих двух типов являются независимыми, поскольку их вронскиан (III. 4.6в) отличен от нуля. Проведенный в § 1 вывод может быть выполнен, вообще говоря, при использовании любых произвольных пар волновых функций, вронскиан которых отличен от нуля. Эти волновые функции мы будем называть обобщенными входящими и выходящими волновыми функциями \mathcal{J}^+ и θ^+ соответственно. Матрицу, дающую возможность выразить коэффициенты при выходящих волнах θ^+ через коэффициенты при входящих волнах \mathcal{J}^+ , назовем обобщенной матрицей столкновений U^+ . Радиальные части обобщенных волновых функций I^+ и O^+ связаны с радиальными частями обычных волновых функций с помощью набора четырех величин:

$$I_c^+ = \xi_c I_c + \eta_c O_c, \quad O_c^+ = \zeta_c I_c + \chi_c O_c, \quad (4.1)$$

а обобщенный вронскиан этих обобщенных волновых функций равен

$$\omega_c^+ = O_c^{+'} I_c^+ - I_c^{+'} O_c^+ = 2i(\eta_c \zeta_c - \xi_c \chi_c). \quad (4.2)$$

Тогда частные решения будут иметь во внешней области следующую обобщенную форму:

$$\Psi_m = \sum_c (\delta_{cm} \mathcal{J}_c^+ - U_{cm}^+ \theta_c^+). \quad (4.3)$$

Заменяя с помощью соотношения (4.1) обобщенные волновые функции на обычные, находим

$$\Psi_m = \sum_c [(\xi_c \delta_{cm} - U_{cm}^+ \zeta_c) \mathcal{J}_c - (U_{cm}^+ \chi_c - \eta_c \delta_{cm}) \theta_c]. \quad (4.4)$$

Определим ξ , η и ζ как диагональные матрицы с элементами ξ_c , η_c и ζ_c . Тогда линейная комбинация

$$\Psi_t = \sum_m (\xi - \zeta U^+)^{-1}_{mt} \Psi_m = \sum_c (\delta_{ct} \mathcal{J}_c - U_{ct} \theta_c)$$

также является решением. Следующее отсюда соотношение

$$U = (\chi U^+ - \eta)(\xi - \zeta U^+)^{-1} \quad (4.5)$$

дает связь между обобщенной матрицей столкновений U^+ и обычной матрицей столкновений U , определенной в § 1. Из (4.5) следует обратное соотношение

$$U^+ = (\chi + U\zeta)^{-1} (U\xi + \eta). \quad (4.5a)$$

Хотя U^+ симметрична по отношению к каналам, для которых вронскиан имеет одинаковое значение, из аргументов, приведенных в § 2, а, следует, что унитарной она является только в том случае, если вронскиан (4.2) является чисто мнимой величиной и одинаков для всех каналов.

а. Q -матрица

Примером обобщенной матрицы столкновений является так называемая Q -матрица (или „матрица реактанса“), введенная Тейхманом и Вигнером [75]. Радиальными волновыми функциями, связанными с этой матрицей, являются функции $I^+ = F$ и $O^+ = -G$, так что величины (4.1) и (4.2) равны

$$\xi = \frac{1}{2}i, \quad \eta = -\frac{1}{2}i, \quad \zeta = -\frac{1}{2}, \quad \chi = -\frac{1}{2}, \quad \omega^+ = 1.$$

Согласно (4.5), имеем

$$U = (1 + iQ)(1 - iQ)^{-1} \quad (4.6)$$

и, заменив теперь величины I , O , I' , O' , ω в выражении (VII. 1.6) соответственно на F , $-G$, F' , $-G'$, 1, получим

$$Q = -FG^{-1} + \rho^{1/2}G^{-1}(1 - RL^0)^{-1}R\rho^{1/2}G^{-1}.$$

После перестановки членов и использования соотношения (III. 2.12) для вронскиана приходим к формуле, рассмотренной Тейхманом и Вигнером,

$$Q = -F'G' + \rho^{-1/2}(G')^{-1}[(L^0)^{-1} - R]^{-1}\rho^{-1/2}(G')^{-1}, \quad (4.7)$$

где

$$L^0 = \rho G'G^{-1}.$$

Чтобы получить разложение Q -матрицы по уровням, можно воспользоваться процедурой, изложенной в гл. IX. При этом детали процедуры и ее обсуждение остаются совершенно аналогичными. Очевидно, что Q -матрица является вещественной и симметричной. В случае одного канала из соотноше-

ния (4.6) следует, что $Q = \operatorname{tg} \delta$, где δ — фазовый сдвиг (см. § 9 гл. IV).

Q -матрица позволяет выразить коэффициенты при внешних волновых функциях, радиальными частями которых являются сингулярные функции G , через коэффициенты внешних волновых функций, у которых в качестве радиальных частей служат функции F , являющиеся в окрестности начала регулярными функциями. Компоненты Q -матрицы являются, следовательно, мерой того, насколько взаимодействия во внутренней области порождают сингулярные функции во внешней области. При отсутствии таких взаимодействий Q -матрица обращается в нуль, что может быть проверено подстановкой в (4.7) диагональной R -матрицы (см. § 3 гл. IV) при $V_0 = 0$, которая описывает свободное пространство. Компоненты Q -матрицы связаны также с компонентами матричных элементов взаимодействия, с помощью которых функции G выражаются через F при использовании обычного метода функции Грина.

в. R -матрица

R -матрица сама по себе может рассматриваться как обобщенная матрица столкновений. Соответствующее преобразование (4.1) имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}i(G + iF)\rho^{-1/2}, \\ \eta &= -\frac{1}{2}i(G - iF)\rho^{-1/2}, \\ \zeta &= -\frac{1}{2}i(G' + iF')\rho^{1/2}, \\ \chi &= \frac{1}{2}i(G' - iF')\rho^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

причем все величины из внешней области вычислены на поверхности \mathcal{S} . Поэтому значения радиальных частей обобщенных волновых функций \mathcal{J}^\dagger и \mathcal{O}^\dagger и их производных, как это следует из (4.1), будут:

$$I^\dagger = 0, \quad I^{\dagger'} = \rho^{-1/2}, \quad O^\dagger = \rho^{1/2}, \quad O^{\dagger'} = 0\tag{4.9}$$

и

$$\omega^\dagger = 1.$$

Подставляя эти значения в соотношение (VII. 1.6a), находим, что

$$U^+ = -R. \quad (4.10)$$

Другими словами, если \mathcal{J}^+ и \mathcal{G}^+ определены соотношениями (4.1) и (4.8), частные решения, содержащие только одну функцию \mathcal{J}_m^+ , имеют во внешней области следующую форму:

$$\Psi_m \sim \sum_c (\delta_{cm} \mathcal{J}_m^+ + R_{cm} \mathcal{G}_c^+). \quad (4.11)$$

Если сравнить это соотношение с его производной на поверхности \mathfrak{S} и воспользоваться равенствами (4.9), то сразу же становится очевидным, что (4.11) согласуется с соотношением для R -матрицы (V. 2.7) и является его продолжением во внешнюю область.

Глава VII

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ R-МАТРИЦЕЙ И МАТРИЦЕЙ СТОЛКНОВЕНИЙ

Соотношения (V. 2.7) и (V. 2.8) дают связь между значениями волновых функций и их производных на поверхности \mathcal{S} , которые должны иметь место для того, чтобы волновые функции могли быть продолжены во внутреннюю область.

В этой главе мы выведем соотношение между R-матрицей и матрицей столкновений U. Поскольку R-матрица определяет форму волновой функции на поверхности \mathcal{S} , а матрица U — форму этой функции в бесконечности, связь между этими двумя матрицами устанавливается путем соединения указанных областей. При этом в процессе соединения в теорию вводятся „внешние“ волновые функции, подобные функциям F и G , определенным в гл. III.

§ 1. Вывод соотношения между матрицами R и U

Во *внешней области* любое решение Ψ может быть выражено как сумма входящих и выходящих волн (III. 2.19) и (III. 2.20) с коэффициентами y_c и x_c соответственно. Из (VI. 1.1) следует

$$\Psi = \sum_c (x_c \mathcal{G}_c + y_c \mathcal{J}_c). \quad (1.1)$$

Значения, которые эта функция и ее производная принимают на поверхности \mathcal{S} [см. (III. 4.2)], есть

$$\begin{aligned} V_c &= \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} (v_c^{-1/2} \mathcal{G}_c x_c + v_c^{-1/2} \mathcal{J}_c y_c), \\ D_c &= \left(\frac{\rho_c^2 \hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} (v_c^{-1/2} \mathcal{G}'_c x_c + v_c^{-1/2} \mathcal{J}'_c y_c), \end{aligned} \quad (1.2a)$$

или

$$\begin{aligned} V_c &= \left(\frac{1}{2}\hbar\right)^{1/2} (\rho_c^{-1/2}\mathcal{G}_c x_c + \rho_c^{-1/2}\mathcal{F}_c y_c), \\ D_c &= \left(\frac{1}{2}\hbar\right)^{1/2} (\rho_c^{1/2}\mathcal{G}'_c x_c + \rho_c^{1/2}\mathcal{F}'_c y_c). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Поскольку эти величины должны удовлетворять основному соотношению (V. 2.7), находим в матричном обозначении, что $(\rho^{-1/2}\mathbf{O}\mathbf{x} + \rho^{-1/2}\mathbf{I}\mathbf{y}) = \mathbf{R}[(\rho^{1/2}\mathbf{O}'\mathbf{x} + \rho^{1/2}\mathbf{I}'\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\rho^{-1/2}\mathbf{O}\mathbf{x} + \rho^{-1/2}\mathbf{I}\mathbf{y})]$

или

$$(\rho^{-1/2}\mathbf{O} - \mathbf{R}\rho^{1/2}\mathbf{O}')\mathbf{x} = -(\rho^{-1/2}\mathbf{I} - \mathbf{R}\rho^{1/2}\mathbf{I}')\mathbf{y}, \quad (1.3)$$

где

$$\rho\mathbf{O}' = \rho\mathbf{O}' - \mathbf{B}\mathbf{O}, \quad \rho\mathbf{I}' = \rho\mathbf{I}' - \mathbf{B}\mathbf{I}.$$

Матрица столкновений \mathbf{U} по определению (VI. 1.2) выражает связь между коэффициентами при выходящих волнах и коэффициентами при входящих волнах:

$$x_{c'} = - \sum_c U_{c'/c} y_c,$$

или, в матричном обозначении,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{U}\mathbf{y}. \quad (1.4)$$

При сравнении этого соотношения с (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^J &= (\mathbf{O}\rho^{-1/2} - \mathbf{R}^J\mathbf{O}'\rho^{1/2})^{-1} (\mathbf{I}\rho^{-1/2} - \mathbf{R}^J\mathbf{I}'\rho^{1/2}) = \\ &= \rho^{1/2}\mathbf{O}^{-1} (1 - \mathbf{R}^J\mathbf{L}^0)^{-1} (1 - \mathbf{R}^J\mathcal{L}^0) \mathbf{I}\rho^{-1/2} = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}^J\mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В этом выражении $\mathbf{1}$ означает диагональную единичную матрицу. Кроме того, введены следующие три матрицы:

$$\mathbf{L}^0 = \mathbf{L} - \mathbf{B}, \quad \mathcal{L}^0 = \mathcal{L} - \mathbf{B},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^J &= \mathfrak{F}^{1/2} (1 - \mathbf{R}^J\mathbf{L}^0)^{-1} (1 - \mathbf{R}^J\mathcal{L}^0) \mathfrak{F}^{-1/2} = \\ &= \mathbf{1} + \mathfrak{F}^{1/2} (1 - \mathbf{R}^J\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R}^J \mathfrak{F}^{1/2} \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1.6a)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^J &= [\mathbf{1} - \mathfrak{F}^{1/2} (\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{w}] + \\ &+ [\mathfrak{F}^{1/2} (\mathbf{L}^0)^{-1}] [(\mathbf{L}^0)^{-1} - \mathbf{R}^J]^{-1} [\mathfrak{F}^{1/2} (\mathcal{L}^0)^{-1}] \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (1.6b)$$

Матрица \mathbf{W}^J является новой величиной. Часто использование этой матрицы более удобно, чем матрицы \mathbf{U}^J . Компоненты „поверхностных“ диагональных матриц $\mathfrak{F}^{1/2}$, \mathbf{L} , \mathcal{L} , $\mathbf{\Omega}$ и

w были приведены в § 4 гл. III. Матрица \mathbf{W} является вещественной диагональной матрицей граничных условий, компоненты которой определены соотношением (V. 2.1). Индекс J в соотношениях (1.5) и (1.6) указывает на зависимость \mathbf{U} и \mathbf{R} от полного момента количества движения и четности; за исключением отдельных случаев, в дальнейшем мы везде будем опускать этот индекс. Соотношения (1.5) и (V. 2.8) позволяют выразить матрицу столкновений через вещественные величины $\gamma_{\lambda c}$, E_{λ} , σ_c , ϕ_c , S_c , P_c . Хотя эти величины зависят от параметров a_c и B_c , сама матрица \mathbf{U} , отражающая свойства физической системы, не должна зависеть от этих параметров.

§ 2. Проверка свойств симметрии и унитарности матрицы столкновений

В § 2 гл. VI мы убедились, что из весьма общих физических принципов следует, что матрица столкновений должна быть симметричной и унитарной. Этими свойствами обладает и специальная форма (1.5) матрицы \mathbf{U} . Ясно, что доказательство симметричности и унитарности матрицы \mathbf{W} эквивалентно доказательству наличия этих свойств и у матрицы \mathbf{U} .

Из симметричности R -матрицы и из того факта, что

$$\mathbf{R}(\mathbf{1} - \mathbf{L}^0 \mathbf{R})^{-1} = [\mathbf{1} - \mathbf{R}(\mathbf{L}^0)^{-1}] \mathbf{R},$$

следует

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{1} + w \mathfrak{F}^{1/2} (\mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R} \mathfrak{F}^{1/2} \quad (2.1)$$

($\tilde{\mathbf{W}}$ — транспонированная матрица \mathbf{W}). Следовательно, \mathbf{W} (и \mathbf{U}) симметричны по отношению к каналам, имеющим одинаковые значения вронскиана w_c . В частности, симметричной является и субматрица \mathbf{W}^{++} , соответствующая каналам с положительной энергией, так как из (III. 4.7в) следует, что для всех этих каналов $w_c^+ = 2i$.

Для доказательства унитарности матрицы \mathbf{U} следует несколько более подробно выяснить роль каналов с отрицательной энергией. Матрица $-\mathbf{U}$, будучи умноженной на вектор u , компонентами которого являются амплитуды входящих волн, приводит к соответствующему вектору x , представляющему выходящие волны. Матрица \mathbf{U} выражает амплитуды выходящих волновых функций O_c^+ для положи-

тельных значений энергии и экспоненциально убывающих волновых функций O_c^- , соответствующих отрицательным энергиям, через амплитуды входящих волн I_c^+ и функций I_c^- , соответствующих несвязанным состояниям с отрицательной энергией.

Поскольку функции I_c^- не встречаются ни в какой физической ситуации, компоненты субматрицы W^{+-} не имеют никакого физического смысла, а поэтому их можно положить равными нулю, как это видно из (1.6б). Последнее может быть достигнуто без всякого влияния на компоненты субматриц W^{++} и W^{-+} , если компоненты матрицы вронскиана W , соответствующие отрицательным энергиям, положить равными нулю: $w_c^- = 0$. (Это будет означать, что O_c^- и I_c^- не являются линейно независимыми.)

Другое следствие заключается в том, что

$$\mathfrak{L}_c^0 = L_c^{0*} \quad (2.2)$$

как для каналов с отрицательной, так и для каналов с положительной энергиями, что позволяет исключить величины \mathfrak{L}_c , заменив их величинами L_c^* . Например, соотношение (1.6а) может быть записано в виде

$$W = P^{1/2} (1 - RL^0)^{-1} (1 - RL^{0*}) P^{-1/2}. \quad (2.3)$$

Эта матрица имеет следующую форму:

$$W = \left\| \begin{array}{c|c} W^{++} & 0 \\ \hline W^{-+} & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.4)$$

То, что все компоненты матрицы W^{--} взяты равными единице, никакой роли не играет, так как эти компоненты, подобно компонентам субматрицы W^{+-} , не имеют физического смысла.

Из равенства (2.3) легко получить соотношение

$$WW^* = 1. \quad (2.5)$$

Подставляя W из (2.4) в соотношение (2.5), находим, что

$$W^{++} (W^{++})^* = 1 \quad (2.6)$$

и что

$$(W^{-+})(W^{++})^* + (W^{-+})^* = 0. \quad (2.7)$$

Поскольку W^{++} симметрична, соотношение (2.6) указывает на то, что она также и унитарна. Субматрица $U^{++} \equiv (\Omega W \Omega)^{++}$ также унитарна, поскольку матрица W содержит унитарные диагональные матрицы:

$$(W^{++})(W^{++})^\dagger = (U^{++})(U^{++})^\dagger = 1. \quad (2.8)$$

Аналогичным образом (2.7) приводит к соотношению

$$(U^{-+})(U^{++})^* + (U^{-+})^* = 0. \quad (2.9)$$

§ 3. Матрица столкновений в случае двух каналов

Хотя формально выражение (1.6б) позволяет получить компоненты матрицы столкновений из компонент R -матрицы и диагональных поверхностных матриц, в случае многих каналов оно непригодно для практических приложений в связи с трудностями обращения матрицы $(1 - RL^0)$. Эти трудности являются отражением трудности решения многих уравнений со многими неизвестными, которые записаны в виде основного соотношения R -матричной теории (V. 2.7). Преобразование (1.6б) в более удобном для практических приложений виде выполнено в гл. IX и X.

Обращение матрицы может быть легко произведено только в случае, когда в реакции участвует лишь один или два канала. В случае одного канала обращение эквивалентно простому делению и (1.6б) вместе с (1.5) после некоторых преобразований может быть приведено к функции столкновений (IV. 1.14). В случае двух каналов с положительной энергией компонентами матрицы столкновений являются:

$$\begin{aligned} W_{11} &= 1 + 2iP_1 [R_{11} - L_2^0 (R_{11}R_{22} - R_{12}^2)] d^{-1}, \\ W_{22} &= 1 + 2iP_2 [R_{22} - L_1^0 (R_{11}R_{22} - R_{12}^2)] d^{-1}, \\ W_{12} &= W_{21} = 2iP_1^{1/2} R_{12} P_2^{1/2} d^{-1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где d представляет собой детерминант:

$$d = (1 - R_{11}L_1^0)(1 - R_{22}L_2^0) - L_1^0 R_{12}^2 L_2^0.$$

Отличительной чертой компоненты W_{12} является то, что она обращается в нуль между уровнями, для которых произведение $\gamma_{\lambda_1} \gamma_{\lambda_2}$ имеет один и тот же знак. Соответствующее

сечение, которое должно быть пропорционально $|W_{12}|^2$, также обладает этой особенностью. Вигнер [87] показал, что а) сечение упругого рассеяния, вообще говоря, не обращается в нуль ни при каком значении энергии, за исключением случая одного канала, и б) в случае трех и более каналов сечение ни одной из реакций не будет обращаться в нуль ни при каком значении энергии. Эти замечания относятся к парциальным сечениям, соответствующим определенной величине J . Даже в случае двух каналов *полное* сечение также никогда не обращается в нуль ни при какой энергии, поскольку парциальные сечения будут обращаться в нуль при разных значениях E и J .

§ 4. Включение неполяризующих потенциалов

В рамках развитого формализма можно учесть наличие в различных каналах любых неполяризующих потенциалов. Согласно предположению „4“ в гл. II, такие потенциалы не могут существенно возбудить, или „поляризовать“, две разделенные между собой подсистемы.

Если между двумя системами не действуют никакие ядерные силы, радиальная волновая функция относительного движения будет просто функцией F_l , определенной соотношением (III. 2.11). Эта функция регулярна при $r=0$ и в ней учтен фазовый сдвиг, обусловленный кулоновским потенциалом. Допустим, что при наличии некоторого другого потенциала радиальной волновой функцией является f_l , соответствующая сдвигу фазы $2\theta_l$, обусловленному этим потенциалом. Тогда

$$f_l = F_l \cos \theta_l + G_l \sin \theta_l = \sin \left(\rho - \eta \ln 2\rho - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_l + \theta_l \right). \quad (4.1)$$

Обозначение f выбрано по аналогии с обозначением соответствующей функции F для регулярного решения, использовавшегося в случае отсутствия ядерного потенциала. Сингулярное решение g_l определено так, что его асимптотическое поведение имеет вид

$$g_l = -F_l \sin \theta_l + G_l \cos \theta_l = \cos \left(\rho - \eta \ln 2\rho - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_l + \theta_l \right). \quad (4.2)$$

Подобным же образом можно определить входящие i_l и выходящие o_l волны по аналогии с (III. 2.10) и (III. 2.13) с радиальными частями

$$\begin{aligned} i_l &= (G_l - iF_l) \exp [i(\omega_l - \theta_l)] = I_l \exp (-i\theta_l), \\ o_l &= (G_l + iF_l) \exp [-i(\omega_l - \theta_l)] = O_l \exp (i\theta_l). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вронскианы для систем $\{f, g\}$ и $\{i, o\}$ имеют то же самое значение, что и вронскианы для систем $\{F, G\}$ и $\{I, O\}$ соответственно. Пусть \mathbf{u} — матрица столкновений, аналогичная определенной равенствами (1.1) и (1.4) матрице \mathbf{U} , но относящаяся к системе волн o и i . Она может быть выражена через \mathbf{R} -матрицу с помощью соотношений (1.5б) и (1.6) путем замены F и G на f и g соответственно. Матрица столкновений \mathbf{U} может быть найдена путем умножения решения во внешней области вида

$$\Psi_c \sim i_c - \sum_{c'} u_{cc'} o_{c'} \quad (4.4)$$

на $\exp i\theta_c$ и сравнения результата с соотношениями (1.1) и (1.4), в которых отлично от нуля лишь одно $u_c (= 1)$. В матричном обозначении результат может быть записан в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{e}^{i\theta} \mathbf{u} \mathbf{e}^{i\theta}. \quad (4.5)$$

Таким образом, \mathbf{U} дается соотношениями (1.5) и (1.6) с подстановкой выражений для f и g и с дополнительным фазовым сдвигом θ в матрице потенциального рассеяния $\mathbf{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \exp i(\omega + \theta - \phi), \\ \phi &= \arctg \frac{f}{g}, \\ S &= \frac{\rho (ff' + gg')}{f^2 + g^2}, \\ P &= \frac{\rho}{f^2 + g^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Итак, процедура включения в теорию внешнего потенциала ничем не отличается от процедуры включения кулоновского потенциала.

Определение f и g должно производиться путем непосредственного решения уравнения Шредингера. В случае, когда

внешний потенциал не слишком велик, можно использовать два метода интегральных уравнений.

Первый метод заключается в применении формулы Грина к функциям g и G при одной и той же энергии и поверхностном интегрировании по сферам радиуса r' и бесконечность. Полученное таким путем соотношение имеет вид

$$(gG' - Gg')_{,r'} = \int_{r'}^{\infty} P(r'') g(r'') G(r'') dr'', \quad (4.7)$$

где $\hbar^2 P/2M$ представляет собой дополнительный потенциал, к которому относится функция g . Вклад поверхностного интеграла на бесконечности обращается в нуль, поскольку функции g и G имеют одинаковое асимптотическое поведение. Штрих в соотношении (4.8) означает дифференцирование по r . Разделим теперь обе части (4.7) на $G^2(r')$ и проинтегрируем по r' от r до бесконечности. Замечая, что

$$(gG' - Gg') dr = -G^2 d \frac{g}{G},$$

приходим к следующему результату:

$$g(r) = G(r) \left[1 + \int_r^{\infty} \frac{dr'}{G^2(r')} \int_{r'}^{\infty} \bar{P} G^2 dr'' \right], \quad (4.8)$$

где

$$\bar{P} = \frac{g}{G} P.$$

Этот результат используется в § 1 гл. XIII для определения поведения сечений вблизи порогов. Метод пригоден также и для определения трех других функций: f , l и o , если сделать соответствующие подстановки.

Второй метод заключается в применении функции Грина, и, хотя для определения f или g в этом методе требуется знание как F , так и G , при его использовании необходимо выполнить лишь одно интегрирование. Для определения g формула Грина применяется дважды, причем каждый раз поверхностное интегрирование осуществляется по сферам радиуса r и ∞ (один раз для функций g и G , а другой раз для функций f и F). Если учесть, что на бесконечности

$g = G$ и $g' = G'$ и что $F'G - G'F = k$, приходим к следующим соотношениям:

$$-k - (Fg' - gF')_r = \int_r^{\infty} P(r') g(r') F(r') dr', \quad (4.9)$$

$$-(Gg' - gG')_r = \int_r^{\infty} PgG dr'. \quad (4.10)$$

Умножим первое соотношение на $G(r)$, а второе на $F(r)$; разность полученных таким образом соотношений представляет собой интегральное уравнение для $g(r)$

$$g(r) = G(r) + k^{-1} \int_r^{\infty} G(r, r') P(r') g(r') dr' \quad (4.11)$$

с функцией Грина

$$G(r, r') = G(r)F(r') - F(r)G(r').$$

Подобным же образом может быть получено интегральное уравнение и для $f(r)$:

$$f(r) = F(r) - k^{-1} \int_r^{\infty} G(r, r') P(r') f(r') dr'. \quad (4.12)$$

Глава VIII

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ И ЭЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦЫ СТОЛКНОВЕНИЙ

Перейдем теперь к формулировке последнего звена основной схемы \mathbf{R} -матричной теории, описанной в § 1 гл. II. В гл. V мы получили соотношения между \mathbf{R} -матрицей и собственными состояниями X_λ . В гл. VII матрица столкновения \mathbf{U} была выражена через \mathbf{R} -матрицу и матрицы \mathbf{L} и $\mathbf{\Omega}$, описывающие внешние взаимодействия. Теперь мы выразим сечения через элементы матрицы столкновений.

§ 1. Амплитуды рассеяния

Путем подстановки (VII. 1.4) в (VII. 1.1) общее решение волнового уравнения во внешней области может быть выражено через коэффициенты при входящих волнах:

$$\Psi_{\text{общ.}} = \sum_{cc'} (\delta_{cc'} \mathcal{J}_c - U_{c'c} \mathcal{G}_{c'}) y_c. \quad (1.1)$$

Рассмотрим теперь волновую функцию с теми же самыми y_c , но с радиальной частью, пропорциональной в каждом канале регулярной функции F_c :

$$\Psi' = \sum_{cc'} (\delta_{cc'} \mathcal{J}_c - e^{2i\omega c} \delta_{cc'} \mathcal{G}_c) y_c. \quad (1.2)$$

Складывая и вычитая Ψ' с правой частью (1.1), приходим к равенству

$$\Psi_{\text{общ.}} = \Psi' + \sum_{cc'} (e^{2i\omega c} \delta_{cc'} - U_{c'c}) \mathcal{G}_{c'} y_c, \quad (1.3)$$

в котором входящие волны уже не содержатся явно.

Конкретизируем теперь это решение путем соответствующего выбора y_c так, чтобы Ψ' представляло падающую волну частиц типа α со спином канала s и его компонентой ν ,

движущихся по оси z и подвергающихся воздействию только кулоновского поля (если таковое имеется). Это может быть достигнуто, если выбрать

$$y_c \equiv y_{\alpha s l v_0} = \frac{i\pi^{1/2}}{k_\alpha} (2l+1)^{1/2}, \quad (1.4)$$

а все остальные y_c — равными нулю. Из определений (III. 2.13) и (III. 2.19) и соотношения

$$Y_0^{(l)}(\Omega) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos\theta)$$

следует, что

$$\Psi'_{\alpha s v} = v_\alpha^{-1/2} k_\alpha^{-1} \sum_l i^l (2l+1) e^{i\omega_\alpha l} \left(\frac{F_{\alpha l}}{r_\alpha}\right) P_l(\cos\theta_\alpha) \psi_{\alpha s v}. \quad (1.5)$$

Согласно Шиффу [88] (см. стр. 116—119), (1.5) является одной из возможных форм волновой функции, асимптотическое поведение которой имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned} \Psi'_{\alpha s v} \sim v_\alpha^{-1/2} \psi_{\alpha s v} \left[\left(1 - \frac{\eta_\alpha^2}{ik_\alpha(r_\alpha - z_\alpha)} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp i \{ k_\alpha z_\alpha - \eta_\alpha \ln k_\alpha (r_\alpha - z_\alpha) - \sigma_{\alpha 0} \} - \right. \\ \left. - \frac{\pi^{1/2}}{r_\alpha k_\alpha} C_\alpha(\theta_\alpha) \exp i \{ \rho_\alpha - \eta_\alpha \ln 2\rho_\alpha + \sigma_{\alpha 0} \} \right], \quad (1.6) \end{aligned}$$

где

$$C_\alpha(\theta_\alpha) = (4\pi)^{-1/2} \eta_\alpha \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta_\alpha}{2}\right) \exp \left\{ -2i\eta_\alpha \ln \sin\left(\frac{\theta_\alpha}{2}\right) \right\}.$$

Эта функция описывает плоскую волну типа $\alpha s v$, распространяющуюся в направлении z в кулоновском поле и вместе с ней волну, рассеянную в этом поле [с коэффициентом $C_\alpha(\theta_\alpha)$]. При сделанном выборе y_c (1.4) можно вычислить также и сумму в правой части равенства (1.3). В результате получается

¹⁾ Если сталкивающиеся частицы тождественны, то следует использовать симметричную или антисимметричную „плоскую волну“ вида

$$\exp(ikz) + \exp(-ikz) \quad \text{или} \quad \exp(ikz) - \exp(-ikz)$$

в зависимости от природы сталкивающихся частиц и симметрии $\psi_{\alpha s v}$.

следующая асимптотическая форма соответствующего частного решения

$$\Psi_{\text{частн.}} \sim \Psi'_{\alpha s \nu} + \frac{i\pi^{1/2}}{k_\alpha} \sum_{\alpha' s' l' \nu' m'} (2l+1)^{1/2} \times \\ \times [e^{2i\omega_{\alpha' l'}} \delta_{\alpha' s' l' \nu' m', \alpha s l \nu 0} - U_{\alpha' s' l' \nu' m', \alpha s l \nu 0}] \times \\ \times \frac{\exp i \{ \rho_{\alpha'} - \eta_{\alpha'} \ln 2\rho_{\alpha'} + \sigma_{\alpha' 0} \}}{\sigma_{\alpha'}^{1/2} r_{\alpha'}} Y_{m'}^{(l')}(\Omega_{\alpha'}) \Psi_{\alpha' s' \nu'}. \quad (1.7)$$

Амплитуды $A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'})$ выходящих волн типа $\alpha' s' \nu'$ на бесконечности, соответствующие единичному потоку падающей плоской волны типа $\alpha s \nu$, определяются через скалярное произведение

$$A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'}) = \\ = r_{\alpha'} \sigma_{\alpha'}^{1/2} \exp i \{ \rho_{\alpha'} - \eta_{\alpha'} \ln 2\rho_{\alpha'} + \sigma_{\alpha' 0} \} \lim_{r_{\alpha'} \rightarrow \infty} \int \Psi_{\alpha' s' \nu'}^* \Psi dq_{\alpha'}. \quad (1.8)$$

Дифференциальное сечение по определению дается формулой

$$d\sigma_{\alpha s \nu, \alpha' s' \nu'} = |A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'})|^2 d\Omega_{\alpha'}, \quad (1.9)$$

где амплитуды рассеяния и реакции, согласно (1.7), определяются следующим образом:

$$A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'}) = \frac{\pi^{1/2}}{k_\alpha} \left\{ -C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'}) \delta_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu} + i \sum_{l' m' l} (2l+1)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times [e^{2i\omega_{\alpha' l'}} \delta_{\alpha' s' l' \nu' m', \alpha s l \nu 0} - U_{\alpha' s' l' \nu' m', \alpha s l \nu 0}] Y_{m'}^{(l')}(\Omega_{\alpha'}) \right\}. \quad (1.10)$$

§ 2. Дифференциальные сечения

Мы не будем обсуждать сечения для поляризованных падающих частиц и сечения поляризации продуктов реакции. (Обсуждение сечений поляризации и соответствующая литература приведены в работах Саймона и Уэлтона [89—91], Биденхарна и Роуза [62] и Сэчлера [92].)

Если падающие частицы и ядра-мишени неполяризованы, то сечение (1.9) может быть просуммировано по ν' и усреднено по ν . В результате получаем дифференциальное сечение процессов $\alpha s \rightarrow \alpha' s'$:

$$d\sigma_{\alpha s, \alpha' s'} = (2s+1)^{-1} \sum_{\nu \nu'} |A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'})|^2 d\Omega_{\alpha'}. \quad (2.1)$$

Чтобы получить дифференциальное сечение для процесса $\alpha \rightarrow \alpha'$, выражение (2.1) следует просуммировать по s' и усреднить по s :

$$d\sigma_{\alpha\alpha'} = [(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{-1} \sum_{s s' \nu \nu'} |A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'})|^2 d\Omega_{\alpha'}, \quad (2.2)$$

где I_1 и I_2 представляют собой спины частиц пары α .

Для дальнейших выкладок следует перейти от представления **U** в системе $\{\alpha s l \nu m\}$ к представлению в системе $\{\alpha s l J M\}$. Используя преобразование (VI. 3.3б), получаем вместо (1.10) следующее выражение для амплитуды:

$$A_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu}(\Omega_{\alpha'}) = \frac{\pi^{1/2}}{k_{\alpha}} \left[-C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'}) \delta_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu} + \right. \\ \left. + i \sum_{J M l' m'} (2l + 1)^{1/2} (s l \nu 0 | J M) (s' l' \nu' m' | J M) \times \right. \\ \left. \times T_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J Y_m^{(l')}(\Omega_{\alpha'}) \right], \quad (2.3)$$

где

$$T_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J = e^{2i\omega_{\alpha' l'}} \delta_{\alpha' s' l', \alpha s l} - U_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J.$$

При нахождении квадрата модуля выражения, входящего в сечение, необходимо выполнить суммирование по двум группам индексов:

$$\{J_1 M_1 l_1' m_1'\} \quad \text{и} \quad \{J_2 M_2 l_2' m_2'\}.$$

В результате выражение (2.1) преобразуется к следующему виду:

$$(2s + 1) \frac{k_{\alpha}^2}{\pi} d\sigma_{\alpha s, \alpha' s'} d\Omega_{\alpha'} = (2s + 1) |C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'})|^2 \delta_{\alpha' s', \alpha s} + \\ + \sum_{\substack{J_1 J_2 M_1' M_2' \\ l_1 l_2 l_1' l_2' \\ \nu \nu' m_1' m_2'}} (2l_1 + 1)^{1/2} (2l_2 + 1)^{1/2} (s l_1 \nu 0 | J_1 M_1) \times \\ \times (s l_2 \nu 0 | J_2 M_2) (s' l_1' \nu' m_1' | J_1 M_1) (s' l_2' \nu' m_2' | J_2 M_2) \times \\ \times \left(T_{\alpha' s' l_1', \alpha s l_1}^{J_1} Y_{m_1}^{(l_1')}(\Omega_{\alpha'}) \right) \left(T_{\alpha' s' l_2', \alpha s l_2}^{J_2} Y_{m_2}^{(l_2')}(\Omega_{\alpha'}) \right)^* + \\ + \sum_{\substack{J M l' \\ m' \nu \nu'}} (2l + 1)^{1/2} (s l \nu 0 | J M) (s' l' \nu' m' | J M) \times \\ \times \delta_{\alpha' s' \nu', \alpha s \nu} 2 \operatorname{Re} [i T_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J Y_m^{(l')}(\Omega_{\alpha'}) C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'})]. \quad (2.4)$$

Первый член этого выражения может быть интерпретирован как соответствующий чисто кулоновскому рассеянию, второй — резонансному рассеянию и реакции и последний член — интерференции между первыми двумя. Суммы в резонансном члене могут быть вычислены с помощью приема, описанного Блаттом, Биденхарном и Роузом [65, 66], а суммы в интерференционном члене — с помощью соотношения

$$\sum_{M\nu} (sl\nu 0 | JM) (s'l'\nu m' | JM) = \frac{2J+1}{2l+1} \delta_{l'm', l_0}. \quad (2.5)$$

В результате получим

$$(2s+1) \frac{k_\alpha^2}{\pi} d\sigma_{\alpha s, \alpha' s'} d\Omega_{\alpha'} = (2s+1) |C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'})|^2 \delta_{\alpha' s', \alpha s} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_L B_L(\alpha' s', \alpha s) P_L(\cos \theta_{\alpha'}) + (4\pi)^{-1/2} \sum_J (2J+1) \times \\ \times 2 \operatorname{Re} [iT_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'}) P_l(\cos \theta_{\alpha'})], \quad (2.6)$$

где

$$B_L(\alpha' s', \alpha s) = \frac{1}{4} (-)^{s-s'} \sum_{J_1 J_2 l_1 l_2 l'_1 l'_2} \bar{Z}(l_1 J_1 l_2 J_2, sL) \times \\ \times \bar{Z}(l'_1 J_1 l'_2 J_2, s'L) (T_{\alpha' s' l'_1, \alpha s l_1}^{J_1}) (T_{\alpha' s' l'_2, \alpha s l_2}^{J_2})^*. \quad (2.7)$$

Коэффициенты \bar{Z} связаны с коэффициентами W Рака соотношением

$$\bar{Z}(l_1 J_1 l_2 J_2, sL) = (2l_1+1)^{1/2} (2l_2+1)^{1/2} (2J_1+1)^{1/2} \times \\ \times (2J_2+1)^{1/2} (l_1 l_2 00 | L0) W(l_1 J_1 l_2 J_2, sL) \quad (2.7a)$$

и с коэффициентами Z Блатта и Биденхарна соотношением

$$\bar{Z}(l_1 J_1 l_2 J_2, sL) = i^{l_1-l_2-L} Z(l_1 J_1 l_2 J_2, sL). \quad (2.7b)$$

Таким образом, полученное здесь выражение для B_L отличается от выражения, полученного Блаттом и Биденхарном [65, 66], множителем $i^{l_1-l_2+l'_1-l'_2-2L}$. Это различие обусловлено различием свойств выбранных функций по отношению к операции обращения времени.

В некоторых приложениях [65, 66] оказывается желательным выделить из U диагональную часть D , оставив, вообще говоря, недиагональный остаток X :

$$U = D + X. \quad (2.8)$$

Формулы особенно упрощаются, если D , подобно $C_\alpha(\theta_\alpha)$, не зависит от J :

$$D_{\alpha's'l', \alpha sl}^J = D_{\alpha sl}. \quad (2.9)$$

Тогда

$$D_{\alpha's'l'v'm', \alpha slv0} = \delta_{\alpha's'v'l'm', \alpha slv0} D_{\alpha sl}. \quad (2.10)$$

Определив величину потенциального рассеяния как

$$\begin{aligned} p_{\alpha s} &= -i \sum_l (2l+1)^{1/2} (e^{2i\omega_{\alpha l}} - D_{\alpha sl}) Y_0^{(l)}(\Omega_\alpha) = \\ &= -i (4\pi)^{-1/2} \sum_l (2l+1) (e^{2i\omega_{\alpha l}} - D_{\alpha sl}) P_l(\cos \theta_\alpha), \end{aligned} \quad (2.11)$$

приведем амплитуды рассеяния и реакции к виду

$$\begin{aligned} A_{\alpha's'v', \alpha sv}(\Omega_{\alpha'}) &= -\frac{\pi^{1/2}}{k_\alpha} \left\{ [C_{\alpha'}(\theta_{\alpha'}) + p_{\alpha's'}] \delta_{\alpha's'v', \alpha sv} + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{l'm'} (2l+1)^{1/2} X_{\alpha's'l'v'm', \alpha slv0} Y_{m'}^{(l')}(\Omega_{\alpha'}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Очевидно, что для соответствующей модификации сечения (2.6) необходимо сделать замену

$$C \rightarrow C + p, \quad T \rightarrow -X. \quad (2.13)$$

§ 3. Интегральные и полные сечения

Под „интегральным“ сечением реакции $\alpha s \rightarrow \alpha's'$ мы будем понимать сечение, полученное путем интегрирования дифференциального сечения (2.6) по телесному углу $\Omega_{\alpha'}$. При этом интегрировании не обращается в нуль лишь вклад от B_0 . Используя соотношение

$$\bar{Z}(l_1 J_1 l_2 J_2, s0) = \delta_{l_1 J_1, l_2 J_2} (-)^{J_1 - s} (2J_1 + 1)^{1/2}, \quad (3.1)$$

получаем известный результат:

$$\sigma_{\alpha s, \alpha's'} = \frac{\pi}{k_\alpha^2 (2s+1)} \sum_{Jl'l'} (2J+1) |T_{\alpha's'l', \alpha sl}^J|^2. \quad (3.2a)$$

В формуле (3.2) опущен бесконечный вклад упругого кулоновского рассеяния. Сечение, наблюдаемое на опыте, в котором различные значения s' не отличаются и которое получается при использовании неполяризованного пучка и неполяризованных ядер-мишени, может быть получено путем суммирования (3.2а) по s' и усреднения по s :

$$\sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{Jl'l'ss'} g_J |T_{\alpha's'l', \alpha sl}^J|^2, \quad (3.2б)$$

где g_J представляет собой спиновой статистический множитель, определенный как

$$g_J = \frac{2J+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)}. \quad (3.2в)$$

Наблюдаемое полное сечение получается путем суммирования (3.2б) по всем возможным α' (включая $\alpha' = \alpha$). Из унитарности матрицы U следует, что это сечение равно

$$\sigma_\alpha^{\text{полн.}} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_J 2g_J \sum_{sl} [1 - \text{Re}(U_{\alpha sl}^J)]. \quad (3.3)$$

§ 4. Соотношение между полным сечением и мнимой частью амплитуды рассеяния вперед

Согласно формуле (3.3), полное сечение связано с суммой диагональных элементов матрицы столкновений и с величинами, комплексно-сопряженными им. Поскольку подобная сумма имеется и в выражении для амплитуды упругого рассеяния вперед, то можно найти связь между этими величинами в случае отсутствия кулоновского поля.

Согласно (2.3), амплитуда *чисто* упругого рассеяния вперед (т. е. $s = s'$, а также $\alpha = \alpha'$) равна

$$A_{\alpha s \nu, \alpha s \nu}(0) = \frac{1}{2} i k_\alpha^{-1} \sum_{J M l' \nu} (2l+1)^{1/2} (2l'+1)^{1/2} \times \\ \times (s l \nu 0 | J M) (s l' \nu 0 | J M) T_{\alpha s l, \alpha s l'}^J; \quad (4.1)$$

так как отлично от нуля лишь $Y_0^{(l')}(0)$, члены с $\nu' \neq \nu$, соответствующие переворачиванию спина, отсутствуют. Усреднение этой амплитуды по s и ν может быть легко произведено

при использовании для суммы по ν выражения (2.5). Таким образом, для мнимой части этой амплитуды находим

$$\begin{aligned} \langle \text{Im } A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0) \rangle_{S, \nu} &\equiv [(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{-1} \sum_{S\nu} \text{Im } A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0) = \\ &= (4k_\alpha)^{-1} \sum_{Jsl} 2g_J [1 - \text{Re}(U_{\alpha sl, \alpha sl}^J)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Сравнивая (4.2) и (3.3), получаем искомое соотношение

$$\langle \text{Im } A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0) \rangle_{S, \nu} = \left(\frac{k_\alpha}{4\pi} \right) \sigma_\alpha^{\text{полн.}}. \quad (4.3)$$

С помощью соотношения (4.3) может быть получено неравенство, связывающее $\sigma_\alpha^{\text{полн.}}$ с дифференциальным сечением упругого рассеяния вперед. Это сечение равно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\alpha\alpha}(0)}{d\Omega_\alpha} &= [(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{-1} \left[\sum_{S\nu} |A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s' (\neq s) \nu} |A_{\alpha_{s'\nu}, \alpha_{s'\nu}}(0)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из неравенства Шварца

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N b_i^2 \right)$$

при $a_i = \text{Im}[A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0)]$ и $b_i = 1$ следует, что

$$\begin{aligned} &[(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{-1} \sum_{S\nu} [\text{Im } A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0)]^2 \geq \\ &\geq \left[(2I_1 + 1)^{-1} (2I_2 + 1)^{-1} \sum_{S\nu} \text{Im } A_{\alpha_{S\nu}, \alpha_{S\nu}}(0) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тогда, очевидно, получим неравенство

$$\frac{d\sigma_{\alpha\alpha}(0)}{d\Omega_\alpha} \geq \left(\frac{k_\alpha \sigma_\alpha^{\text{полн.}}}{4\pi} \right)^2. \quad (4.6)$$

Это неравенство иногда называют неравенством Вика [93]. С его помощью по известному полному сечению можно оценить нижний предел величины дифференциального сечения упругого рассеяния вперед. Непосредственное измерение этого дифференциального сечения в большинстве случаев представляет весьма сложную задачу, а иногда и совсем невозможно.

Глава IX

ДРУГАЯ ФОРМА СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ R-МАТРИЦЕЙ И МАТРИЦЕЙ СТОЛКНОВЕНИЙ; РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ СТОЛКНОВЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

В практических приложениях теории обычно делается целый ряд упрощающих предположений. Однако теория в той форме, в которой она была сформулирована в предыдущих главах, непригодна для этой цели. По этой причине мы опишем в общих чертах иные варианты теории.

§ 1. Разложение матрицы столкновений по вещественным собственным значениям

Полученное нами выражение для матрицы U [см. (VII. 1.5)] содержит матрицу, обратную матрице $(1 - RL^0)$, порядок которой равен числу каналов. Найти обратную матрицу в случае одного канала (см. § 1, гл. VII) не представляет никакого труда; это также сравнительно легко осуществляется в случае двух каналов (см. § 3, гл. VII). В общем же случае это сделать невозможно, если не вводить дополнительных предположений. Эти трудности, связанные с отысканием обратных матриц и вообще с разложением матриц, отражают трудность решения системы уравнений со многими неизвестными, которое требуется основным матричным соотношением (V. 2.7).

Часто оказывается удобным заменить задачу отыскания матрицы, обратной матрице $(1 - RL^0)$, эквивалентной задачей отыскания матрицы, обратной некоторой другой матрице, отличной от $(1 - RL^0)$. Благодаря специальной форме R-матрицы (V. 2.8) оказывается возможным преобразовать матрицу W от вида (VII. 1.6), в котором фигурирует матрица, обратная „матрице каналов“ (элементы которой нумеруются индексами каналов c), к виду, в котором фигурирует матрица, обратная „матрице уровней“ (элементы которой нумеруются индексами уровней системы λ). В случае одного уровня, т. е.

в случае, когда явно рассматривается только один уровень, отыскание обратной „матрицы уровней“ тривиально независимо от числа каналов. Даже в том случае, когда играет роль большое число уровней, некоторые обстоятельства, возникающие в практически важных случаях (см. гл. XI), позволяют сделать упрощающие предположения, которые приводят к диагонализации матрицы по уровням λ , а после указанной диагонализации отыскание обратной матрицы становится тривиальным. В отсутствие таких приближений использование матрицы уровней не упрощает задачу и фактически может даже усложнить ее.

а. Обращение матрицы $(1 - RL^0)$

Задача состоит в том, чтобы свести отыскание матрицы, обратной „матрице каналов“ $(1 - RL^0)$, фигурирующей в выражении (VII.1.6):

$$W = 1 + \mathfrak{F}^{1/2} (1 - RL^0)^{-1} R \mathfrak{F}^{1/2} w,$$

к задаче отыскания матрицы, обратной матрице уровней. Начнем с того, что представим R-матрицу в виде суммы двух членов, соответствующих двум группам уровней:

$$R = R^0 + R'. \tag{1.1}$$

Произведение матриц $(1 - RL^0)^{-1} R$ принимает вид

$$(1 - RL^0)^{-1} R = (1 - R^0 L^0)^{-1} R^0 + \\ + (1 - R^0 L^0)^{-1} (1 - R' L')^{-1} R' (1 - R^0 L^0)^{-1}, \tag{1.2}$$

где

$$L' = L^0 (1 - R^0 L^0)^{-1}. \tag{1.3}$$

Разбиение (1.1) предпринимается с тем, чтобы попытаться найти матрицу, обратную $(1 - R^0 L^0)$, где R^0 — часть матрицы R. Из соотношения (1.2) тогда видно, что задача сводится к отысканию матрицы, обратной матрице $(1 - R' L')$, где R' — другая, оставшаяся часть матрицы R.

При отыскании обратной матрицы предположим, что имеет место разложение

$$(1 - \mathbf{R}'\mathbf{L}')^{-1} = 1 + \sum_{\mu\nu} (\gamma_\mu \times \beta_\nu) A_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

где

$$\beta_\nu = \mathbf{L}'\gamma_\nu = \mathbf{L}^0(1 - \mathbf{R}^0\mathbf{L}^0)^{-1}\gamma_\nu,$$

а величины $A_{\mu\nu}$, определяющиеся уровнями, должны, очевидно, быть функциями энергии. Если соотношение (1.4) действительно имеет место, то соотношения для величин $A_{\mu\nu}$ могут быть найдены путем умножения обеих частей равенства (1.4) на величину

$$(1 - \mathbf{R}'\mathbf{L}') = 1 - \sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda \times \beta_\lambda}{E_\lambda - E}. \quad (1.5)$$

При этом мы получим

$$\left[1 - \sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda \times \beta_\lambda}{E_\lambda - E} \right] \left[1 + \sum_{\mu\nu} (\gamma_\mu \times \beta_\nu) A_{\mu\nu} \right] = 1, \quad (1.6)$$

или

$$- \sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda \times \beta_\lambda}{E_\lambda - E} + \sum_{\mu\nu} (\gamma_\mu \times \beta_\nu) A_{\mu\nu} - \sum_{\lambda\mu\nu} \frac{\gamma_\lambda \times \beta_\nu}{E_\lambda - E} \xi_{\lambda\mu} A_{\mu\nu} = 0, \quad (1.7)$$

где

$$\xi_{\lambda\mu} = (\beta_\lambda, \gamma_\mu) \quad (1.8)$$

является скалярным произведением относительно каналов. Величины $\xi_{\lambda\mu}$ возникают в результате использования теоремы, относящейся к векторам-столбцам:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}).$$

Используя формулу

$$(\mathbf{M}\mathbf{x}, \mathbf{N}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{M}, \mathbf{N}\mathbf{y})),$$

где \mathbf{M} и \mathbf{N} — матрицы, получаем, что величины $\xi_{\lambda\mu}$ симметричны по λ и μ , поскольку матрица \mathbf{L}' симметрична. Соотношение (1.7) можно переписать в виде

$$\sum_{\lambda\nu} (\gamma_\lambda \times \beta_\nu) \left[- \frac{\delta_{\lambda\nu}}{E_\lambda - E} + A_{\lambda\nu} - \sum_{\mu} \frac{\xi_{\lambda\mu} A_{\mu\nu}}{E_\lambda - E} \right] = 0. \quad (1.9)$$

Если для всех λ и ν справедливо соотношение

$$(E_\lambda - E) A_{\lambda\nu} - \sum_{\mu} \xi_{\lambda\mu} A_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}, \quad (1.10)$$

то будет справедливо и соотношение (1.9). Если ввести матрицу уровней A , элементы которой равны $A_{\lambda\nu}$, симметричную матрицу ξ , вещественную диагональную матрицу e , элементы которой равны E_λ , и единичную матрицу 1 , элементы которой равны $\delta_{\lambda\mu}$, то система уравнений (1.10) может быть записана в виде одного уравнения для матрицы уровней:

$$A = (e - E - \xi)^{-1}, \quad (1.11)$$

где матрица E равна единичной матрице, умноженной на энергию E . Таким образом, задача отыскания матрицы, обратной матрице каналов $(1 - R'L')$, приведена к задаче отыскания матрицы, обратной матрице уровней $(e - E - \xi)$.

Запишем теперь искомую величину, фигурирующую в (1.2), в виде

$$\begin{aligned} (1 - R'L')^{-1} R' &= \left[1 + \sum_{\mu\nu} (\gamma_\mu \times \beta_\nu) A_{\mu\nu} \right] \left[\sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda}{E_\lambda - E} \right] = \\ &= \sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda}{E_\lambda - E} + \sum_{\mu\nu\lambda} \frac{(\gamma_\mu \times \gamma_\lambda) \xi_{\nu\lambda} A_{\mu\nu}}{E_\lambda - E}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Учитывая свойства симметрии матриц ξ и A и используя (1.10), сразу же получаем искомый результат:

$$(1 - R'L')^{-1} R' = \sum_{\lambda\mu} (\gamma_\lambda \times \gamma_\mu) A_{\lambda\mu}. \quad (1.13)$$

Используя (1.13), (1.2) и (VII. 1.6), получаем для матрицы столкновений разложение по вещественным собственным значениям:

$$W = 1 + \mathfrak{P}^{1/2} \left[(1 - R^0 L^0)^{-1} R^0 + \sum_{\lambda\mu} (\alpha_\lambda \times \alpha_\mu) A_{\lambda\mu} \right] \mathfrak{P}^{1/2} w, \quad (1.14)$$

где

$$\alpha_\lambda = (1 - R^0 L^0)^{-1} \gamma_\lambda = (L^0)^{-1} \beta_\lambda. \quad (1.15)$$

Матрицу ξ удобно разделить на вещественную и мнимую части:

$$\xi = -\Delta + \frac{1}{2} i\Gamma; \quad (1.16)$$

матрица Δ называется *матрицей сдвигов*, а матрица Γ — *матрицей ширин*. Они могут быть определены следующим образом. Согласно (1.15), имеем

$$\gamma_\lambda = (1 - \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0) \alpha_\lambda,$$

и, поскольку величина γ_λ вещественна,

$$\gamma_\lambda = (1 - \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^{0*}) \alpha_\lambda^*.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \xi_{\lambda\mu} &= (\gamma_\lambda, \beta_\mu) = ((1 - \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^{0*}) \alpha_\lambda^*, \mathbf{L}^0 \alpha_\mu) = \\ &= (\alpha_\lambda^*, \mathbf{L}^0 \alpha_\mu) - (\mathbf{R}^0 \mathbf{L}^{0*} \alpha_\lambda^*, \mathbf{L}^0 \alpha_\mu) = \\ &= (\alpha_\lambda^*, \mathbf{L}^0 \alpha_\mu) - (\alpha_\lambda^*, \mathbf{L}^{0*} \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0 \alpha_\mu), \end{aligned} \quad (1.17)$$

если воспользуемся соотношением (1.8) и тем фактом, что \mathbf{R}^0 является симметричной матрицей. Второе слагаемое в (1.17) вещественно, так что, подставляя величину $\mathbf{L}^0 = \mathbf{S}^0 + i\mathbf{P}$ [см. (III. 4.4)] в первое слагаемое, получаем

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\mu} = (\alpha_\lambda^*, \mathbf{P} \alpha_\mu) = \frac{1}{2} \sum_c \Gamma_{\lambda\mu, c}, \quad (1.18a)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu, c} = 2P_c \alpha_{\lambda c}^* \alpha_{\mu c}, \quad (1.18b)$$

$$\Delta_{\lambda\mu} = (\alpha_\lambda^*, (\mathbf{L}^{0*} \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0 - \mathbf{S}^0) \alpha_\mu), \quad (1.18v)$$

причем

$$\mathbf{L}^0 = \mathbf{L} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{S}^0 = \mathbf{S} - \mathbf{B}.$$

Если матрица \mathbf{R}^0 диагональна, то соотношения (1.18) упрощаются:

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \sum_c \Gamma_{\lambda\mu, c}, \quad (1.19a)$$

где

$$\Gamma_{\lambda\mu, c} = 2P'_c \gamma_{\lambda c} \gamma_{\mu c}$$

и

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_c \Delta_{\lambda\mu, c}, \quad (1.19b)$$

где

$$\Delta_{\lambda\mu, c} = -S'_c \gamma_{\lambda c} \gamma_{\mu c}.$$

Здесь величины S' и P' определяются соотношением $L' = S' + iP'$. Отметим, что, хотя компоненты матрицы пол-

ных ширин могут быть представлены в виде суммы парциальных ширин как в случае (1.18a), так и в случае (1.19a), компоненты матрицы полных сдвигов могут быть выражены в виде суммы парциальных сдвигов лишь в случае, когда матрица \mathbf{R}^0 диагональна [см. (1.196)].

б. Разложения, соответствующие одному, двум и трем уровням

В тех случаях, когда матрице \mathbf{R}' [см. (VII. 1.6)] соответствует один, два или три уровня, обратную матрицу (1.11) можно без труда рассчитать с помощью обычных методов. С этой целью введем диагональную матрицу уровней

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} - \mathbf{E} - \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}', \quad (1.20)$$

где $\boldsymbol{\xi}'$ — недиагональная часть матрицы $\boldsymbol{\xi}$, так что $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'$ является диагональной матрицей. Обратные матрицы имеют следующий вид:

в случае *одного* уровня

$$A = \frac{1}{\varepsilon}; \quad (1.21)$$

в случае *двух* уровней (1 и 2)

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\varepsilon_2}{D}, & A_{22} &= \frac{\varepsilon_1}{D}, \\ A_{12} &= A_{21} = \frac{\xi_{12}}{D}, \\ D &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \xi_{12}^2; \end{aligned} \quad (1.22)$$

в случае *трех* уровней (1, 2 и 3)

$$\begin{aligned} DA_{11} &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \xi_{23}^2 \text{ и т. д.}, \\ DA_{12} &= -\xi_{12} \varepsilon_3 - \xi_{13} \xi_{23} \text{ и т. д.}, \\ D &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \xi_{23}^2 - \varepsilon_2 \xi_{13}^2 - \varepsilon_3 \xi_{12}^2 - 2\xi_{12} \xi_{13} \xi_{23}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

в. Интеграл вероятности для составной системы

Разложение (1.4) позволяет получить простое выражение для интеграла от квадрата модуля волновой функции [см. (V. 2.96)] во внутренней области в случае, когда в единственном канале имеется входящая волна, отвечающая

единичному потоку. Если этот канал обозначить индексом e (от слова „entrance“ — вход), то коэффициенты, фигурирующие в выражении для величин D_c [см. (VII. 1.26)], входящих в (V. 2.96), запишутся в виде

$$y_c = \delta_{ce}, \quad x_c = -U_{ce}. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (VII. 1.26) и используя выражение (VII. 1.6б) для матрицы столкновений с $\omega_c = 2i$, получаем

$$V = -i(2\hbar)^{1/2} (1 - \mathbf{R}\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R} \mathfrak{F}^{1/2} \mathbf{\Omega}, \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{D}^0 = -i(2\hbar)^{1/2} [1 + \mathbf{L}^0 (1 - \mathbf{R}\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R}] \mathfrak{F}^{1/2} \mathbf{\Omega}. \quad (1.25b)$$

Величины \mathbf{V} и \mathbf{D}^0 теперь рассматриваются не как векторы-столбцы, а как матрицы, каждый столбец которых относится к различным входным каналам.

После подстановки выражений (1.2) и (1.4) в (1.25б) производная матрица принимает вид

$$\mathbf{D}^0 = -i(2\hbar)^{1/2} [(1 - \mathbf{L}^0 \mathbf{R}^0)^{-1} + \sum_{\nu\mu} A_{\nu\mu} (\beta_\nu \times \alpha_\mu)] \mathfrak{F}^{1/2} \mathbf{\Omega}. \quad (1.26)$$

При выводе (1.26) мы воспользовались равенством

$$[1 + \mathbf{L}^0 (1 - \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R}^0] = (1 - \mathbf{L}^0 \mathbf{R}^0)^{-1}.$$

Используя равенство (1.10), которому удовлетворяют компоненты матрицы \mathbf{A} , и матричные соотношения, упоминавшиеся в § 1, a , находим, что скалярное произведение вектора γ_λ и e -го столбца производной матрицы равно

$$(\gamma_\lambda, \mathbf{D}_e^0) = -i(2\hbar)^{1/2} (E_\lambda - E) \sum_{\mu} A_{\lambda\mu} \alpha_{\mu e} \mathfrak{F}_e^{1/2} \Omega_e. \quad (1.27)$$

Если воспользоваться соотношением (1.27) и симметрией матрицы \mathbf{A} , а также предположить, что матрица \mathbf{R}^0 не зависит от энергии, то интеграл (V. 2.96) от квадрата модуля Ψ_e может быть записан в виде шпура (Sp) матрицы уровней:

$$\int |\Psi_e|^2 d\tau = \hbar \text{Sp} (\mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{\Gamma}_e) = \hbar \text{Sp} \left[\frac{\mathbf{\Gamma}_e}{(\mathbf{e} + \Delta - \mathbf{E})^2 + \frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^2 + \frac{1}{2} i \mathbf{\Gamma} (\mathbf{e} + \Delta) - \frac{1}{2} i (\mathbf{e} + \Delta) \mathbf{\Gamma}} \right], \quad (1.28)$$

где элементы матриц уровней Γ , Δ и Γ_e задаются соотношениями (1.18а), (1.18в) и (1.18б) соответственно. Для разложения, отвечающего одному уровню, этот интеграл имеет особенно простой вид:

$$\int |\Psi_e|^2 d\tau = \frac{\hbar \Gamma_{\lambda\lambda, e}}{(E_\lambda + \Delta_{\lambda\lambda} - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda\lambda}^2}. \quad (1.29)$$

Соотношение (1.29) оказывается справедливым и тогда, когда учитывается вклад от других уровней, при условии, что этот вклад может рассматриваться как некоторая постоянная величина.

Интересным следствием соотношения (1.27), которое нам понадобится в дальнейшем, является разложение во внутренней области волновой функции Ψ_e , отвечающей единичному падающему потоку в произвольном заданном канале. Из (V. 2.3), (V. 2.5) и (1.27) следует, что

$$\Psi_e = -i(2\hbar)^{1/2} \sum_{\lambda\mu} (A_{\lambda\mu} \alpha_{\mu e} P_e^{1/2} \Omega_e) X_\lambda. \quad (1.30)$$

Если мы положим $\mathbf{R}^0 = \mathbf{0}$, так что $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$, и $\alpha_{\mu e} = \gamma_{\mu e}$, то разложение (1.30) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_e &= -i(2\hbar)^{1/2} \sum_{\lambda\mu} (A_{\lambda\mu} \gamma_{\mu e} P_e^{1/2} \Omega_e) X_e = \\ &= -i\hbar^{1/2} \Omega_e \sum_{\lambda\mu} (A_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu e}^{1/2}) X_\lambda. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Соответствующие элементы матрицы столкновений находятся путем вычисления скалярного произведения функций Ψ_e и Ψ_c , взятого на бесконечности:

$$U_{ce} \equiv U_{ec} = i\Omega_e \Omega_c \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu e}^{1/2} \Gamma_{\lambda c}^{1/2}. \quad (1.32)$$

Полученный результат находится в согласии с разложением (1.14).

§ 2. Разложение матрицы столкновений по комплексным собственным значениям

Матрица столкновений с помощью разложения (1.14) выражается через *вещественные* собственные значения E_λ , амплитуды приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$ и параметры B_c в граничном условии, равно как и через вещественные пара-

метры S_c , P_c и ϕ_c , определяющие значения внешних функций на поверхности \mathcal{S} . Это разложение содержит *двойную* сумму. Для матрицы столкновений можно получить разложение по собственным значениям, которое содержало бы *одинарную* сумму. Однако E_λ и $\gamma_{\lambda c}$ в этом разложении уже не будут вещественными величинами; это и есть та цена, которую приходится платить за то, что мы будем иметь одинарную сумму вместо двойной.

Опишем теперь процедуру, позволяющую получить разложение в виде одинарной суммы; отправным пунктом при этом являются результаты, полученные нами для случая вещественных значений E_λ и $\gamma_{\lambda c}$. Затем мы дадим другой более простой и более прямой вывод, где с самого начала вводятся комплексные собственные значения и комплексные собственные функции. Такого рода процедура использовалась Капуром и Пайерлсом [12, 13], которые дали первый строгий вывод общих резонансных формул. Обе упомянутые процедуры дают для U разложение в виде одинарной суммы с собственными значениями H_λ и амплитудами приведенных ширин $\omega_{\lambda c}$, зависящими от энергии E . Эта зависимость по некоторым соображениям является нежелательным обстоятельством, и в § 2, в мы опишем разложение, которое содержит независящие от энергии параметры; такое разложение было введено Зигертом [94] и развито Юмбле [95].

а. Вывод разложения Капура — Пайерлса с помощью разложения по вещественным собственным значениям

Известно, что, если симметричная матрица, подобная $(e - \xi)$, не имеет вырожденных (двойных) характеристических значений, матрица T , которая приводит ее к диагональному виду H , является комплексной ортогональной матрицей. Таким образом, имеем

$$H = F - \frac{1}{2} i\Gamma = T(e - \xi) T^{-1} = T(e - \xi) T^{+*}, \quad (2.1)$$

где F и Γ — вещественные диагональные матрицы, а T^{+*} — транспонированная матрица T . Следовательно,

$$A = T^{+*} (H - E)^{-1} T, \quad (2.2)$$

а из (1.13) имеем

$$(1 - \mathbf{R}'\mathbf{L}')^{-1}\mathbf{R}' = \sum_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}}{H_{\lambda} - E}, \quad (2.3)$$

где

$$\omega_{\lambda c} = \sum_{\nu} T_{\lambda\nu} \gamma_{\nu c} \quad (2.4)$$

являются комплексными величинами. Подставляя (2.3) в (1.2), а (1.2) в (VII. 1.6б) и используя изложенное вслед за соотношением (1.15), получаем для матрицы столкновений разложение, содержащее одинарную сумму:

$$\mathbf{W} = 1 + \mathfrak{P}^{1/2} \left[(1 - \mathbf{R}^0\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 + \sum_{\lambda} \frac{(\theta_{\lambda} \times \theta_{\lambda})}{F_{\lambda} - E - \frac{1}{2} i\Gamma_{\lambda}} \right] \mathfrak{P}^{1/2} \mathbf{w}, \quad (2.5)$$

где

$$\theta_{\lambda} = (1 - \mathbf{R}^0\mathbf{L}^0)^{-1} \omega_{\lambda} = \sum_{\nu} T_{\lambda\nu} \alpha_{\nu}. \quad (2.6)$$

Так как величина L^0 зависит от энергии, то величины $T_{\lambda\nu}$ и F_{λ} , так же как и величина θ_{λ} , будут зависеть от энергии.

Если бы сумма в соотношении (2.5) была обычной резонансной суммой, то мнимая часть величины H_{λ} (т. е. $-\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda}$) была бы связана с величинами $(2P)^{1/2}\theta_{\lambda c}$, фигурирующими в числителе, соотношением $\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda} = \sum_c P_c |\theta_{\lambda c}|^2$. Интересно выяснить, каким же является это соотношение на самом деле. Из (2.1) следует

$$\mathbf{T}e\mathbf{T}^{\dagger} - \mathbf{T}\xi\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^{\dagger}, \quad (2.7a)$$

для которого комплексно сопряженное соотношение имеет вид

$$\mathbf{T}^*e\mathbf{T}^{\dagger*} - \mathbf{T}^*\xi^*\mathbf{T}^{\dagger*} = \mathbf{H}^*\mathbf{T}^*\mathbf{T}^{\dagger*}. \quad (2.7b)$$

Диагональные элементы первого члена левой части соотношения (2.7б) и диагональные элементы правой части соотношения (2.7а) соответственно равны

$$(\mathbf{T}e\mathbf{T}^{\dagger})_{\lambda\lambda} = \sum_{\nu} E_{\nu} |T_{\lambda\nu}|^2, \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^{\dagger*})_{\lambda\lambda} = \left(F_{\lambda} - \frac{1}{2} i\Gamma_{\lambda} \right) N_{\lambda}, \quad (2.9)$$

где

$$N_\lambda = \sum_\nu |T_{\lambda\nu}|^2. \quad (2.10)$$

С помощью соотношений (1.17) и (2.6) находим диагональные элементы второго слагаемого левой части соотношения (2.7а):

$$(\mathbf{T}\mathbf{\xi}\mathbf{T}^\dagger)_{\lambda\lambda} = i \sum_c P_c |\theta_{\lambda c}|^2 - (\theta_\lambda^*, (\mathbf{L}^{0*}\mathbf{R}^0\mathbf{L}^0 - \mathbf{S}^0)\theta_\lambda), \quad (2.11)$$

где сумма по каналам и скалярное произведение являются вещественными величинами. Таким образом, вычитая (2.7б) из (2.7а), получаем

$$\frac{1}{2} \Gamma_\lambda = N_\lambda^{-1} \sum_c P_c |\theta_{\lambda c}|^2; \quad (2.12)$$

складывая же (2.7а) и (2.7б), получаем

$$F_\lambda = N_\lambda^{-1} \left[\sum_\nu E_\nu |T_{\lambda\nu}|^2 + (\theta_\lambda^*, (\mathbf{L}^{0*}\mathbf{R}^0\mathbf{L}^0 - \mathbf{S}^0)\theta_\lambda) \right]. \quad (2.13)$$

Так как

$$(\mathbf{T}\mathbf{T}^{+\dagger})_{\lambda\lambda} = \sum_\nu \dot{T}_{\lambda\nu}^2 = 1$$

и так как \mathbf{T} является, вообще говоря, комплексной величиной, то ясно, что $N_\lambda \geq 1$. Из (2.12) следует, что мнимые части $1/2 i\Gamma_\lambda$ собственных значений H_λ удовлетворяют неравенствам

$$\Gamma_\lambda \leq \sum_c \Gamma_{\lambda c}, \quad (2.14)$$

где

$$\Gamma_{\lambda c} = 2P_c |\theta_{\lambda c}|^2.$$

Поскольку величина $\Gamma_{\lambda c}$ равна квадрату модуля вектора $(2P_c)^{1/2} \theta_{\lambda c}$, входящего в числитель выражения (2.5) (множитель $2^{1/2}$ появляется от вронскиана), приведенное выше неравенство указывает на то, что полные ширины, входящие в знаменатель, меньше или равны суммам парциальных ширин в числителе.

б. Прямой вывод разложения Капура — Пайерлса

Полученные результаты фактически представляют собой обобщение теории Капура — Пайерлса в том смысле, что при их выводе некоторая произвольная часть \mathbf{R} -матрицы

(а именно R^0) не подвергалась никакому преобразованию. Для того чтобы сравнить наши результаты с результатами Капура — Пайерлса, положим $R^0 = 0$. Это сразу же приводит к тому, что $R' = R$, $L' = L^0$ и $\omega_\lambda = \theta_\lambda$. Тогда матрица столкновений (2.5) принимает вид

$$W = 1 + \mathfrak{P}^{1/2} \left[\sum_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}}{H_{\lambda} - E} \right] \mathfrak{P}^{1/2} w. \quad (2.15)$$

Теперь мы покажем, что это же самое выражение для матрицы столкновений вытекает из R -матричной теории, в которой с самого начала используются комплексные собственные значения и собственные функции. Капур и Пайерлс [12, 13] применяли именно такого рода процедуру. Величины $\omega_{\lambda c}$ и H_{λ} , входящие в (2.3), соответствуют амплитудам приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$ и собственным значениям E_{λ} R -матричной теории с комплексными состояниями. Капур и Пайерлс ввели решение X_{λ} , соответствующее комплексному собственному значению E_{λ} , и решение X_{λ}^* (точнее, обращенное во времени решение KX_{λ}), принадлежащее собственному значению E_{λ}^* . Эти решения отвечают параметрам B_c и B_c^* в граничных условиях, а их приведенные ширины комплексны. Если формулу Грина применить к X_{λ} и к комплексно сопряженной величине X_{λ}^* , то приходим к условию ортонормированности, имеющему вид

$$\int X_{\lambda'} X_{\lambda} d\tau = \delta_{\lambda\lambda'},$$

а не

$$\int X_{\lambda'}^* X_{\lambda} d\tau = \delta_{\lambda\lambda'}$$

см. (V. 2.2)]. Использование формулы Грина при $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$ показывает, что Γ_{λ} (мнимые части величины H_{λ}) удовлетворяют соотношению вида (2.12) с θ_{λ} , равным комплексной величине γ_{λ} , и с $N_{\lambda} = \int |X_{\lambda}|^2 d\tau$. Поскольку

$$\int |X_{\lambda}|^2 d\tau \geq \int X_{\lambda}^2 d\tau,$$

то неравенство (2.14) выполняется.

Капур и Пайерлс выбрали комплексный параметр B_c в граничных условиях равным зависящей от энергии логарифма

рифмической производной L_c , соответствующей, как известно, выходящим волнам. В этом случае матрица L^0 (напомним, что $L^0 = L - B$), входящая в соотношение (1.2) и (1.4), тождественно обращается в нуль; двойная сумма в (1.4), как и матрица ξ в соотношении (1.11), также обращается в нуль. Таким образом, матрица A становится диагональной, а матрица столкновений (1.14) принимает вид

$$W = 1 + \mathfrak{P}^{1/2} \left[\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{E_{\lambda} - E} \right] \mathfrak{P}^{1/2} w. \quad (2.15a)$$

Сравнение с (2.15) непосредственно подтверждает нашу интерпретацию величин $\omega_{\lambda c}$ и H_{λ} как амплитуд приведенных ширин и собственных значений, отвечающих R-матричной теории с комплексными состояниями.

Разложение (2.15a) значительно проще разложения (1.14), так что вместо трудности отыскания обратной матрицы (1.11) или (1.12) мы встречаемся с трудностью, связанной с тем, что теперь нам приходится иметь дело с зависящими от энергии и комплексными величинами $\gamma_{\lambda c}$ и E_{λ} . Любая попытка устранить энергетическую зависимость и сделать величины $\gamma_{\lambda c}$ и E_{λ} вещественными возвращает нас к разложению по вещественным собственным значениям и к трудностям отыскания обратных матриц. По этой причине мы и отдаем предпочтение разложению по вещественным собственным значениям и используем его в качестве основы изложения во всей книге.

в. Разложение Зигерта — Юмбле

Характерной чертой разложения Капура — Пайерлса является зависимость от энергии амплитуд ширин $\omega_{\lambda c}$ и собственных значений H_{λ} , на что указывает его вывод как в § 2, б, так и в § 2, а. При прямом выводе (§ 2, б) параметр B_c в граничном условии для функций X_{λ} выбирается равным логарифмической производной L_c , соответствующей выходящим волнам с энергией E . Следовательно, для двух значений энергии E_1 и E_2 наборы величин $\omega_{\lambda c}$ и H_{λ} будут различными. Зависимость величин $\omega_{\lambda c}$ и H_{λ} от энергии в общем, за исключением, быть может, определенных частных

случаев (как, например, случая изолированного резонанса), не является простой.

Один из способов избежать этой зависимости заключается в использовании вещественных граничных условий, не зависящих от энергии E (что мы, следуя Вигнеру и Айзенбуду [18, 19], и сделали в настоящей работе). Другой метод был предложен Зигертом [94] и исследован Юмбле [95]. Согласно Зигерту, мы должны пользоваться состояниями X_λ , которым во всех каналах соответствуют выходящие волны, т. е. в этом случае граничные параметры равны логарифмическим производным выходящих волн, энергии которых равны *энергиям соответствующих состояний* H_λ , а не заданной энергии E . Эти состояния обычно называются „распадающимися состояниями“. Нам представляется, что эти состояния совмещают в себе лучшие черты двух описанных выше разложений: для матрицы U эти состояния приводят к разложению, содержащему одинарную сумму и параметры $\omega_{\lambda c}$ и H_λ , не зависящие от энергии.

Однако эти состояния имеют и определенные недостатки. Они комплексны, а следовательно, величины $\omega_{\lambda c}$ и H_λ также будут комплексны. Кроме того, во внутренней области эти состояния не ортогональны, так что обычный R -матричный метод получения матрицы U оказывается неприменимым. Тем не менее мы можем воспользоваться тем фактом, что энергии H_λ должны быть полюсами матрицы столкновений, чтобы разложить матрицу столкновений в ряд Миттаг-Леффлера. С другой стороны, мы можем начинать и с использования результатов, полученных в § 1. Если воспользоваться этими результатами, то можно утверждать, что в окрестности некоторой, интересующей нас энергии E матрица $(1 - R'L')^{-1}R'$ [см. (1.2)] может быть представлена в виде

$$(1 - R'L')^{-1}R' = \sum_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}}{H_{\lambda} - E}, \quad (2.16)$$

где собственные значения H_λ и „приведенные ширины“ ω_λ являются комплексными величинами. Умножая (2.16) слева на матрицу $(1 - R'L')$, получаем

$$R' = \sum_{\lambda} \frac{(1 - R'L') \omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}}{H_{\lambda} - E}. \quad (2.17)$$

В комплексных полюсах H_λ левая часть является ограниченной величиной, так что система линейных однородных уравнений для ω_λ

$$(1 - R'(H_\lambda) L') \omega_\lambda = 0 \quad (2.18)$$

будет иметь нетривиальные решения; величины H_λ являются корнями соответствующего детерминантного уравнения

$$|1 - R'(H_\lambda) L'| = 0. \quad (2.19)$$

Так как величина L' в (2.18) и (2.19), вообще говоря, зависит от энергии, то необходимо предположить, что ее можно аналитически продолжить от E до комплексных значений H_λ , при которых рассчитывается величина L' (указанное предположение будет оправдано в § 2, *e*).

Решение системы (2.18) в случае, когда R' имеет только один уровень, представляет особый интерес. Представив (2.18) в виде

$$[(H_\lambda - E_\lambda) + (\gamma_\lambda \times \beta_\lambda)] \omega_\lambda = 0, \quad (2.20)$$

мы видим, что решение можно записать как

$$\gamma_\lambda = \omega_\lambda, \quad (2.21a)$$

$$H_\lambda = E_\lambda - \xi_{\lambda\lambda}. \quad (2.21b)$$

Разложим детерминант, соответствующий системе (2.20), по убывающим степеням величины $(H_\lambda - E_\lambda)$. Коэффициенты этого разложения представляют собой возрастающие степени главных миноров матрицы $(\gamma_\lambda \times \beta_\lambda)$ ранга 1. В этом случае легко показать, что решение (2.21) удовлетворяет также и уравнению (2.19), поскольку все миноры, имеющие порядок, больший единицы, обращаются в нуль.

г. Полюса разложения Зигерта — Юмбле

Как указывалось в § 8 гл. IV, в работе Шустера и Тиомно [41] (и в работах Ван-Кампена [77—79]) путем использования „условия причинности“ было показано, что полюса функции столкновений $U(k)$ (в случае одного канала), где k — комплексное волновое число, должны лежать либо на мнимой оси в комплексной k -плоскости, либо в нижней полуплоскости. Полюса на положительной мнимой полуоси соответствуют связанным состояниям. Вследствие общего условия

симметрии $U(k) = U^*(-k^*)$, описанного в § 8 гл. IV, в нижней полуплоскости полюса встречаются парами, расположенными симметрично относительно отрицательной мнимой полуоси; эти полюса соответствуют „резонансным“, или „распадающимся“, состояниям системы. При наличии многих каналов полюса матрицы столкновений, фигурирующей в R -матричной теории, также лежат либо на мнимой оси, либо в нижней полуплоскости. Впервые это было показано Мошинским [96, 97].

При исследовании аналитического продолжения функции столкновений $U(k)$ или $U(E)$ необходимо учитывать тот факт, что $U(E)$ является двузначной функцией, поскольку, вообще говоря, $U(k) \neq U(-k)$. В этом случае используются две энергетические плоскости (так называемые римановы листы); одна из них соответствует верхней половине k -плоскости, а другая — нижней половине k -плоскости. При исследовании аналитических свойств матрицы столкновений возникает дополнительное усложнение, связанное с тем, что для каждого канала имеется своя отдельная k -плоскость. Для простоты исследования мы можем все каналы перенумеровать в соответствии с их энергиями связи b_c , положив энергию связи в первом канале равной нулю. Тогда связь между комплексными переменными E и k запишется в виде

$$E = \frac{\hbar^2}{2M_1} k_1^2 = \frac{\hbar^2}{2M_c} k_c^2 + b_c,$$

где $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_c \dots$.

Чтобы показать, что полюса матрицы столкновений (т. е. полюса H_λ разложения (2.16), где $R^0 = 0$, $R' = R$, $L' = L^0$) удовлетворяют требованию „причинности“, мы начнем с того, что образуем скалярное произведение величины $(L^0 \omega_\lambda)^*$ и выражения (2.18):

$$\begin{aligned} (\omega_\lambda^*, L^0 \omega_\lambda) &= (\omega_\lambda^*, L^0 R L^0 \omega_\lambda) = \\ &= \sum_\lambda (E_\lambda - H_\lambda)^{-1} \left| \sum_c \omega_{\lambda c} L_c^0 \gamma_{\lambda c} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Умножим обе части равенства (2.22) на $\text{Im } H_\lambda$ (мнимую часть величины H_λ) и рассмотрим знаки (Sgn) полученных соотношений. Знак правой части соотношения (2.22) равен $\text{Sgn}(\text{Im } H_\lambda)$, так что

$$\text{Sgn}(\text{Im } H_\lambda) \cdot \text{Sgn}(\text{Im}(\omega_\lambda^*, L^0 \omega_\lambda)) = (\text{Sgn}(\text{Im } H_\lambda))^2 = +. \quad (2.23)$$

Если компоненты $L_c^{0*} = S_c^0 - iP_c$ матрицы L^0 считать всюду постоянными, то тогда становится очевидным, что

$$\text{Sgn}(\text{Im } H_\lambda) = --$$

или что $\text{Im}(H_\lambda) = 0$, поскольку $\text{Sgn}(P_c) = +$ для каналов с положительной энергией, а для каналов с отрицательной энергией $P_c = 0$. В этом приближении условие „причинности“ удовлетворяется, так что полюса расположены либо все на мнимой оси, либо все в нижней половине k_1 -плоскости.

Не делая никаких приближений, пренебрегая лишь кулоновским полем, применим формулу Грина (V. 1.4) к выходящей волне $O_c(k_c)$ с комплексным k_c , соответствующим предполагаемому полюсу при H_λ , и к функции, комплексно-сопряженной с $O_c(k_c)$:

$$\left[O^* \frac{dO}{dr} - O \frac{dO^*}{dr} \right]_a^r + (k^2 - k^{*2}) \int_a^r |O|^2 dr = 0. \quad (2.24)$$

Поскольку $O_c \sim \exp\left[i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)\right]$ при $r \rightarrow \infty$, то совершенно ясно, что при $\text{Im } k > 0$ $|O(r)|^2 \rightarrow 0$, т. е. при $r \rightarrow \infty$ интеграл в (2.24) сходится. Тогда получаем

$$\text{Im } L^0(a) = \frac{2Ma}{\hbar^2} \text{Im } H_\lambda |O(a)|^{-2} \int_a^\infty |O|^2 dr$$

и

$$\text{Sgn}(\text{Im } L^{0*}) = - \text{Sgn } \text{Im } H_\lambda. \quad (2.25)$$

Следовательно, уравнение (2.23) для знаков оказывается несправедливым для полюсов при H_λ , соответствующих величине $\text{Im } k_1 > 0$ (а также величине $\text{Im } k_c > 0$), исключая H_λ , соответствующие точкам на положительной мнимой полуоси k_1 -плоскости, где $\text{Im } H_\lambda = 0$. Таким образом, полюса расположены на положительной мнимой полуоси (связанные состояния) и в нижней половине k_1 -плоскости (распадающиеся состояния).

д. Приведенные ширины в разложении Зигерта — Юмбле

Рассматривая по-прежнему случай $R^0 = 0$ (т. е. случай, когда $R' = R$, $L' = L^0$), исследуем теперь величины $\omega_{\lambda c}$ аналогично тому, как мы исследовали полюса H_λ . Уравне-

ния (2.18) для $\omega_{\lambda c}$ не предполагают никакой нормировки величин $\omega_{\lambda c}$. Умножив обе части соотношения (2.17) слева на $(\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}) \mathbf{L}^0$, получим

$$\begin{aligned} (\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}) [(\mathbf{L}'\mathbf{R}' - \mathbf{1}) + \mathbf{1}] &= \\ &= \sum_{\mu} \frac{(\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}) [(\mathbf{L}' - \mathbf{L}'\mathbf{R}'\mathbf{L}') \omega_{\mu} \times \omega_{\mu}]}{H_{\mu} - E} = \\ &= \sum_{\mu} \frac{[(\mathbf{L}' - \mathbf{L}'\mathbf{R}'\mathbf{L}') \omega_{\lambda}, \omega_{\mu}] (\omega_{\lambda} \times \omega_{\mu})}{H_{\mu} - E}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

При этом мы воспользовались формулами (1.8) и (1.15) и свойством симметрии матрицы \mathbf{R}' . Используя (2.18), можно показать, что в окрестности H_{λ} имеет место соотношение $(\omega_{\lambda} \times \omega_{\lambda}) (\mathbf{L}'\mathbf{R}'(H_{\lambda}) - \mathbf{1}) = (\omega_{\lambda} \times (\mathbf{R}'(H_{\lambda})\mathbf{L}' - \mathbf{1}) \omega_{\lambda}) = 0$, (2.27)

так что (2.26) сводится к соотношению

$$1 = \frac{(\omega_{\lambda}, (\mathbf{L}' - \mathbf{L}'\mathbf{R}'(H_{\lambda})\mathbf{L}') \omega_{\lambda})}{H_{\lambda} - E}. \quad (2.28)$$

Таким образом, нормировка получается при дифференцировании соотношения (2.28) по E :

$$1 = \left[\omega_{\lambda}, \left(-\frac{d}{dE}(\mathbf{L}') + \mathbf{L}'\mathbf{R}' \frac{d}{dE}(\mathbf{L}') + \frac{d}{dE}(\mathbf{L}')\mathbf{R}'\mathbf{L}' + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{L}' \frac{d}{dE}(\mathbf{R}')\mathbf{L}' \right) \omega_{\lambda} \right], \quad (2.29)$$

где \mathbf{R}' , \mathbf{L}' и $(d/dE)(\mathbf{L}')$ берутся при $E = H_{\lambda}$. Полученное условие (2.29) мы сможем упростить, если еще раз воспользуемся уравнением (2.18):

$$\left[\omega_{\lambda}, \left(\frac{d}{dE}(\mathbf{L}') + \mathbf{L}' \frac{d}{dE}(\mathbf{R}'(H_{\lambda}))\mathbf{L}' \right) \omega_{\lambda} \right] = 1. \quad (2.30)$$

Имея для $\omega_{\lambda c}$ такое условие нормировки, мы можем приступить теперь к интерпретации этих величин. Как указывалось в § 2, z , полюса матрицы столкновений соответствуют распадающимся состояниям, т. е. состояниям Ψ с выходящими волнами во всех каналах. Следовательно, для состояния такого рода имеет место соотношение типа (V. 2.96), но с Ψ^2 вместо $|\Psi|^2$:

$$\int \Psi^2 d\tau = \left(\mathbf{D}^0, \frac{d}{dE}(\mathbf{R}(H_{\lambda})) \mathbf{D}^0 \right),$$

где D_c^0 — величины, определенные равенством (V. 2.6), как $D_c - B_c V_c$; V_c и D_c определяют значения функции Ψ и ее производной на поверхности \mathcal{S} . Поскольку величина L_c является логарифмической производной для выходящих волн, она в точке $E = H_\lambda$ равна величине D_c/V_c . Отсюда следует, что $D_c^0 = L_c^0 V_c$, так что, подставляя $V_c = \omega_{\lambda c}$, сводим указанный объемный интеграл ко второму слагаемому в условии нормировки (2.30). Пренебрегая пока первым слагаемым в (2.30), мы можем величины $\omega_{\lambda c}$ интерпретировать как поверхностные значения $V_{\lambda c}$ волновой функции Ψ ($V_{\lambda c}$ равны амплитудам приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$). Первое слагаемое в (2.30) соответствует просто тому, что мы производим нормировку волновых функций не во внутренней области, а во всем пространстве, включая каналы.

Это становится очевидным, если мы рассмотрим специальный случай формулы Грина, куда входят не квадраты модулей, а просто квадраты волновых функций. Производя интегрирование в пределах от $r = a$ до больших значений r , получаем для (V. 1.5) два слагаемых: одно слагаемое, связанное с „поверхностью“ ($r = a$), и другое, отвечающее большим r . Для каналов с положительной энергией и волновых функций, имеющих форму $O \sim G + iF$, интеграл хотя и не сходится, но все же эффективно „обрезается“ вследствие вклада от поверхности радиуса r . Если пренебречь кулоновской фазой $\eta \ln 2\rho$ волны O , обозначив через φ оставшуюся постоянную фазу, то, прибавляя и вычитая величину

$$\int_a^r e^{2i(kr' + \varphi)} dr' = \frac{1}{2ik} [e^{2i(kr + \varphi)} - e^{2i(ka + \varphi)}],$$

мы можем записать вклад от отдельного канала в (2.30) в следующей форме:

$$\omega^2 \frac{d}{dE}(L^0) = \frac{k a \omega_\lambda^2}{O^2(a) H_\lambda} \left[\int_{ka}^\infty \{O^2(r) - e^{2i(\rho + \varphi)}\} d\rho + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} i e^{2i(ka + \varphi)} \right]; \quad (2.31)$$

сходимость полученного выражения очевидна, поскольку при $r \rightarrow \infty$

$$G + iF \rightarrow e^{2i(\rho + \varphi)}.$$

е. Связь между разложениями Капура — Пайерлса и Зигерта — Юмбле

Подставив (2.16) в (1.2), а (1.2) в свою очередь в (VII. 1.6), получим для матрицы столкновений разложение, по форме совпадающее с разложением Капура — Пайерлса (2.5). Однако эти разложения не являются одинаковыми, поскольку величины $\omega_{\lambda c}$ и H_λ в разложении (2.5) отличаются от соответствующих величин в разложении (2.16). В первом случае вследствие энергетической зависимости матрицы ξ , входящей в (2.1), для каждого значения энергии необходимо производить диагонализацию, в результате которой величины $\omega_{\lambda c}$ в (2.4) и H_λ в (2.1) оказываются зависящими от энергии. С другой стороны, величины H_λ , определяемые из (2.19), и $\omega_{\lambda c}$, определяемые системой (2.18), не зависят от энергии, по крайней мере в случае, если матрица L' является аналитической. [В действительности, эта матрица не является полностью аналитической, поскольку существуют точки ветвления в переходной области, где каналы с отрицательной энергией превращаются в каналы с положительной энергией. Тем не менее разложение (2.16) должно быть справедливым в ограниченной энергетической области, где матрица L' может рассматриваться как аналитическая; во всяком случае, это справедливо в той степени, в какой элементы матрицы L' могут рассматриваться как линейные функции энергии.]

Если в разложении (2.16) зависимость матрицы L' от энергии E рассматривается как параметрическая, а не как зависимость от комплексного переменного, то параметры разложения $\omega_{\lambda c}$ и H_λ , входящие в (2.3) и в (2.16), должны, конечно, быть одними и теми же. Указанная параметрическая зависимость от вещественной энергии E означает, что для каждого вещественного значения энергии E производится определение отдельно каждой величины $\omega_{\lambda c}$ и H_λ , согласно (2.18) — (2.20), и что, следовательно, величины $\omega_{\lambda c}$ и H_λ являются функциями вещественного параметра E . Весьма полезно подробно рассмотреть указанную эквивалентность и получить выражение для элементов комплексной ортогональной матрицы T .

Сравнивая соотношение

$$\omega_\mu = R(H_\mu)L'\omega_\mu = \sum_\nu \frac{\gamma_\nu(\beta_\nu, \omega_\nu)}{E_\nu - H_\mu}$$

[см. (2.18)] с соотношением (2.4), получаем

$$T_{\mu\nu} = \frac{(\beta_\nu, \omega_\mu)}{E_\nu - H_\mu}. \quad (2.32)$$

Ясно также, что, если $(d/dE)(L') = 0$, соотношение (2.26) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} (\omega_\lambda \times \omega_\lambda) &= \sum_{\mu} (\omega_\lambda \times \omega_\mu) \frac{(L' \omega_\lambda, (R(H_\mu) - R(H_\lambda)) L' \omega_\mu)}{H_\mu - H_\lambda} = \\ &= \sum_{\mu} (\omega_\lambda \times \omega_\mu) \sum_{\nu} T_{\lambda\nu} \tilde{T}_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

поскольку

$$R(H_\mu) - R(H_\lambda) = (H_\mu - H_\lambda) \sum_{\nu} \frac{(\gamma_\nu \times \gamma_\nu)}{(E_\nu - H_\mu)(E_\nu - H_\lambda)}.$$

Отсюда получаем, что элементы, определяемые с помощью (2.32), являются элементами комплексной ортогональной матрицы, т. е. матрицы, удовлетворяющей соотношению

$$TT^{+*} = 1. \quad (2.34)$$

Образую скалярное произведение из (2.18) и β_ν , получаем

$$(\beta_\nu, \omega_\lambda) - \sum_{\mu} \xi_{\nu\mu} \frac{(\beta_\mu, \omega_\lambda)}{E_\mu - H_\lambda} = 0,$$

или

$$T_{\lambda\nu}(E_\nu - H_\lambda) - \sum_{\mu} \xi_{\nu\mu} T_{\mu\lambda}^{\dagger} = 0,$$

или

$$T(e - \xi)T^{+*} = N.$$

Таким образом, мы видим, что матрица T , элементы которой определяются формулой (2.32), действительно диагонализует матрицу уровней $(e - \xi)$, входящую в соотношение (2.1).

Глава X

ИСКЛЮЧЕНИЕ КАНАЛОВ ПО МЕТОДУ ТЕЙХМАНА — ВИГНЕРА

В общей теории матрицы R и U являются квадратными матрицами, ранг которых равен полному числу каналов с положительной и отрицательной энергиями. При этом введено единственное ограничение: исключены все каналы, соответствующие распаду системы на три и большее число частей. Предполагается, что такие распады энергетически невозможны, так что можно исключить из рассмотрения такие процессы в явном виде, если включить соответствующие им каналы во „внутреннюю“ область.

Излагавшаяся до сих пор общая формулировка теории едва ли может оказаться полезной для практических расчетов, поскольку в этом случае нам пришлось бы иметь дело с сотнями и даже с тысячами каналов. Такое количество каналов в свою очередь влечет за собой большое число параметров, которыми являются элементы матрицы R , определяющие связь между матрицами U и R и большая часть которых никогда не может быть определена вследствие ограниченной точности экспериментальных данных. Следовательно, следует попытаться свести число параметров в теории к такому числу, чтобы их можно было реально определить из эксперимента. Рассмотрим следующие два примера.

1) *Измерение всех эффективных сечений в области энергий около изолированного резонанса.* Каждое отдельное сечение соответствует каналу с положительной энергией, так что мы можем получить все относящиеся к таким каналам ширины. Однако в экспериментах такого рода нельзя надеяться получить какую-либо информацию о каналах с отрицательной энергией (исключая, быть может, случай, когда мы находимся вблизи порога такого канала). Следовательно, мы должны как-то избавиться от того, чтобы такие каналы фигурировали в явном виде. Простейший способ состоит в том,

что эти каналы включаются во внутреннюю область, т. е. в том, чтобы перенести поверхности каналов в бесконечность, так что $\mathbf{R}^{--} = \mathbf{R}^{+-} = \mathbf{R}^{-+} = 0$. Формально против этого нет никаких возражений.

Другой метод был предложен Тейхманом и Вигнером [75]. В этом методе используется тот факт, что при заданной энергии граничные условия для каналов с отрицательной энергией известны. Последний метод является предпочтительным в случае, когда изучается энергетическая область около порога данного канала, поскольку в этом методе единым образом рассматриваются как области до порога, так и области после порога. (У порога следует отказаться от первого метода и рассматривать данный канал как обычный канал, поверхность которого расположена на конечном расстоянии.)

2) *Измерение при заданной энергии полного сечения и сечения упругого рассеяния при одном заданном канале, т. е. для заданного значения $s \equiv asl$.* При измерениях такого рода могут быть получены всего лишь два параметра. В первую очередь это могут быть просто вещественная и мнимая части величины U_{cc} . Как показали Фешбах, Пизли и Вайскопф [23], зная эти величины, можно получить вещественную и мнимую части логарифмической производной радиальной волновой функции, взятой на поверхности канала ($r_c = a_c$). Обычная \mathbf{R} -матрица связывает значения функций и производных на *всех* поверхностях каналов. Поэтому желательно найти „приведенную“ \mathbf{R} -матрицу, которая относилась бы к одному каналу.

Это может быть сделано путем использования метода Тейхмана — Вигнера, так называемого метода „исключения каналов“. Этот метод позволяет заменить истинную \mathbf{R} -матрицу соответствующей „приведенной“ \mathbf{R} -матрицей более низкого порядка, сравнимого с числом параметров, которые могут быть определены из некоторых экспериментальных данных. Приведенная \mathbf{R} -матрица вводится исключительно для удобства. Она не вносит какой-либо новой информации. Теоретический анализ совокупности эмпирических значений элементов приведенной \mathbf{R} -матрицы с помощью ширин уровней $\gamma_{\lambda c}$ и энергий E_{λ} может быть произведен лишь путем обратного перехода к истинной \mathbf{R} -матрице. Другими словами, „исключение каналов“, производимое в методе Тейхмана — Вигнера, не является истинным исключением, а всего лишь некоторым

удобным формальным приемом. Совершенно ясно, что в нашем примере факт наличия или отсутствия открытых каналов будет в общем оказывать влияние на характер экспериментальных данных, так что для любой замкнутой теоретической интерпретации экспериментальных данных необходим учет такого рода каналов. Тем не менее, как мы увидим в § 2 гл. XI, в приближении „случайных знаков“ связь между приведенной \mathbf{R} -матрицей и истинной \mathbf{R} -матрицей становится очень простой, так что данную приведенную \mathbf{R} -матрицу оказывается возможным рассматривать непосредственно с помощью величин $\gamma_{\lambda c}$ и E_{λ} .

§ 1. Приведенная \mathbf{R} -матрица (матрица \mathfrak{R})

а. Определение

В гл. VII мы получили общее соотношение между матрицей столкновений и \mathbf{R} -матрицей [см. (VII. 1.6)]. Рассмотрим недиагональный элемент $U_{cc'}$ матрицы столкновений. Этот элемент удобно рассматривать как один из элементов матрицы второго ранга

$$\begin{pmatrix} U_{cc} & U_{cc'} \\ U_{c'c} & U_{c'c'} \end{pmatrix}.$$

Мы хотим, воспользовавшись соотношением (VII. 1.6), получить выражение для этой субматрицы, соответствующей только двум интересующим нас каналам c и c' . Если бы нас интересовал диагональный элемент U_{cc} , то соответствующей субматрицей оказался бы просто сам элемент U_{cc} . Формально для искомой субматрицы нужно выражение можно получить прямо из (VII. 1.6). Подобная прямая процедура является менее эффективной, чем косвенный метод, в котором вводится „приведенная“ \mathbf{R} -матрица того же порядка, что и искомая субматрица. Приведенная \mathbf{R} -матрица (\mathfrak{R}), по существу, является просто удобным связующим звеном между общим соотношением (VII. 1.6) и малой субматрицей. Мы можем выяснить роль приведенной \mathbf{R} -матрицы чисто формальным, математическим путем [см. ниже, где (1.5) устанавливает связь между матрицей \mathfrak{R} и субматрицей, а (1.4) устанавливает связь между \mathfrak{R} и \mathbf{R} . Если из этих соотношений исключить матрицу \mathfrak{R} , то мы опять придем к общему соотноше-

нию (VII.1.6) для элементов субматрицы]. Однако приведенную \mathbf{R} -матрицу можно ввести и более физическим путем.

Предположим для общности, что мы имеем дело не с одним-двумя каналами, а с произвольным числом каналов. Все эти каналы мы будем называть „остающимися“ каналами, снабжая их индексом r , чтобы отличить их от остальных, подлежащих исключению каналов, которым мы будем приписывать индекс e . Предположим теперь, что мы имеем ситуацию, при которой входящие волны присутствуют только в r -каналах. (Следует заметить, что это необязательно должно соответствовать какой-либо экспериментальной ситуации.) Тогда e -каналы будут содержать только выходящие волны, в то время как другие каналы — смесь входящих и выходящих волн.

При таком разбиении каналов основное \mathbf{R} -матричное соотношение (V.2.7) сведется к двум соотношениям для субматрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_e &= \mathbf{R}_{ee} \mathbf{D}_e^0 + \mathbf{R}_{er} \mathbf{D}_r^0, \\ \mathbf{V}_r &= \mathbf{R}_{rr} \mathbf{D}_r^0 + \mathbf{R}_{re} \mathbf{D}_e^0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь индексы e и r относятся сразу к целым группам e - и r -каналов, а не к какому-нибудь заданному каналу; \mathbf{R}_{ee} , \mathbf{R}_{rr} и \mathbf{R}_{er} представляют собой матрицы, причем \mathbf{R}_{er} является в общем случае прямоугольной, а не квадратной матрицей. Поскольку в e -каналах присутствуют только выходящие волны, то значения соответствующих логарифмических производных на поверхности \mathcal{S} оказываются известными и равными значениям логарифмических производных функций O (см. гл. III):

$$\mathbf{L}_e^0 = \mathbf{D}_e^0 \mathbf{V}_e^{-1} = \mathbf{D}_e \mathbf{V}_e^{-1} - \mathbf{B}_e = \mathbf{L}_e - \mathbf{B}_e. \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и решая полученные таким путем матричные уравнения, имеем

$$\mathbf{V}_r = \mathfrak{H}_{rr} \mathbf{D}_r^0, \quad \mathbf{V}_e = \mathfrak{H}_{er} \mathbf{D}_r^0, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{rr} &= \mathbf{R}_{rr} + \mathbf{R}_{re} \mathbf{L}_e^0 (1 - \mathbf{R}_{ee} \mathbf{L}_e^0)^{-1} \mathbf{R}_{er}, \\ \mathfrak{H}_{er} &= (1 - \mathbf{R}_{ee} \mathbf{L}_e^0)^{-1} \mathbf{R}_{er}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь \mathfrak{H}_{rr} является симметричной приведенной \mathbf{R} -матрицей; она вещественна, если только e -группа каналов не содержит каналов с положительной энергией.

б. Связь с матрицей столкновений

С помощью процедуры, использованной для получения выражения (VII. 1.6б), непосредственно из (1.1) можно получить общие выражения для субматриц столкновений:

$$\mathbf{W}_{rr} = \mathbf{1} + \mathfrak{P}_r^{1/2} (\mathbf{1} - \mathfrak{H}_{rr} \mathbf{L}_r^0)^{-1} \mathfrak{H}_{rr} \mathfrak{P}_r^{1/2} \mathbf{w}_r, \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{W}_{er} = \mathfrak{P}_e^{1/2} \mathfrak{H}_{er} (\mathbf{1} - \mathbf{L}_r^0 \mathfrak{H}_{rr})^{-1} \mathfrak{P}_r^{1/2} \mathbf{w}_r. \quad (1.5б)$$

Хотя матрица \mathbf{W}_{rr}^{++} , представляющая собой часть матрицы \mathbf{W}_{rr} , отвечающую каналам с положительной энергией, является симметричной, она оказывается унитарной лишь в случае, когда r -каналы с положительной энергией отсутствуют.

в. Преобразование приведенной \mathbf{R} -матрицы в матрицу уровней

Тем же способом, каким мы получили соотношение (IX. 1.4), мы можем фигурирующую в (1.4) обратную матрицу выразить через матрицу, обратную матрице уровней:

$$\mathfrak{H}_{rr} = \mathbf{R}_{rr}^0 + \mathbf{R}_{re}^0 \mathbf{L}'_{ee} \mathbf{R}_{er}^0 + \sum_{\lambda\mu} (\omega_{\lambda r} \times \omega_{\mu r}) A_{\lambda\mu}, \quad (1.6)$$

где

$$\omega_{\lambda r} = \gamma_{\lambda r} + \mathbf{R}_{re}^0 \mathbf{L}'_{ee} \gamma_{\lambda e},$$

и

$$\mathfrak{H}_{er} = \sum_{\lambda\mu} (\alpha_{\lambda e} \times \gamma_{\mu r}) A_{\lambda\mu},$$

где

$$\alpha_{\lambda e} = (\mathbf{1} - \mathbf{R}_{ee}^0 \mathbf{L}_e^0)^{-1} \gamma_{\lambda e},$$

$$\mathbf{L}'_{ee} = \mathbf{L}_e^0 (\mathbf{1} - \mathbf{R}_{ee}^0 \mathbf{L}_e^0)^{-1}.$$

Как и в § 1 гл. IX, элементы симметричной матрицы уровней \mathbf{A} получаются из матричного соотношения

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e} - \mathbf{E} - \xi)^{-1}, \quad (1.7)$$

где элементы симметричной матрицы уровней $\xi = -\Delta + 1/2i\Gamma$ задаются с помощью скалярных произведений, в которые входят только e -каналы:

$$\xi_{\lambda\mu} = (\gamma_{\lambda e}, L'_{ee}\gamma_{\mu e}), \quad (1.8)$$

в противоположность выражению (IX. 1.8), где фигурируют также и r -каналы. Как и раньше, элементами диагональной вещественной матрицы e являются собственные значения E_λ , а вещественная диагональная матрица E равна единичной матрице, умноженной на энергию E . Подобно тому как это было сделано в § 1 гл. IX, из определения (1.8) можно получить выражения типа (IX. 1.18) для матрицы полной ширины Γ и матрицы сдвига Δ .

В случае $R^0 = 0$ соотношения (1.6) упрощаются и принимают вид

$$\mathfrak{R}_{rr} = \sum_{\lambda\mu} (\gamma_{\lambda r} \times \gamma_{\mu r}) A_{\lambda\mu}, \quad (1.9a)$$

$$\mathfrak{R}_{er} = \sum_{\lambda\mu} (\gamma_{\lambda e} \times \gamma_{\mu r}) A_{\lambda\mu}. \quad (1.9б)$$

§ 2. Исключение каналов с отрицательной энергией

Иногда желательно избавиться от явного использования каналов с отрицательной энергией, поскольку таких каналов оказывается слишком много, причем эти каналы обычно оказывают слабое влияние на поведение сечений рассеяния и реакций. Если такое исключение произведено и если отсутствуют e -каналы с положительной энергией, то приведенная R -матрица (1.4) оказывается вещественной, как и обычная R -матрица. Однако эта матрица будет иметь значительно более сложную форму. Если элементы матрицы L_e^0 , содержащейся в соотношении (1.4), могут быть заменены константами или линейными функциями энергии E (коэффициенты при E всегда положительны), то будет получено приближенное выражение для матрицы \mathfrak{R}_{rr} , которое может быть представлено в виде (V. 2.8) с независимыми от энергии E величинами γ_λ и E_λ , отличными в общем от соответствующих величин в (V. 2.8). Это утверждение можно проверить с помощью разложения (1.9a), причем оно может быть легко интерпретировано как изменение нормировки величины γ_λ , использованной в (V. 2.8).

Если для каналов с отрицательной энергией параметры B_e в граничном условии выбираются близкими к значениям S_e , так что величина $L_e^0 (=S_e^0 = S_e - B_e)$ оказывается очень малой, то недиагональная часть ξ' вещественной матрицы ξ , входящей в (1.7) ($P_e = 0$), может считаться малой по сравнению с диагональной частью матрицы $\epsilon = e - E - \xi + \xi'$, и всеми, кроме первого, членами разложения для (1.7)

$$A = \epsilon^{-1} + \epsilon^{-1}\xi'\epsilon^{-1} + \dots \quad (2.1)$$

можно пренебречь. В этом случае соотношение (1.9а) сводится к одинарной сумме:

$$\mathfrak{R}_{rr} \approx \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda r} \times \gamma_{\lambda r}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda\lambda} - E}, \quad (2.2)$$

где величины $\Delta_{\lambda\lambda}$ представляют собой диагональные элементы матрицы сдвига уровней для e -каналов. При $S_e^0 = 0$ величина $\Delta_{\lambda\lambda}$ обращается в нуль, а (1.11) сводится к субматрице R_{rr} в (V.2.8). Однако нам следует учесть зависимость величины S_e от энергии. Учитывая лишь линейный член в разложении величины S_e по энергии E около рассматриваемого значения E , получаем

$$\mathfrak{R}_{rr} \approx \sum_{\lambda} \frac{(\gamma_{\lambda r}^0 \times \gamma_{\lambda r}^0)}{E_{\lambda} - E}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda r}^0 &= \frac{\gamma_{\lambda r}}{\left(1 - \frac{d\Delta_{\lambda\lambda}}{dE}\right)^{1/2}}, \\ \frac{d\Delta_{\lambda\lambda}}{dE} &= - \sum_e \frac{dS_e}{dE} \gamma_{\lambda e}^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно результатам, полученным в Приложении и в § 3 гл. XII, и согласно определению $\gamma_{\lambda e}$ величина $-d\Delta_{\lambda\lambda}/dE$ равна объемному интегралу по внешней области от квадрата модуля волновой функции, которая описывает канал с отрицательной энергией и которая на поверхности сшивается с функцией X_{λ} . При сложении величины $-d\Delta_{\lambda\lambda}/dE$ с единицей в знаменателе правой части (2.4) возникает измененная нормировка величины $\gamma_{\lambda e}$, при которой нормировочный объем

равен внутренней области и той части внешней области, которая соответствует каналам с отрицательной энергией. Такое заключение можно было бы сразу сделать на основе выкладок гл. V, допустив лишь, что радиусы каналов с отрицательной энергией стремятся к бесконечности, где волновые функции обращаются в нуль. Соотношение (2.3) справедливо в той степени, с какой можно считать, что величина S_e аппроксимирована линейными функциями энергии. Следовательно, это приближение, равно как и соотношение (2.3), оказывается несправедливым у порогов, где величина S_e обладает аномальным поведением (см. Приложение).

§ 3. Исключение каналов реакции

Согласно формулам (VIII. 3.2) и (VIII. 3.3), экспериментальные полное сечение, сечение упругого рассеяния, сечение поглощения и сечение заданных реакций соответственно при бомбардировке неполяризованными частицами имеют вид ($c = \alpha sl$, $c' = \alpha' s'l'$):

$$\sigma_{\alpha}^{\text{полн.}} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} 2g_J (1 - \text{Re}(U_{cc}^J)), \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\alpha}^{\text{упр.}} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left\{ |1 - U_{cc}^J|^2 + \sum_{\substack{\alpha' = \alpha \\ s'l' \neq sl}} |U_{cc'}^J|^2 \right\}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{\text{погл.}} &= \sigma_{\alpha}^{\text{полн.}} - \sigma_{\alpha}^{\text{упр.}} = \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sigma_{\alpha\alpha'} = \\ &= \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left\{ 1 - |U_{cc}^J|^2 - \sum_{\substack{\alpha' = \alpha \\ s'l' \neq sl}} |U_{cc'}^J|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

и

$$\sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{\substack{Jsl \\ s'l'}} g_J |U_{cc'}^J|^2; \quad (3.4)$$

величина g_J представляет собой спиновый статистический фактор

$$g_J = \frac{2J+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)}. \quad (3.5)$$

Из этих сечений полное сечение содержит только U_{cc} , сечение заданной реакции — только $U_{cc'}$; два других сечения содержат, вообще говоря, U_{cc} и $U_{cc'}$.

а. Исключение всех каналов реакции

Как отметили Фешбах и др. [23], диагональный элемент U_{cc}^J однозначно определяется величиной f_c^J — значением логарифмической производной волновой функции канала c при $r_c = a_c$, если в этом канале имеются только входящие волны (независимо от того, соответствует это какой-либо экспериментальной ситуации или нет). Согласно определению величины U_{cc}^J , радиальная часть волновой функции равна

$$u_{cc}^J \sim I_c - U_{cc}^J O_c, \quad (3.6)$$

откуда

$$f_c^J = \rho_c \left(\frac{I_c' - U_{cc}^J O_c'}{I_c - U_{cc}^J O_c} \right). \quad (3.7)$$

Если воспользоваться формулами § 4 гл. III, то можно получить выражение, эквивалентное (3.7):

$$U_{cc}^J = e^{2i(\omega_c - \phi_c)} \left(\frac{f_c - L_c^*}{f_c - L_c} \right). \quad (3.8)$$

В случае, когда исключены все каналы реакции, из определения f_c^J и из определения (1.3) матрицы \mathfrak{R}_{rr}^J следует, что

$$f_r^J = (\mathfrak{R}_{rr}^J)^{-1} + B. \quad (3.9)$$

При $R^0 = 0$ из (1.6) следует, что \mathfrak{R}_{rr} представляет собой квадратичное выражение:

$$\mathfrak{R}_{rr} = \sum_{\lambda\mu} \gamma_{\lambda r} A_{\lambda\mu} \gamma_{\mu r}. \quad (3.10)$$

Соотношение (3.9) устанавливает связь между нашей приведенной \mathbf{R} -матрицей и f -функцией Фешбаха — Пизли — Вайскопфа, которой они пользовались при исследовании полных сечений. В частном случае, когда нет ни одного открытого канала реакции,

$$A_{\lambda\mu} \rightarrow (F_\lambda - E)^{-1} \delta_{\lambda\mu}, \quad \mathfrak{R} \rightarrow R,$$

а величина f становится вещественной.

б. Случай, когда исключаются все каналы реакции, кроме одного

Рассмотрим два канала реакции, обозначенных через c и c' . Соотношение (3.6) заменится при этом двумя соотношениями, отвечающими входящим волнам в каналах c и c' :

$$\begin{aligned} u_c^J &= I_c - (U_{cc}^J O_c + U_{cc'}^J O_{c'}), \\ u_{c'}^J &= I_{c'} - (U_{c'c}^J O_c + U_{c'c'}^J O_{c'}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Совершенно очевидно, что простое соотношение (3.7) между U_{cc}^J и логарифмической производной f_c^J теперь уже не имеет места. Для матрицы \mathbf{U} имеет место матричное соотношение (1.5а), где \mathbf{U} и \mathfrak{R} — матрицы второго ранга, причем \mathfrak{R} удовлетворяет матричному соотношению (1.3): $\mathbf{V} = \mathfrak{R}\mathbf{D}^0$. Из (1.5а) имеем

$$\begin{aligned} W_{cc} &= 1 + 2iP_c [\mathfrak{R}_{cc} - L_{c'}^0 (\mathfrak{R}_{cc} \mathfrak{R}_{c'c'} - \mathfrak{R}_{cc'}^2)] d^{-1}, \\ W_{cc'} &= 2iP_c^{1/2} P_{c'}^{1/2} \mathfrak{R}_{cc'} d^{-1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$d = (1 - L_c^0 \mathfrak{R}_{cc})(1 - L_{c'}^0 \mathfrak{R}_{c'c'}) - L_c^0 L_{c'}^0 \mathfrak{R}_{cc'}^2. \quad (3.13)$$

Если только два канала c и c' открыты, то матрица \mathfrak{R} совпадает с обычной \mathbf{R} -матрицей и соотношения (3.12) и (3.13) становятся эквивалентными (VIII. 3.1).

Глава XI

ПРИМЕНЕНИЕ R-МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ СРЕДНИХ СЕЧЕНИЙ

Проводившееся до сих пор рассмотрение носило строгий и формальный характер. Теперь же мы перейдем к приближениям, позволяющим рассматривать различные конкретные случаи, которые встречаются при обработке экспериментальных данных.

Как известно из эксперимента, с увеличением энергии возбуждения полной (составной) системы резонансные уровни становятся все шире и все более тесно расположенными. Область отчетливых хорошо изолированных уровней постепенно переходит в область так называемого „континуума“, где уровни перекрываются настолько, что сечение совершенно теряет резонансную структуру. Оба предельных случая — полностью изолированные и полностью перекрывающиеся уровни — могут быть описаны в рамках R-матричной теории, если сделать соответствующие предположения.

В настоящей главе рассматриваются средние сечения, в особенности случай перекрывающихся уровней. Случай изолированных уровней будет рассмотрен в следующей главе. Промежуточный случай частичного перекрывания уровней мы не будем рассматривать. В этой связи следует обратить внимание на некоторые формулы, например (2.18), которые выполняются в обоих предельных случаях. Имеются все основания предполагать, что они будут верны и в промежуточном случае.

Для описания большого числа уровней делались предположения двух типов. В обоих случаях сечение представлялось в виде произведения двух сомножителей, один из которых соответствовал входному каналу, а другой — каналу, по которому происходил распад. Очевидно, что такое представление предполагает независимость пути распада составного состояния от способа его образования, что и является основной чертой боровской концепции составного ядра.

Разница между указанными приближениями заключается в том, что первое (предложенное Ньютоном и Тейхманом) предполагает, что это свойство сечений имеет место для любой заданной энергии, в то время как во втором (предложенном Бете) считается, что оно проявляется лишь *при усреднении* по энергетическому интервалу, содержащему большое число уровней.

Первое из этих приближений предполагает сильную корреляцию между элементами R -матрицы, т. е. между величинами $\gamma_{\lambda c}$. Например, если мы интересуемся сечением, содержащим вклады от двух изолированных уровней, описываемых формулами Брейта — Вигнера, требование независимости образования и распада при всех энергиях означает, что отношения ширин, соответствующих различным каналам, должны быть одинаковыми для этих уровней. Фактически требование независимости образования и распада для *всех* энергий является слишком сильным и приводит к несколько странным результатам.

Другое приближение (развитое Бете) основывается на допущении, почти обратном предположению Ньютона. Бете предположил, что знаки амплитуд $\gamma_{\lambda c}$ распределены хаотически. В этом предположении формулы для средних сечений имеют как раз ту особенность, которую следует ожидать для случая реакций, протекающих с образованием составного ядра. Формула для сечения данной реакции $\alpha \rightarrow \alpha'$, протекающей через состояния с заданным спином и четностью, представляется в виде произведения двух сомножителей, называемых в настоящее время „факторами проницаемости“, один из которых относится к каналу α , а другой — к каналу α' , что и выражает независимость образования и распада составного ядра. После суммирования по спинам и четностям указанная независимость уже не имеет места, что, вообще говоря, не является существенным. Если только приняты весьма специальные предположения относительно плотности уровней, можно ожидать, что в наблюдаемых сечениях будет проявляться независимость образования и распада составного ядра и изотропия в угловом распределении продуктов реакции в случае многих конечных состояний.

В § 3 мы покажем, что „факторы проницаемости“ могут быть выражены через „силовую функцию“, форма которой

в R-матричной теории не определяется и является, таким образом, произвольной. Благодаря этому в формулах для сечений имеется некоторая степень свободы. Как упоминалось в гл. I, эта свобода соответствует различным „модельным“ представлениям о ядре, приводящим к разным вероятностям образования составного ядра. Как указывают Блатт и Вайскопф [36], в большинстве опубликованных работ, в которых даются различные приложения теории, этот произвол не является существенным и факторы проницаемости и силовая функция могут быть приняты такими, как это следует из модели „сильного поглощения“. Эта модель исходит из предположения об обязательном образовании составного ядра при столкновении частиц. Ею пользовались без всяких сомнений до тех пор, пока Фешбах, Портер и Вайскопф не показали ее недостаточность и не заменили ее моделью „умеренного поглощения“.

Это не означает, однако, что все результаты, полученные ранее при использовании модели сильной связи, автоматически оказываются бесполезными, что было бы весьма неприятно, поскольку на эту работу был затрачен огромный труд. Так, например, все расчеты непрерывных спектров продуктов реакций, выраженных в виде максвелловских распределений с определенными ядерными температурами, основывались на модели сильного поглощения. К счастью, выяснилось, что переход к модели умеренного поглощения не сказывается непосредственно на обработке такого рода экспериментальных данных, поскольку при этом основным является закон изменения плотности уровней (в зависимости от энергии возбуждения), а факторы проницаемости играют второстепенную роль. Однако, как теперь известно, в случае, когда имеются „прямые реакции“, эти расчеты при известных обстоятельствах могут привести к существенно неправильным результатам. В § 6 мы увидим, что прямые механизмы могут быть описаны только в том случае, если используется модель умеренного поглощения (которая предполагает небольшое отклонение распределения знаков $\gamma_{\lambda c}$ от хаотического). Поэтому можно сказать, что переход к модели умеренного поглощения может косвенно нарушить согласие между экспериментальными данными и существующими результатами расчетов спектров по модели сильного поглощения,

§ 1. Следствия предположения Ньютона¹⁾ о сильной корреляции между величинами $\gamma_{\lambda c}$

Если ранг \mathbf{R} -матрицы невысок (например, 1, 2 или 3), то, как было показано Тейхманом [67, 68], можно легко получить точное выражение для матрицы столкновений. Если \mathbf{R} -матрица имеет низкий ранг, то это по существу означает, что она может быть представлена в форме

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_i}{t_i}, \quad (1.1)$$

где сумма распространяется до $i = 1, 2$ или 3 , если ранг равен соответственно 1, 2 или 3. Эта форма подобна форме \mathbf{R} -матрицы в случае разложения по одному, двум или трем уровням (см. § 1 гл. IX). Матрицы столкновений, приведенные в § 1 гл. IX, для разложения по одному, двум и трем уровням переходят в матрицы столкновений для \mathbf{R} -матрицы в форме (1.1), если γ_{λ} заменить на \mathbf{x}_i и $(E - E_{\lambda})$ — на t_i . Форма (1.1) имеет место также и в том случае, когда величины $\gamma_{\lambda c}$ могут быть разбиты на множители по группам уровней i следующим образом:

$$\gamma_{\lambda_i c} = a_{\lambda_i} b_{ic}. \quad (1.2)$$

В каждой группе i распределение знаков $\gamma_{\lambda c}$ и их величин по каналам c одинаково для всех уровней λ_i данной группы (с точностью до общего постоянного множителя, который определяется фактором уровня a_{λ_i}). Однако между величинами $\gamma_{\lambda_i c}$, относящимися к разным группам, всякая корреляция отсутствует. Таким образом, чем ниже ранг \mathbf{R} -матрицы, тем сильнее корреляция между $\gamma_{\lambda c}$. Можно показать, что в этом случае $x_{ic} = b_{ic}$ и

$$t_i^{-1} = \sum_{\lambda_i} \frac{a_{\lambda_i}^2}{E_{\lambda_i} - E}. \quad (1.3)$$

В случае рангов \mathbf{R} -матрицы, равных 2 и 3, соответствующие сечения были получены Тейхманом. Мы ограничимся

¹⁾ См. [98].

рассмотрением случая, когда ранг R-матрицы равен 1, в котором матрица столкновений имеет ту же форму, что и в случае одного уровня:

$$W = 1 + \frac{2i(\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{b} \times \mathbf{P}^{1/2}\mathbf{b})}{t + \Delta - \frac{i}{2}\Gamma}, \quad (1.4a)$$

а сечение реакции пропорционально

$$|W_{cc'}|^2 = \frac{\Gamma_c \Gamma_{c'}}{(t + \Delta)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}, \quad (1.4б)$$

где

$$\Gamma = \sum_c \Gamma_c, \quad \Gamma_c = 2P_c b_c^2.$$

Полученная форма сечения является весьма необычной, поскольку между каждой парой резонансов, где $t(E)$ становится бесконечным, сечение обращается в нуль. (Как отмечалось в § 3 гл. VII, Вигнер показал, что во всех случаях, когда открыто более двух каналов, сечение любой реакции *вообще* ни при какой энергии не обращается в нуль.) Более того, сечения различных реакций одинаково меняются с энергией и отличаются лишь своими относительными амплитудами. Таким образом, относительные вероятности различных способов распада не зависят от энергии и от способа образования. Это неудивительно, так как Ньютон [98] пришел к форме (1.4а), потребовав, чтобы сечения обладали именно этим свойством. Тейхман показал, что эти сечения можно легко усреднить, если $a_\lambda^2 = 1$ для всех λ и если расстояние D между этими уровнями постоянно. В этом случае

$$t = -\frac{D}{\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi E}{D} \right). \quad (1.5)$$

Воспользовавшись этим выражением для t , можно легко найти среднее сечение. Действительно, из (VIII. 3.2) следует

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle = \frac{\pi^i}{k^2 \alpha} \sum_{Jsl s' l'} g_J \left(\frac{4\Gamma_c \Gamma_{c'}}{\Gamma^2} \right) \frac{\left(\frac{\pi\Gamma}{2D} \right) \left(1 + \frac{\pi\Gamma}{2D} \right)}{\left(\frac{\pi\Delta}{D} \right)^2 + \left(1 + \frac{\pi\Gamma}{2D} \right)^2}, \quad (1.6)$$

где $c \equiv asl$, $c' \equiv \alpha's'l'$. Если выбрать величины B_c равными S_c , вычисленными при интересующей нас энергии, то сдвиг уровня при этой энергии обратится в нуль, а в окрестности этой энергии будет пренебрежимо мал. В этом случае в области перекрывающихся уровней, где $(\pi\Gamma/2D) \gg 1$, формула (1.6) упрощается и принимает вид

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{Jsls'l'} g_J \left(\frac{4\Gamma_c \Gamma_{c'}}{\Gamma^2} \right). \quad (1.7)$$

Полное сечение поглощения может быть получено путем суммирования по $\alpha' (\neq \alpha)$:

$$\langle \sigma_\alpha^{\text{погл.}} \rangle \equiv \sum_{\alpha' (\neq \alpha)} \langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{Jsl} g_J \left(\frac{4\Gamma_c}{\Gamma} \right).$$

Здесь мы опустили член, содержащий $(\Gamma_c/\Gamma)^2$, поскольку он мал. Пусть теперь энергия бомбардирующих частиц увеличивается до такого значения, когда вклад в сечение дает большое количество парциальных волн. Поскольку основной вклад в сечение дают волны с $l \sim ka \gg 1$, то в предположении, что (Γ_c/Γ) не зависит от s , l и J , получаем

$$\langle \sigma_\alpha^{\text{погл.}} \rangle \approx \pi a^2 \left(\frac{4\Gamma_c}{\Gamma} \right). \quad (1.8)$$

Если поглощение может происходить по многим каналам, т. е. $\Gamma \gg \Gamma_c$, то сечение поглощения становится много меньше, чем геометрическое сечение πa^2 , наблюдаемое на опыте. Связать это обстоятельство со специальным предположением, сделанным в связи с соотношением (1.5), не представляется возможным. Поэтому форма (1.4) не дает правильного описания составного ядра, хотя она и удовлетворяет требованию независимости способов его распада от способа образования. Эта тенденция уменьшения сечения поглощения связана, очевидно, с деструктивной интерференцией различных уровней, которая уменьшает сечение и которая обусловлена сильной корреляцией знаков $\gamma_{\lambda c}$. Наличие подобной интерференции сказалось и на результатах, полученных Калкарром, Опенгеймером и Сербером [99], а также Бором, Пайерлсом и Плачеком [100]. В следующем параграфе будет получена другая форма матрицы столкновений, более соответствующая механизму составного ядра. Она не приводит к появлению интерференции,

уменьшающей сечение поглощения, и удовлетворяет в *среднем* условию независимости способов распада составного ядра от способов его образования.

§ 2. Следствия предположения Бете о случайном распределении знаков $\gamma_{\lambda c}$

а. Первоначальное рассмотрение Бете в рамках \mathbf{R} -матричной теории

Бете [1], а позже Бете и Плачек [5] получили выражение для средних сечений реакций, которые справедливы даже в случае перекрывающихся уровней, однако при условии, что каждая средняя парциальная ширина $\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle$ меньше среднего расстояния D между уровнями. Вывод этого соотношения основывался на предположении о том, что знаки матричных элементов, отвечающих образованию и распаду различных промежуточных состояний составного ядра, являются некоррелированными. Полученные в этом предположении результаты расчетов показали, что возбужденное ядро распадается в среднем с вероятностями, не зависящими от способа образования этого ядра, и что усредненное полное сечение поглощения по порядку величины близко к площади поверхности ядра в согласии с экспериментом. Хотя в то время, когда была выполнена работа Бете, еще не было введено понятие матрицы столкновений, из его уравнений может быть получена форма этой матрицы. Целью настоящего параграфа является вывод результатов Бете с помощью \mathbf{R} -матричной теории; будет показано, что в этой теории знаки $\gamma_{\lambda c}$ для состояний составного ядра следует рассматривать как некоррелированные.

В случае некоррелированных знаков и перекрывающихся уровней система уравнений (IX. 2.18) и (IX. 2.19), служащих для определения параметров матрицы столкновений, может быть решена приближенно с помощью обычной теории возмущений (см., например, монографию Морса и Фешбаха [101]). Однако для простоты мы воспользуемся менее строгой процедурой.

В предположении о случайном распределении знаков $\gamma_{\lambda c}$ недиагональные элементы матрицы ξ , определяемые соотношением (IX. 1.8), должны быть меньше по абсолютной

величине, чем диагональные элементы. В этом случае матричное выражение (IX. 1.11) для \mathbf{A} может быть разложено в ряд по степеням диагональной части $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} - \mathbf{E} - \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}'$, элементами которой являются $\varepsilon_\lambda = E_\lambda + \Delta_\lambda - E - (i/2)\Gamma_\lambda$, где $\boldsymbol{\xi}'$ является недиагональной частью $\boldsymbol{\xi}$. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} + \dots, \quad (2.1)$$

и поэтому из (IX. 1.7) при $\mathbf{R}^0 = 0$ следует, что

$$(1 + \mathbf{RL}^0)^{-1}\mathbf{R} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{\varepsilon_{\lambda}} + \sum_{\lambda, \mu} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\mu}}{\varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\mu}} \xi'_{\lambda\mu} + \dots; \quad (2.2a)$$

элементы последней матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} [(1 + \mathbf{RL}^0)^{-1}\mathbf{R}]_{cc'} = & \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{\varepsilon_{\lambda}} + \\ & + i \sum_{c''} P_{c''} \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c''}}{\varepsilon_{\lambda}} \sum_{\mu (\neq \lambda)} \frac{\gamma_{\mu c''} \gamma_{\mu c'}}{\varepsilon_{\mu}} + \dots \quad (2.2b) \end{aligned}$$

Для простоты мы положили $B_c = S_c$, так что, чтобы прийти к (2.2б) и (2.2а), матрицей сдвигов уровней можно будет (времененно) пренебречь и для результирующих элементов матрицы $\boldsymbol{\xi}'$ можно будет использовать выражения (IX. 1.16) и (IX. 1.18). Определим теперь условия, при которых приведенное ниже приближение (2.3) для матрицы столкновений является достаточно точным. Это приближение получается, если в выражениях (2.2а) или (2.2б) пренебречь всеми членами, кроме первых. Разобьем сумму по c'' в разложении (2.2б) на две части: 1) вклад от каналов c и c' и 2) вклад от всех остальных каналов. Если в сумму по μ в выражении (2.2б) добавить члены с $\mu = \lambda$ (что допустимо, если полные ширины уровней много больше среднего расстояния между ними), то вклад от канала c' будет отличаться от первой суммы (2.2б) множителем

$$iP_{c'} \sum_{\mu} \frac{\gamma_{\mu c'}}{\varepsilon_{\mu}}.$$

Заменяв здесь суммирование по μ интегрированием, можно сразу же получить

$$\pi \frac{\langle \gamma_{\mu c'}^2 \rangle}{D}.$$

Подобным же образом может быть определен и вклад от канала c . Таким образом, суммарный вклад каналов c и c' отличается от первой суммы в (2.2а) или (2.2б) множителем $(\pi/D) \langle \Gamma_{\lambda c} + \Gamma_{\lambda c'} \rangle$. При рассмотрении вклада „2“ (от остальных каналов) видно, что в этом случае ни одно $\gamma_{\lambda c}$ не умножается само на себя. Поскольку предполагается, что знаки $\gamma_{\lambda c}$ распределены хаотически, то наиболее вероятное значение этого вклада есть нуль. Среднеквадратичная величина этого вклада может быть установлена следующим образом. Среднеквадратичная величина вклада в элементы матрицы ξ' от оставшихся каналов может быть оценена как $1/2 \langle \Gamma_{\lambda} \rangle$ (средняя величина диагональных элементов ξ), деленная на корень квадратный из числа открытых каналов $c'' \neq c, c'$. Это число приближенно равно $\langle \Gamma_{\lambda} \rangle / \langle \Gamma_{\lambda c''} \rangle$, где усреднение производится как по λ , так и по c'' . Величину вклада от суммы по μ членов $1/\epsilon_{\mu}$, имеющих хаотически распределенные знаки, можно оценить как $(2\pi/D \langle \Gamma_{\lambda} \rangle)^{1/2}$. Таким образом, среднеквадратичная величина вклада членов, отвечающих каналам $c'' \neq c, c'$, во вторую сумму (2.2б) отличается от первой суммы, согласно произведенной оценке, множителем, являющимся средним по каналам от $(\pi \langle \Gamma_{\lambda c''} \rangle / D)^{1/2}$. Необходимое условие применимости приближения

$$W = 1 + 2iP^{1/2} \left\{ \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{E_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}} \right\} P^{1/2} \quad (2.3)$$

поэтому состоит в том, что все отношения $\pi \langle \Gamma_{\lambda c''} \rangle / 2D$ должны быть много меньше единицы, т. е. вклад (1) должен быть малым.

Третий и более высокие члены разложения (2.2б) пропорциональны соответственно квадрату и более высоким степеням этих отношений. Если в знаменатели (2.3) включены сдвиги уровней Δ_{λ} , то отношения $\pi \langle \Delta_{\lambda c''} \rangle / D$ также должны быть малы по сравнению с единицей. Соотношение (2.3) для матрицы столкновений является приближением, соответствующим вкладу многих уровней, которое применимо, вообще говоря, когда полные ширины уровней много меньше расстояния

между ними. Этот результат соответствует случаю равенства в соотношении (IX.2.14).

При $c \equiv \alpha s l$, $c' \equiv \alpha' s' l'$ сечение реакции, которое следует из выражения (2.3), равно

$$\sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{4\pi}{k_\alpha^2} \sum_{JsIs'l'} g_J \sum_{\lambda\mu} \frac{P_c \gamma_{\lambda c} \gamma_{\mu c} \gamma_{\lambda c'} \gamma_{\mu c'} P_{c'}}{\left(E_\lambda - E - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda\right) \left(E_\mu - E + \frac{i}{2} \Gamma_\mu\right)}. \quad (2.4)$$

Следуя Бете, усредним теперь это выражение по энергетическому интервалу δ , который велик по сравнению с полными ширинами; в результате получим

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle = \frac{4\pi}{k_\alpha^2} \sum_{JsIs'l'} g_J \frac{\pi}{\delta} \sum_{\lambda\mu \text{ (внутри } \delta)} \frac{P_c P_{c'} \gamma_{\lambda c} \gamma_{\mu c} \gamma_{\lambda c'} \gamma_{\mu c'} (\Gamma_\lambda + \Gamma_\mu)}{(E_\lambda - E_\mu)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_\lambda + \Gamma_\mu)^2}, \quad (2.5)$$

где суммирование ограничивается уровнями, лежащими в интервале δ . На каждый уровень в сумме по λ приходится примерно $\langle \Gamma_\lambda \rangle / D$ уровней в сумме по μ и, таким образом, всего около $\delta \langle \Gamma_\lambda \rangle / D^2$ пар. Поскольку знаки $\gamma_{\lambda c}$ распределены хаотически, вклад от членов с $\lambda \neq \mu$ будет пропорционален корню квадратному из числа таких пар, в то время как число вкладов от положительных членов с $\lambda = \mu$ равно δ / D . Таким образом, членами с перекрестными произведениями можно пренебречь, так что

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{JsIs'l'} g_J \left(\frac{T_c^J T_{c'}^J}{\sum_{c''} T_{c''}^J} \right), \quad (2.6)$$

где

$$T_c^J = \frac{2\pi \langle \Gamma_{\lambda c}^J \rangle}{D^J} \quad (2.7)$$

являются величинами, подобными факторам проницаемости Вайскопфа [36]. Из (2.6) видно, что для каждой пары с данным спином J и четностью (если не производить суммирование по J) способ распада составного ядра в среднем не зависит от способа его образования. Полное сечение поглощения может быть получено суммированием по каналам распада α' :

$$\langle \sigma_\alpha^{\text{пол.}} \rangle = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{JsI} g_J T_c^J. \quad (2.8)$$

Когда энергия бомбардирующих частиц больше, чем высота барьера, то фактор проницаемости $P_l \sim ka$. Как следует из теории сильной связи (см. § 4), в этом случае $(\langle \gamma_{\lambda c}^2 \rangle / D) \sim (\pi Ka)^{-1}$, где $K \sim 1 \cdot 10^{-13}$ см представляет собой волновое число, характеризующее движение нуклона внутри ядра. При этих условиях фактор проницаемости $T_c = (4k/K)$, что при средних и высоких энергиях близко к единице. Применив теперь операцию суммирования, использованную при выводе (1.8), получим, что полное сечение поглощения равно по порядку величины площади поверхности ядра. Однако, когда T_c близко к единице, отношение $\pi \langle \Gamma_{\lambda c} \rangle / 2D$ имеет тот же порядок величины и разложение (2.3) становится несправедливым.

Фактор проницаемости, рассчитанный из (2.6), может превышать единицу при высоких энергиях (т. е. если $4k$ больше, чем K), что противоречит требованию унитарности матрицы столкновений. В п. „б“ настоящего параграфа дается другой вывод матрицы столкновений, в котором указанные трудности обходятся с помощью разложения, подобного (2.2б), в котором, однако, отсутствуют нежелательные вклады каналов c и c' в матрицу ξ' . Это удастся сделать с помощью процедуры исключения каналов, описанной в гл. X. Получившийся при этом результат подобен (2.6); однако он применим при менее жестких условиях, возникших при вычислении вклада „2“ (см. выше), согласно которым величина $\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle$, усредненная по каналам c , должна быть меньше D . Получающиеся при этом факторы проницаемости не могут превышать единицу и имеют форму, предложенную Вайскопфом (см. [36]).

б. Усовершенствованная теория, использующая приведенную R-матрицу

Если знаки $\gamma_{\lambda c}$ некоррелированы, то доводы, использованные для доказательства применимости приближения (2.3), могут быть также приведены [25] в пользу применимости к (X. 1.9а) приближения

$$\mathfrak{R}_{rr} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}}{E_{\lambda} + \Delta'_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma'_{\lambda}}. \quad (2.9)$$

В этом выражении ширины Γ'_{λ} и сдвиги уровней Δ'_{λ} являются диагональными элементами матрицы полных шириин

и матрицы сдвигов уровней для исключенных каналов. Однако (2.9) справедливо при менее строгих условиях, чем (2.3), а именно при условии, что парциальные ширины и сдвиги уровней для исключенных каналов, усредненные по λ и s , меньше расстояния между уровнями. Такое условие возникло благодаря тому, что при разложении элементов \mathfrak{H}_{rr} в ряд, подобный (2.26), вклады от каналов s, s' во вторую сумму оказываются исключенными.

Когда Γ_λ много больше, чем расстояния D между уровнями, индивидуальные ширины и сдвиги в выражении (2.9) могут быть заменены ширинами и сдвигами, усредненными по энергетическому интервалу порядка $\langle \Gamma_\lambda \rangle$:

$$\Gamma'_\lambda \approx \langle \Gamma_\lambda \rangle \equiv \Gamma(E), \quad \Delta'_\lambda \approx \langle \Delta_\lambda \rangle \equiv \Delta(E). \quad (2.10)$$

Можно ожидать, что как Γ , так и D слабо зависят от энергии благодаря наличию зависящих от энергии множителей P и S в отдельных членах и благодаря возможным медленным систематическим изменениям приведенных ширин исключенных каналов. Это приближение представляется разумным, поскольку трудно ожидать, чтобы ширины и сдвиги уровней сильно менялись от уровня к уровню, а также и потому, что получающиеся в таком приближении результаты обычно нечувствительны к истинным значениям Γ и Δ . Мы будем использовать (2.10) также и в тех случаях, когда Γ_λ меньше или сравнимо с D , допуская, таким образом, изменения Γ и Δ от уровня к уровню.

Приближения (2.9) и (2.10) вместе приводят к интересному результату, заключающемуся в том, что различные элементы приведенной \mathbf{R} -матрицы при энергии E могут быть приближенно получены путем простого вычисления элементов обычной \mathbf{R} -матрицы при энергии $\mathcal{E} = E - \Delta + (i/2)\Gamma$:

$$\mathfrak{H}_{rr}(E) = \mathbf{R}_{rr}(\mathcal{E}). \quad (2.11)$$

Этот результат полезен, в частности, еще и потому, что элементы обычной \mathbf{R} -матрицы являются аналитическими функциями комплексной энергии \mathcal{E} . Как указывалось в § 6 гл. IV, диагональные элементы \mathbf{R} -матрицы являются мероморфными функциями, мнимые части которых неотрицательны в верхней и неположительны в нижней полуплоскости; их полюса расположены лишь на вещественной оси и имеют отрицательные

вычеты $-\gamma_{\lambda}^2$. В этой связи часто говорят о *полюсной силовой функции* s_c для канала c , определенной как сумма величин $\gamma_{\lambda c}^2$, приходящихся на единичный интервал значений E_{λ} , усредненная по интервалу соответствующей длины.

Для определения одного из диагональных элементов матрицы столкновений исключается явная зависимость от всех каналов, кроме одного, который относится к данному элементу; для определения недиагонального элемента исключаются все каналы, кроме тех двух, которые относятся к рассматриваемому недиагональному элементу.

Диагональные элементы. Если имеется только один канал r , то матрица столкновений, определенная согласно (X.1.5а), становится функцией столкновений (X.3.8), которую, используя (X.3.9), можно представить в форме

$$U = e^{2i(\omega - \phi)} \left(\frac{1 - \Re(E)L_0^*}{1 - \Re(E)L_0} \right). \quad (2.12)$$

Введя статистическую R -функцию Вигнера R' (см. § 4 гл. IV)

$$R'(\mathcal{E}) = \sum_{\lambda'} \frac{\gamma_{\lambda'}^2}{E_{\lambda'} - \mathcal{E}}, \quad (2.13)$$

можно перейти к другому полезному представлению приближения (2.12), которое оказывается довольно точным как для малых ширин уровней, так и для больших по сравнению со средним расстоянием между уровнями D . Функция R' имеет следующие свойства. В энергетическом интервале I , содержащем интересующую нас энергию E , причем протяженность этого интервала такова, что $D \ll I \ll s(ds/dE)^{-1}$, где $s(E)$ — силовая функция для R в окрестности E , статистическая R' -функция имеет те же самые полюса $E_{\lambda'}$ и вычеты $-\gamma_{\lambda'}^2$, что и обычная R -функция; вне этого интервала полюса и вычеты имеют то же самое статистическое распределение, что и внутри; следовательно, они могут, вообще говоря, отличаться от полюсов и вычетов функции R , которые могут испытывать медленные изменения. Таким образом, силовая функция s' для R' повсюду равна силовой функции $s(E)$ для R при энергии E . Следовательно, если вычислить силовую функцию для R при комплексной энергии, мнимая часть которой велика по сравнению с D , то полученный результат будет близок к $i\pi s(E)$, что становится очевидным, если при вычислении (2.13) суммирование по уров-

ням заменить интегрированием. В этой связи представляется удобным ввести „комплексную сглаженную R -функцию“, обозначаемую \bar{R} и определенную соотношением

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}) - R'(\mathcal{E}) + i\pi s(E). \quad (2.14)$$

Поскольку члены λ функций R и R' , отвечающие уровням в интервале I , оказываются одинаковыми, вклад в \bar{R} будет обусловлен только теми членами, которые отвечают уровням, лежащим вне I . Суммы по этим внешним членам могут быть заменены интегралами

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = \int_{(\infty-I)} \frac{s(E')}{E' - \mathcal{E}} dE' - \int_{(\infty-I)} \frac{s'(E') dE'}{E' - \mathcal{E}} + i\pi s(E).$$

Здесь символ $(\infty - I)$ означает интегрирование по всем энергиям, за исключением интервала I ; $s'(E')$ — силовая функция для R' , которая, по определению R' , является постоянной, всюду равной $s(E)$. Используя последний факт, прибавим к правой части последнего равенства

$$\int_{(I)} \frac{s(E') dE'}{E' - \mathcal{E}} - \int_{(I)} \frac{s'(E') dE'}{E' - \mathcal{E}} \equiv 0;$$

тогда получим

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = \int_{(\infty)} \frac{s(E') dE'}{E' - \mathcal{E}} - \int_{(\infty)} \frac{s'(E') dE'}{E' - \mathcal{E}} + i\pi s(E).$$

Поскольку $s'(E')$ — константа, то второй член равен $i\pi s(E)$ и взаимно уничтожается с третьим, так что

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = \int_{(\infty)} \frac{s(E') dE'}{E' - \mathcal{E}}. \quad (2.15a)$$

Другими словами, комплексная сглаженная R -функция (\bar{R}) является трансформантой Стильтьеса для s -функции. В предельном случае, когда $\Delta, \Gamma \ll s(ds/dE)^{-1}$, т. е. когда $|\mathcal{E} - E| \ll s(ds/dE)^{-1}$,

$$\operatorname{Re} [\bar{R}(\mathcal{E})] \rightarrow \mathcal{P} \int \frac{s(E') dE'}{E' - E} = \bar{R}(E), \quad (2.15б)$$

$$\operatorname{Im} [\bar{R}(\mathcal{E})] \rightarrow \pi s(E), \quad (2.15в)$$

где „ P “ — символ главного значения интеграла. Функция $\bar{R}(E)$, определенная соотношением (2.15б), называется „вещественной сглаженной R -функцией“. Здесь $\bar{R}(E)$ не равно предельному значению $\bar{R}(\mathcal{E})$ при $\mathcal{E} \rightarrow E$, а представляет собой лишь вещественную часть этого предела. Применим теперь полученные результаты к специальным случаям $\Gamma \gg D$ и $\Gamma \ll D$.

1) $\Gamma \gg D$. В этом случае мы можем использовать упоминавшееся выше свойство, заключающееся в том, что при $\Gamma \gg D$

$$R'(\mathcal{E}) \approx i\pi s(E).$$

Тогда из (2.11) и (2.14) получим

$$\mathfrak{R}(E) = R(\mathcal{E}) = \bar{R}(\mathcal{E}).$$

Функция столкновений, как следует из (2.12), теперь равна

$$\bar{U}(E) = e^{2i(\omega - \varphi)} \left(\frac{1 - \bar{R}(\mathcal{E}) L^{0*}}{1 - \bar{R}(\mathcal{E}) L^0} \right). \quad (2.16a)$$

Черта над U означает, что $\mathfrak{R}(E)$ заменена на $\bar{R}(\mathcal{E})$. Эта функция не обнаруживает никаких резонансов и совершенно постоянна в интервале I .

2) $\Gamma \ll D$. В этом случае из (2.15в) следует, что $\text{Im}[\bar{R}(\mathcal{E})] = \pi s(E)$, так что вместо (2.14) имеем

$$R(\mathcal{E}) = \bar{R}(E) + R'(\mathcal{E}),$$

где член $\bar{R}(E)$ представляет собой вклад только от тех уровней, которые заключены в интервале I . Если мы определим функцию \mathfrak{R}' так, чтобы ее связь с \mathfrak{R} была той же, что и связь R' с R , т. е.

$$\mathfrak{R}'(E) = \sum_{\lambda'} \frac{\gamma_{\lambda'}^2}{E_{\lambda'} + \Delta_{\lambda'} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda'}},$$

то $\mathfrak{R}(E) - \mathfrak{R}'(E) = R(\mathcal{E}) - R'(\mathcal{E}) = \bar{R}(E)$. В этом случае функция столкновений (2.12) может быть записана в удобной форме:

$$U = e^{2i(\omega - \phi')} \left(\frac{1 - \mathfrak{R}'(E) L'^*}{1 - \mathfrak{R}'(E) L'} \right), \quad (2.16б)$$

где

$$L' = L^0(1 - \bar{R}(E)L^0)^{-1},$$

а

$$\phi' = \phi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{R}(E)P}{1 - \bar{R}(E)S} \right)$$

представляет собой истинный фазовый сдвиг потенциального рассеяния, взятый с обратным знаком. Например, в случае столкновений медленных нейтронов с ядрами потенциальный член в упругом рассеянии должен быть изменен; именно, входящий в этот член радиус ядра следует умножить на множитель $[1 - \bar{R}(E)]$.

Для удобства мы перечислим различные R -функции и их свойства:

$$R\text{-функция} \equiv R(\mathcal{E}) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - \mathcal{E}}.$$

Приведенная R -функция $\equiv \Re(E)$; как следует из (2.9):

$$\Re(E) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} + \Delta'_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma'_{\lambda}}$$

и, согласно (2.11), при $\Gamma \gg D$:

$$\Re(E) \approx R(\mathcal{E}) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - \mathcal{E}}.$$

Статистическая R -функция $\equiv R'(\mathcal{E})$ определяется как функция, имеющая внутри интервала I те же самые E_{λ} и γ_{λ}^2 , что и R , а вне этого интервала — те же самые статистические распределения E_{λ} и γ_{λ}^2 . Функция R' обладает тем свойством, что при $\Gamma \gg D$

$$R'(\mathcal{E}) = i\pi s(E).$$

Приведенная статистическая R -функция $\equiv \Re'(E)$ имеет ту же форму, что и определенная выше функция $\Re(E)$, с той, однако, разницей, что члены λ , отвечающие уровням, находящимся вне интервала I , заменены членами λ' , такими, что $\gamma_{\lambda'}^2$ и $E_{\lambda'}$ имеют то же самое статистическое распределение, что и γ_{λ}^2 и E_{λ} , соответствующие членам λ в интервале I ,

Комплексная *сглаженная* R -функция $\equiv \bar{R}(\mathcal{E})$ определяется соотношением (2.14):

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}) - R'(\mathcal{E}) + i\pi s(E)$$

или соотношением (2.15а):

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = \int_{(\infty)} \frac{s(E') dE'}{E' - \mathcal{E}}.$$

Вещественная *сглаженная* R -функция $\equiv \bar{R}(E)$ определяется выражением

$$\int_{(\infty)} \frac{s(E') dE'}{E' - E}.$$

До сих пор мы не делали никаких предположений об относительных величинах Γ и $s(ds/dE)^{-1}$. Если мы предположим, что $\Gamma \ll s(ds/dE)^{-1}$ (это неравенство выполняется в большинстве случаев, так как последняя величина $\gtrsim 1$ Мэв; см. § 4), то мы можем использовать (2.15б) и (2.15в), чтобы получить из (2.11) и (2.14)

$$\Re(E) = R'(\mathcal{E}) + \bar{R}(E).$$

В случае 1 (см. ниже), когда $\Gamma \gg D$, это соотношение принимает вид

$$\Re(E') = i\pi s(E) + \bar{R}(E).$$

Недиагональные элементы. Для вычисления недиагонального элемента cc' матрицы \mathbf{U} следует исключить явную зависимость от всех каналов, кроме каналов c и c' . Это можно сделать, если в выражение (X. 1.5) для матрицы столкновений ввести приведенную \mathbf{R} -матрицу с элемента $\Re_{cc}, \Re_{cc'}, \Re_{c'c'}$. Произведя обращение матрицы $(1 - \Re_{rr}L_r^0)$, соответствующей двум каналам, подобно тому, как это делалось в (X. 3.12), найдем, что недиагональный элемент матрицы W_{rr} равен

$$W_{cc'} = 2iP_c^{1/2} \Re_{cc'} P_c'^{1/2} d^{-1}, \tag{2.17}$$

где

$$d = (1 - L_c^0 \Re_{cc})(1 - L_c'^0 \Re_{cc'}) - L_c^0 \Re_{cc'}^2 L_c'^0.$$

Для различных элементов матрицы \Re может быть использовано приближение (2.9); Γ_λ и Δ_λ включают теперь вклады от всех каналов, кроме c и c' .

1) Когда $\Gamma \gg D$, мы можем использовать приближение (2.11). С помощью теоремы Радемахера может быть показано, что величина $|\Re_{cc'}|^2$, усредненная по всем возможным выборам хаотически распределенных знаков $\gamma_{\lambda c}$, равна $s_c s_{c'}$ ($2\pi D/\Gamma$), что пренебрежимо мало по сравнению с произведением

$$\Re_{cc} \Re_{c'c'} = \bar{R}_c(\mathcal{E}) \bar{R}_{c'}(\mathcal{E}).$$

Поэтому (2.17) может быть заменено соотношением

$$W_{cc'} = 2lP_c^{1/2} \sum_{\lambda} \frac{\bar{\alpha}_{\lambda c} \bar{\alpha}_{\lambda c'}}{E_{\lambda} + \Delta'_{\lambda} - E - \frac{l}{2} \Gamma'_{\lambda}} P_c^{1/2}, \quad (2.18a)$$

где

$$\bar{\alpha}_{\lambda c} = [1 - L_c^0 \bar{R}_c(\mathcal{E})]^{-1} \gamma_{\lambda c}. \quad (2.19)$$

Это определение величины $\bar{\alpha}_{\lambda c}$ совершенно подобно определению $\alpha_{\lambda c}$ (IX. 1.15), с той лишь разницей, что в данном случае R^0 заменено на $\bar{R}(\mathcal{E})$.

2) Если $\Gamma \ll D$, то для данного уровня λ мы можем положить

$$\Re_{cc}(E) = \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c}}{E_{\lambda} + \Delta'_{\lambda} - E - \frac{l}{2} \Gamma'_{\lambda}} + \bar{R}_{cc}(\mathcal{E})$$

и аналогично для $\Re_{c'c'}$

$$\Re_{c'c'}(E) = \frac{\gamma_{\lambda c'} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} + \Delta'_{\lambda} - E - \frac{l}{2} \Gamma'_{\lambda}}.$$

Таким образом, как и в случае I , мы принимаем, что вклад в $\Re_{c'c'}$ от других уровней много меньше, чем вклад $\bar{R}_{cc}(\mathcal{E})$ в \Re_{cc} . Подстановка этих выражений в (2.17) дает после некоторых преобразований

$$W_{cc'} = 2lP_c^{1/2} \sum_{\lambda} \frac{\bar{\alpha}_{\lambda c} \bar{\alpha}_{\lambda c'}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{l}{2} \Gamma_{\lambda}} P_c^{1/2}, \quad (2.18b)$$

где Δ_{λ} и Γ_{λ} включают вклады от каналов c и c' , а $\bar{\alpha}_{\lambda c}$ определяются согласно (2.19), за исключением того, что $\bar{R}_c(\mathcal{E})$ в (2.19) должно быть заменено на $\bar{R}_c(E)$. Фактически ука-

занные различия между (2.18а) и (2.18б) не являются существенными. Ясно, что при условии $\Gamma \gg D$ в формуле (2.18а) Δ'_λ и Γ'_λ могут быть заменены на Δ_λ и Γ_λ . Кроме того, вполне допустима замена $\bar{\alpha}_{\lambda c}$ в (2.18б) на величины $\bar{\alpha}_{\lambda c}$, определенные соотношением (2.19), поскольку $1 - L_c^0 \bar{R}_c(\mathcal{E}) \sim 1 - L_c^0 \bar{R}_c(E)$ при $\Gamma \ll D$. Итак, мы пришли к заключению, что соотношение (2.18б) с $\bar{\alpha}_{\lambda c}$, определенными формулой (2.19), является правильным как при $\Gamma \ll D$, так и при $\Gamma \gg D$. Можно также предполагать, что это выражение имеет удовлетворительную точность и при $\Gamma \sim D$, хотя в этом случае следует обратиться непосредственно к (2.17).

При рассмотрении члена $L_c^0 \bar{R}_c(\mathcal{E})$ в выражении для $\alpha_{\lambda c}$ становится ясным, что, когда $\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle / D$ и $\langle \Delta_{\lambda c} \rangle / D$ близки к единице, формулы (2.18), как и следовало ожидать, отличаются от (2.3).

При этой форме матрицы столкновений соотношение (IX.2.14) может не выполняться, хотя усредненная по каналам величина $\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle / D$ обязательно должна быть мала. Этот небольшой дефект может быть устранен, если учесть, что вклад парциальных ширин и сдвигов в полные ширины и сдвиги следовало бы определять как

$$\Gamma_{\lambda c} = 2P_c |\bar{\alpha}_{\lambda c}|^2, \quad \Delta_{\lambda c} = -S_c^0 |\bar{\alpha}_{\lambda c}|^2, \quad (2.20)$$

а не как $2P_c \gamma_{\lambda c}^2$ и $-S_c^0 \gamma_{\lambda c}^2$ соответственно. Тогда условие (IX.2.14) будет удовлетворено в случае равенства. Наконец, укажем, что недиагональные элементы W могут быть представлены в форме разложения (IX.2.5), в то время как диагональные элементы таким образом представить нельзя. Это различие появилось в связи с унитарностью матрицы W и особого значения не имеет.

§ 3. Средние сечения

а. Среднее полное сечение

Из соотношения (X.3.1) следует, что среднее полное сечение при бомбардировке неполяризованными частицами α равно (здесь $c \equiv \alpha s l$)

$$\langle \sigma_\alpha^{\text{полн.}} \rangle = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{Jsl} 2g_J [1 - \text{Re} \langle (U_{cc}^J) \rangle]. \quad (3.1)$$

Как указывалось в гл. X [соотношения (X. 3.2) и (X. 3.3)], это сечение состоит из двух частей — экспериментального среднего сечения упругого рассеяния и экспериментального среднего сечения поглощения:

$$\langle \sigma_{\alpha}^{\text{упр.}} \rangle = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left\{ \langle |1 - U_{cc}^J|^2 \rangle + \sum_{\substack{s'l' (\neq sl) \\ (\alpha' = \alpha)}} \langle |U_{c'c}^J|^2 \rangle \right\}, \quad (3.2)$$

$$\langle \sigma_{\alpha}^{\text{погл.}} \rangle = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left\{ 1 - \langle |U_{cc}^J|^2 \rangle - \sum_{\substack{s'l' (\neq sl) \\ (\alpha' = \alpha)}} \langle |U_{c'c}^J|^2 \rangle \right\}. \quad (3.3)$$

Из приведенных выражений видно, что среднее полное сечение определяется средними диагональными элементами матрицы столкновений, в то время как средние экспериментальные сечения упругого рассеяния и поглощения (3.2) и (3.3) зависят от величин типа $\langle |U|^2 \rangle$.

Фешбах, Портер и Вайскопф [20, 21] указали, что имеется два пути разделения среднего полного сечения (3.1) на две части. Один путь состоит в разделении на сечения (3.2) и (3.3), соответствующие экспериментальным сечениям. Другой путь, с теоретической точки зрения более целесообразный, заключается в разделении среднего полного сечения на так называемое сечение „собственно упругого рассеяния“, или рассеяния на потенциальной яме (shape elastic), и сечение „образования составного ядра“, которые определяются как

$$\sigma_{\alpha}^{\text{с. у.}} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J |1 - \langle U_{cc}^J \rangle|^2, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\alpha}^{\text{с. я.}} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J (1 - |\langle U_{cc}^J \rangle|^2). \quad (3.5)$$

Ясно, что сумма этих сечений точно равна среднему полному сечению:

$$\sigma_{\alpha}^{\text{с. у.}} + \sigma_{\alpha}^{\text{с. я.}} = \langle \sigma_{\alpha}^{\text{полн.}} \rangle = \langle \sigma_{\alpha}^{\text{упр.}} \rangle + \langle \sigma_{\alpha}^{\text{погл.}} \rangle. \quad (3.6)$$

Эти два способа разделения, вообще говоря, отличаются между собой. В этой связи о разности между средним экспериментальным сечением упругого рассеяния и сечением собственно упругого рассеяния говорят как о сечении „упру-

ного рассеяния через составное ядро“ („compound-elastic“):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{\text{упр. с. я.}} &= \langle \sigma_{\alpha}^{\text{упр.}} \rangle - \sigma_{\alpha}^{\text{с. у.}} = \sigma_{\alpha}^{\text{с. я.}} - \langle \sigma_{\alpha}^{\text{погл.}} \rangle = \\ &= \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left\{ \langle |U_{cc}^J|^2 \rangle - |\langle U_{cc}^J \rangle|^2 + \sum_{\substack{s'l' (\neq sl) \\ (\alpha' = \alpha)}} |U_{c'l}^J|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Фридманом и Вайскопфом [7] обсуждалась интерпретация (3.4) и (3.5) с точки зрения протекания реакций во времени. Они указали, что (3.4) можно рассматривать как сечение образования „упругого“ импульса, который появляется сразу же, как только падающий импульс достигнет ядра-мишени. Сечение (3.5) соответствует запаздывающему импульсу, появляющемуся при распаде составного ядра. Это сечение может содержать и упругую компоненту, определенную согласно (3.7); однако последняя вследствие запаздывания некогерентна сечению (3.4).

Поскольку все полюса функции столкновений расположены в нижней полуплоскости комплексной плоскости энергий (за исключением тех, которые отвечают связанным состояниям и расположены на вещественной оси), путь интегрирования, производящегося при усреднении U , можно, не пересекая полюсов, сместить вверх достаточно далеко для того, чтобы R' стало равно $i\pi s(E)$ и, следовательно, согласно (2.14), $\bar{\mathfrak{R}} = \bar{R}$. Если усреднение производится по энергетическому интервалу I , такому, что $D \ll I \ll s(ds/dE)^{-1}$, то можно считать, что вклады от соединяющих сторон контура взаимно уничтожаются и что \bar{R} на смещенной части пути интегрирования практически постоянно. В этом случае

$$\langle U \rangle = \bar{U}, \quad (3.8)$$

где величина \bar{U} дается соотношением (2.15a). Интервал I должен быть достаточно мал так, чтобы внешние функции S , P и ϕ можно было считать постоянными. Тогда становится очевидным, что $\langle \sigma_{\alpha}^{\text{погл.}} \rangle$, $\langle \sigma_{\alpha}^{\text{с. у.}} \rangle$ и $\langle \sigma_{\alpha}^{\text{с. я.}} \rangle$ могут быть получены простой подстановкой в (3.1), (3.4) и (3.5) \bar{U} вместо $\langle U \rangle$.

Для величины $\langle |U|^2 \rangle$, входящей в (3.2), (3.3) и (3.7), не может быть получен столь простой результат, поскольку ее полюса расположены на обеих половинах плоскости \mathfrak{E} . Однако, предположив, что все γ_{λ}^2 , функции R' равны между

собой и что все уровни $E_{\lambda'}$ расположены эквидистантно на расстоянии D друг от друга, так что

$$R' = \pi s \operatorname{tg} \left(\frac{\pi g}{D} \right), \quad (3.9)$$

нетрудно включить в контур, использованный при выводе (3.8), и все полюса $|U|^2$. В результате получаем

$$(1 - \langle |U|^2 \rangle)^{-1} = (1 - \langle |U|^2 \rangle)^{-1} + (1 - \omega^{-1})^{-1}, \quad (3.10)$$

где

$$\omega = e^{-(2\pi\Gamma/D)};$$

здесь Γ — полная ширина поглощения. Если в $U_{c'c}$ пренебречь недиагональными членами, то приходим к следующим формулам:

$$\langle \sigma_{\alpha}^{\text{погл.}} \rangle = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left(\frac{1 - \omega^J}{1 - \omega^J + \omega^J T_c^J} \right), \quad (3.11a)$$

$$\langle \sigma_{\alpha}^{\text{упр.}} \rangle = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \left(\frac{\omega^J T_c^J}{1 - \omega^J + \omega^J T_c^J} \right), \quad (3.11b)$$

где

$$T_c^J = 1 - |\bar{U}_{cc}^J|^2 \quad (3.12)$$

и представляет собой фактор проницаемости в форме, предложенной Вайскопфом. Этот же результат был получен несколько другим способом Сноуденом и Уайтхедом [102].

Согласно (3.11), относительные вероятности поглощения и упругого рассеяния через составное ядро равны соответственно $(1 - \omega)$ и ωT . Портером¹⁾ была предложена следующая интерпретация этих вероятностей. Согласно Вайскопфу [103, 104], составное ядро можно охарактеризовать периодом $(2\pi\hbar/D)$. Поскольку скорость распада, приводящего к поглощению, равна (Γ/\hbar) , вероятность поглощения в течение этого периода составляет $(1 - \omega)$, в то время как вероятность того, что поглощения не произойдет, равна ω . Предполагается, что к концу каждого периода ядро возвращается к конфигурации, при которой возможен распад по входному каналу, через который система была образована. Вероятность проникновения в этот канал соответствует фактору прони-

1) С. Е. Porter, частное сообщение.

цаемости T_c , величина которого, по определению, не может превышать единицы. Следовательно, вероятность того, что в течение одного периода произойдет упругое рассеяние через составное ядро, равна ωT . Периодическое движение в составном ядре продолжается до тех пор, пока оно не распадается тем или иным путем.

Как детальные расчеты по формуле (3.9), так и интерпретация этой формулы, требующая приписания составному ядру определенного периода, зависят от предположения об эквидистантном расположении уровней. Это предположение может быть подвергнуто сомнению, поскольку существует и противоположный взгляд, заключающийся в том, что распределение расстояний между уровнями составного ядра следует считать „хаотическим“. Согласно этой точке зрения, относительная вероятность распада по входному каналу есть Γ , а вероятности распада по другим каналам (т. е. вероятности поглощения) суть соответствующие факторы проницаемости $2\pi\Gamma/D$, как это имеет место в обычной формуле для изолированного уровня. В этом случае вероятность упругого рассеяния через составное ядро несколько превышает ωT , особенно когда $\omega \ll 1$ или, что эквивалентно, $2\pi\Gamma/D \gg 1$. Эта точка зрения соответствует распределению расстояний между уровнями, близкому к случайному. К сожалению, экспериментальные сведения об этом распределении весьма скудны. Действительное распределение может лежать между этими предельными случаями.

б. Средние сечения для конкретных реакций

Среднее сечение может быть получено из (2.18) точно таким же образом, каким (2.6) было получено из (2.3). Из формул (2.18) с учетом (2.20) находим

$$\langle \sigma_{aa'} \rangle = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{Jslsl'} g_J \left(\frac{T_c^J T_{c'}^J}{\sum_{c''} T_{c''}^J} \right), \quad (3.13)$$

где факторы проницаемости T_c^J определены как

$$T_c^J \equiv T_{asl}^J = \frac{2\pi \langle \Gamma_{\lambda c}^J \rangle}{D^J}, \quad (3.14)$$

а $\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle$ определяются, согласно (2.20), формулой

$$\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle = 2P_c |\bar{\alpha}_{\lambda c}|^2 = \frac{2P_c \langle \gamma_{\lambda c}^2 \rangle}{|1 - \bar{R}_c(\mathcal{E}) L_c^0|^2}. \quad (3.15)$$

Как следует из определения силовой функции s_c , фактор проницаемости T_c^J может быть записан в виде

$$T_c^J = \frac{4\pi s_c^J P_c}{|1 - \bar{R}_c(\mathcal{E}) L_c^0|^2}. \quad (3.16)$$

Используя (2.15б) и (2.16а), можно показать, что этот фактор совпадает с фактором, определенным выше равенством (3.12). Другими словами, $[(\pi/k_\alpha^2) g_J] T_c^J$ представляет собой вклад от канала c со спином J в сечение образования составного ядра неполяризованными парами ядер α . Как следует из формулы (3.5),

$$T_c^J = \left(\frac{\pi}{k_\alpha^2} g_J \right)^{-1} \sigma_c^{J(\text{с. я.})}, \quad (3.17)$$

где σ_c^J обозначает ту часть σ_α , определяемого формулой (3.5), которая обусловлена каналом c со спином J . Этот простой, но важный результат, свидетельствующий о том, что факторы T_c^J , входящие в сечение реакции (3.13), пропорциональны сечениям образования составного ядра, был впервые получен Вайскопфом [4] на основе принципа детального равновесия. Блаттом и Вайскопфом [36] было описано вычисление факторов проницаемости для случая, когда силовая функция s_c определяется согласно модели „сильного поглощения“ (см. § 4). Для модели „умеренного поглощения“ (комплексный потенциал) некоторые вычисления были выполнены Олеской [105].

Перейдем теперь к обсуждению угловых распределений. Сечение (3.13) не соответствует независимости способа распада от способа образования. Другими словами, оно не может быть представлено в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит от способа образования, а другой — от способа распада. Разделению на два сомножителя препятствует наличие в (3.13) суммы по J , что отражает тот факт, что ядро не может полностью „забыть“ способ образования, а именно оно должно „помнить“ полный спин J и

четность. Однако, в каждом отдельном члене суммы (3.13) проявляется независимость способов образования и распада.

Тем не менее имеется специальный случай, когда (3.13) может быть разделено на указанные два множителя. Предположим, что сечение $\sigma_{\alpha\alpha'}$ усреднено не только по состояниям составного ядра, но также и по конечным состояниям α' , соответствующим энергиям испускания в малом интервале от $E_{\alpha'}$ до $E_{\alpha'} + dE_{\alpha'}$. Предположим далее, что все вылетающие частицы, принадлежащие конечным парам α'' (скажем, α''_1), не имеют никаких возбужденных состояний и, следовательно, всегда находятся в основном состоянии со спином $I_{\alpha''_1}$; напротив, конечные ядра α''_2 могут оставаться в одном из многих спиновых состояний $I_{\alpha''_2}$. Усредненное указанным выше образом сечение можно записать, согласно (3.13), в следующем виде:

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle dE_{\alpha'} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jslsl'} g_J \left\{ \frac{T_{\alpha sl}^J \left[\sum_{l'} T_{\alpha' E' s' l' l'}^{J'}(\epsilon_{\alpha'}) \right]}{\sum_{\alpha'' s'' l'' l'''} \int_0^{\epsilon_{\alpha''}^m} T_{\alpha'' E'' s'' l'' l'''}^J(\epsilon_{\alpha''}) d\epsilon_{\alpha''}} \right\} dE_{\alpha'}, \quad (3.18)$$

где мы теперь индексами α' и α'' обозначаем конечные ядра, а не отдельные их состояния. Здесь l'' и l' являются сокращенными обозначениями спинов $I_{\alpha''}$ и $I_{\alpha'}$, а новые величины $\epsilon_{\alpha''}$, $\epsilon_{\alpha'}$ представляют собой энергии возбуждения конечных ядер α'' и α' . Например, $\epsilon_{\alpha'}$ такова, что, прибавив к ней кинетическую энергию $E_{\alpha'}$ разлетающихся частиц и энергию связи $b_{\alpha'}$ пары α' в основном состоянии, получим энергию возбуждения составного ядра

$$\epsilon_{\alpha} + E_{\alpha'} + b_{\alpha'} = E^*. \quad (3.19)$$

Очевидно, что $\epsilon_{\alpha'}$ при $E_{\alpha'} = 0$ достигает максимального значения

$$\epsilon_{\alpha'}^m = E^* - b_{\alpha'}. \quad (3.20)$$

Сделаем теперь весьма специальное предположение, что зависимость плотности уровней $\rho_{\alpha''}^{I''}$ конечного ядра α'' от спина I'' может быть взята в виде

$$\rho_{\alpha''}^{I''}(\varepsilon_{\alpha''}) = (2I'' + 1) \rho_{\alpha''}(\varepsilon_{\alpha''}), \quad (3.21)$$

где $\rho_{\alpha''}(\varepsilon_{\alpha''})$ без индекса I'' не зависит от I'' . К сожалению, для получения нижеследующих результатов приходится делать это допущение. В различных теориях плотности уровней показано, что форма (3.21) верна лишь для низких значений I'' . (В частности, многими авторами было найдено, что зависимость от I'' имеет форму $(2I'' + 1) \exp[-(I'' + 1/2)^2/2\sigma^2]$, где σ — дисперсия. Блох [106] показал, что в легких ядрах при низких значениях I'' (~ 3) и энергиях возбуждения, меньших 12 Мэв , второй сомножитель значительно меньше единицы.) Тем не менее приходится принимать зависимость (3.21), поскольку она позволяет выполнить суммирование по I'' в знаменателе (3.18). Для фиксированных I_{α_1}'' и s'' имеем

$$\sum_{I''} (2I'' + 1) = (2s'' + 1)(2I_{\alpha_1}'' + 1), \quad (3.22)$$

где сумма берется по всем I'' , удовлетворяющим векторному соотношению $I'' + I_{\alpha_1}'' = s''$. Для слагаемых, отличных от $(2I'' + 1)$, сумма в общем случае не может быть представлена в замкнутой алгебраической форме, в связи с чем приближение (3.21) и является столь существенным.

Предполагая, что $T_{\alpha'' E_{\alpha''} s'' l''}^J$ одинаково (и равно, скажем, $T_{\alpha'' E_{\alpha''} l''}^J$) для всех s'' , удовлетворяющих векторному соотношению $s'' + I'' = J$, и равно нулю для других значений s'' , будем иметь

$$\sum_{s''} (2s'' + 1) T_{\alpha'' E_{\alpha''} s'' l''}^J = T_{\alpha'' E_{\alpha''} l''}^J (2I'' + 1)(2J + 1). \quad (3.23)$$

Есть основания считать, что сделанное предположение является приблизительно верным. (Например, в случае ну-клонных каналов существуют, как известно, нуклонные спин-орбитальные силы, которые приводят к тому, что силовая функция некоторым образом зависит от s и J . Это означает, что факторы проницаемости также зависят от s и J .) Вос-

пользовавшись теперь (3.23), мы можем переписать формулу (3.18) в виде

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle dE_{\alpha'} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{Jsl} g_J \times \\ \times \frac{(2I_{\alpha_1'} + 1) T_{\alpha sl}^J \left(\sum_{l'} (2l' + 1) T_{\alpha' E_{\alpha'} l'}^J \right) \rho_{\alpha'}(\epsilon_{\alpha'})}{\sum_{\alpha'' l''} (2I_{\alpha_1''} + 1) (2l'' + 1) \int_0^{\epsilon_{\alpha''}^m} T_{\alpha'' E_{\alpha''} l''} \rho_{\alpha''}(\epsilon_{\alpha''}) d\epsilon_{\alpha''}} dE_{\alpha'}. \quad (3.24)$$

Когда мы имеем дело с определенными конечными состояниями ядер α' , суммы по l и l' не являются независимыми, поскольку эти величины связаны между собой требованиями сохранения спина J и четности. Однако в рассматриваемом случае благодаря тому, что конечные состояния могут иметь любые спины l' и любые четности, сумма по l' не ограничена при фиксированных l и J . Таким образом, если факторы проницаемости не зависят от J , когда J удовлетворяет соотношению $s + 1 = J$, а во всех остальных случаях равны нулю, мы можем произвести суммирование по значениям J и s , допустимым соотношениями $s + 1 = J$ и $I_{\alpha_1} + I_{\alpha_2} = s$:

$$\sum_s \sum_J g_J = 1. \quad (3.25)$$

В результате получим

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha'} \rangle dE_{\alpha'} = \sigma_{\alpha}^{(c. я.)} \frac{(2I_{\alpha_1'} + 1) \sigma_{\alpha_1'}^{(c. я.)} k_{\alpha_1'}^2 \rho_{\alpha'}(\epsilon_{\alpha'}) dE_{\alpha'}}{\sum_{\alpha''} (2I_{\alpha_1''} + 1) \int_0^{\epsilon_{\alpha''}^m} \sigma_{\alpha_1''}^{(c. я.)} k_{\alpha_1''}^2 \rho_{\alpha''}(\epsilon_{\alpha''}) d\epsilon_{\alpha''}}, \quad (3.26)$$

где вид $\sigma_{\alpha}^{(c. я.)}$ определяется соотношением (3.5) в предположении, что эта величина не зависит от s и J :

$$\sigma_{\alpha}^{(c. я.)} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l + 1) T_{\alpha l}. \quad (3.27)$$

Формула (3.26) для средних сечений реакций часто упоминается в литературе. Она имеет форму произведения, обеспечивающего независимость способа распада от способа обра-

зования. Однако (3.26) основано на двух предположениях, одно из которых (независимость факторов проницаемости от s и J) является лишь приблизительно правильным, тогда как другое [предположение о том, что $\rho' \sim (2I+1)$] может не выполняться. Предыдущая формула (3.18) не основывается на этих предположениях, так что предпочтительнее использовать (3.18), а не (3.26), если позволяют обстоятельства и имеющаяся информация.

Общее выражение для углового распределения продуктов ядерной реакции дается соотношением (VIII. 2. 6):

$$d^2\sigma_{\alpha\alpha'} = [k_\alpha^2(2I_1+1)(2I_2+1)]^{-1} \sum_{LSS'} B_L(\alpha' E_{\alpha'} s', \alpha s) \times \\ \times P_L(\cos \theta_{\alpha'}) dE_{\alpha'} d\Omega_{\alpha'}, \quad (3.28)$$

где B_L определяется формулой (VIII. 2. 7).

Выражение для B_L содержит сумму отдельных членов, которые пропорциональны квадратам модулей элементов матрицы столкновений, и, кроме того, суммы членов, пропорциональных вещественной части произведения одного элемента на комплексно-сопряженную величину второго элемента, т. е. суммы перекрестных членов. В приближении хаотически распределенных знаков перекрестные члены могут быть опущены и остается лишь сумма членов, пропорциональных квадратам модулей элементов матрицы столкновений. Таким образом, как показывает соотношение (2.18), в приближении статистической теории оставшиеся члены пропорциональны $|R_{c'c}^J|^2$, в то время как опущенные члены пропорциональны произведениям типа $R_{c_1c_1'}^{J_1} (R_{c_2c_2'}^{J_2})^*$, которые при усреднении по интервалу, большему, чем расстояние между уровнями, обращаются в нуль. В этом случае B_L равно

$$B_L(\alpha' E_{\alpha'} s', \alpha s) = \frac{1}{4} (-)^{s-s'} \sum_{JLJ'} Z(JLJ, sL) \times \\ \times Z(J'L'J, s'L) |U_{\alpha' E_{\alpha'} s' l', \alpha s l}^J|^2. \quad (3.29)$$

Из этого выражения уже можно усмотреть то часто упоминающееся обстоятельство, что распределения продуктов реакций, протекающих с образованием составного ядра, симметричны относительно $\theta_{\alpha'} = \pi/2$. Это является следствием того, что функция Z в (3.29) для нечетных L обращается

в нуль [так как функция Z , согласно (VIII. 2.8а), содержит коэффициент $(U00 | L0)$, который обладает указанным свойством].

Для того чтобы прийти к выводу об изотропности углового распределения, необходимо сделать те два предположения, которые делались при выводе формулы (3.26). Как уже указывалось выше, это является весьма нежелательным, поскольку предположение (3.21), в частности, справедливо далеко не всегда. С помощью (3.21) дифференциальное сечение на единицу телесного угла и на единичный интервал энергии возбуждения $E_{\alpha'}$ может быть выражено как

$$d^2\sigma_{\alpha\alpha'} = [k_{\alpha}^2(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{-1} \times \\ \times \sum_{s's'l'} \left[\sum_L B_L(\alpha'E_{\alpha'}s'l', \alpha sl) P_L(\cos\theta_{\alpha'}) \right] \times \\ \times (2I' + 1) \rho_{\alpha'}(E_{\alpha'}) dE_{\alpha'} d\Omega_{\alpha'}. \quad (3.30)$$

Вычисления сумм могут быть выполнены следующим образом. Для произведения коэффициентов Z можно использовать соотношение

$$Z(IJJ, sL) Z(I'J'J, s'L) = (-)(2l + 1)(2l' + 1)(2J + 1)^2 \times \\ \times (U00 | L0) (I'V'00 | L0) \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) (-)^{s-s'-\lambda-L} \times \\ \times W^2(I'J\lambda s, s'l) W(I'V', \lambda L). \quad (3.31)$$

Сумму в правой части (3.31) можно упростить, если предположить, что $|U_{c'c}^J|^2$ не зависит от I' и s' . Тогда мы можем воспользоваться соотношениями

$$\sum_{I'} (2I' + 1) = (2I_{\alpha_1} + 1)(2s' + 1), \quad (3.32)$$

$$\sum_{s'} (2s' + 1)(2l + 1) W^2(I'J\lambda s, s'l) = 1. \quad (3.33)$$

Наконец, используя соотношение

$$(-)^{\lambda} (U00 | 00) (I'V'00 | 00) = W(I'V', \lambda 0) \quad (3.34)$$

и умножая (3.31) на

$$1 = \frac{(-1)^{\lambda} W(I'V', \lambda 0)}{(U00 | 00)(I'V'00 | 00)},$$

мы можем выполнить суммирование по λ и получить

$$\sum_{\lambda} (2\lambda + 1) W(U'U', \lambda 0) W(U'U', \lambda L) = \delta_{L0}. \quad (3.35)$$

Отсюда следует, что $L = 0$ и что распределение продуктов реакции является изотропным. Впервые этот вывод был получен Хаузером и Фешбахом [107] и Вулфенштейном [108] для случая неупругого рассеяния нейтронов. Сечение реакции, получающееся при интегрировании по углам, согласуется с (3.26).

§ 4. Феноменологические формы полюсной силовой функции

Как следует из соотношения (3.8), а также (2.16а) и (2.15), полюсная силовая функция s является весьма важной величиной, определяющей средние полные сечения. Из (3.16) и (3.13) следует, что эта величина является также определяющей и при вычислении средних сечений реакций.

Рассмотрение средних полных сечений в большинстве опубликованных работ, как правило, основывается на некоторых феноменологических моделях, а не на использовании полюсной силовой функции. В этих теориях вводится „эффективная“ логарифмическая производная (например, \bar{f}) волновой функции на поверхности ядра, являющаяся функцией энергии. При этом \bar{f} определяется так, чтобы подстановка ее в формулу (X. 3.8) приводила к *средней* функции столкновений

$$\langle U \rangle = e^{2i(\omega - \phi)} \left(\frac{\bar{f} - L^*}{\bar{f} - L} \right). \quad (4.1)$$

Сравнивая это соотношение с (2.16а) и используя соотношение (3.8), получаем

$$\bar{f}(E) - B = [\bar{R}(\mathcal{E})]^{-1}. \quad (4.2)$$

Это соотношение является весьма важным, поскольку оно позволяет сопоставить феноменологическую модель с R -матричной теорией (теорией резонансных уровней). При этом сопоставлении мы будем исходить из того, что обе теории

должны приводить к одному и тому же среднему полному сечению. При условии, что

$$\Gamma \ll s \left(\frac{ds}{dE} \right)^{-1}$$

(которое удовлетворяется в большинстве представляющих интерес случаев), из (2.15б) и (2.15в) получаем

$$\bar{f}(E) - B = \{\bar{R}(E) + i\pi s(E)\}^{-1}, \quad (4.3)$$

откуда находим связь между силовой функцией и \bar{f} :

$$s(E) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} [\bar{f}(E) - B]^{-1}, \quad (4.4)$$

и между вещественной сглаженной R-функцией и \bar{f} :

$$\bar{R}(E) = \operatorname{Re} [\bar{f}(E) - B]^{-1}. \quad (4.5)$$

Если некоторая модель достаточно специальна, чтобы предсказать $\bar{f}(E)$ как аналитическую функцию при всех значениях энергии E , то эта функция должна удовлетворять соотношению

$$\operatorname{Re} [\bar{f}(E) - B]^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im} [\bar{f}(E') - B]^{-1}}{E' - E} dE' \quad (4.6)$$

при любом B . Соотношение (4.6) предполагает соотношение (2.15б) между $\bar{R}(E)$ и $s(E)$. Однако принятая модель обычно определяет поведение \bar{f} лишь в ограниченной области энергий. В этом случае (4.6) может быть удовлетворено, если принять соответствующее поведение \bar{f} вне этой области.

а. Модель „сильного поглощения“ Фешбаха, Пизли и Вайскопфа [23]

Эта феноменологическая теория средних сечений основана на предположении, что *все* падающие частицы, пересекающие поверхность ядра-мишени, теряют при столкновении свою энергию и, следовательно, „поглощаются“. Если допустить, что сразу же за границей ядра-мишени падающая частица

имеет волновое число K , то для любого данного орбитального момента $l < Ka$ будем иметь (отбрасывая индекс l)

$$\bar{f} \equiv \left(\frac{\rho u'}{u} \right)_{r=a} \sim -iKa. \quad (4.7)$$

Это соотношение является граничным условием для входящих волн.

Если выбрать $B = 0$, то, как следует из (4.4) и (4.5),

$$s(E) = \frac{1}{\pi Ka}, \quad \bar{R}(E) = 0. \quad (4.8)$$

Модель сильного поглощения¹⁾ применялась в области энергий $0 < E \lesssim 30$ Мэв, где E — энергия падающих частиц. Другими словами, соотношения (4.7) и (4.8) могут применяться только в этой ограниченной энергетической области; в областях же $E < 0$ и $E \gtrsim 30$ Мэв о форме $s(E)$ нельзя ничего сказать. Это означает, что соотношения (4.8) для s и $\bar{R}(E)$ могут быть вполне согласованы с соотношением (2.156).

Хотя в модели сильного поглощения ничего не говорится о поведении $s(E)$ в области $E < 0$, можно привести доводы в пользу того, что в этой области также имеет место соотношение $s = (\pi Ka)^{-1}$. Действительно, $s(E)$ в области $E \sim 0$ является гладкой и непрерывной функцией (поскольку величины $\langle \gamma_\lambda \rangle^2$ и D не зависят от того, являются ли состояния λ связанными или свободными). Кроме того, если b — энергия связи основного состояния составного ядра, то можно доказать, что $s(E)$ равна нулю вне области $E < -b$.

Если мы примем эти утверждения и допустим, что K либо постоянно, либо не очень сильно меняется с энергией, то придем к выводу, что вследствие (2.156) мы не можем непротиворечиво сохранить соотношение $\bar{R}(E) = 0$ в области $0 < E < 30$ Мэв. Например, вблизи $E = 0$ вклад в интеграл для $\bar{R}(0)$ (2.156) области $-b < E < 0$ превышает вклад области $0 < E < 30$ Мэв, в результате чего в $\bar{R}(E)$ остается результирующий положительный вклад. Учет вклада области $E > 30$ Мэв может привести лишь к увеличению $\bar{R}(E)$

¹⁾ Эту модель называют также „моделью черного ядра“. — Прим. ред.

[поскольку этот вклад может быть только положительным в связи с тем, что $s(E)$ положительно по определению].

Таким образом, соотношение (4.7) не вызывает особых возражений, если это соотношение вместе с соотношениями (4.8) применяется лишь в ограниченной области энергий. Однако эти соотношения перестают быть верными, если попытаться сделать какую-либо экстраполяцию функции $s(E)$; поэтому представляет интерес исследовать вопрос о том, какой вид имеет функция $\bar{f}(E)$, если для функции $s(E)$ использовать выражение, справедливое в как можно большем интервале энергий. Рассмотрим, например, функцию

$$s(E) = \begin{cases} (\pi K a)^{-1} & (E > -b), \\ 0 & (E < -b), \end{cases} \quad (4.9)$$

где

$$K^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E + V). \quad (4.10)$$

Здесь V представляет собой среднюю потенциальную энергию, равную по порядку величины 30 Мэв , а K — волновое число, соответствующее движению падающей частицы в этом потенциале. [Форма (4.9) функции $s(E)$, очевидно, удовлетворяет правилу Вигнера — Тейхмана [75]: $\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda c}^2 = \infty$, т. е.

$\int_{-\infty}^{+\infty} s(E) dE = \infty$.] Преобразование Стильтьеса (2.15а) для (4.9)

имеет вид

$$[\bar{f}(E)]^{-1} = \bar{R}(\mathcal{G}) = \left(\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \right) \frac{x - iy}{(V - b)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(1+x)^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} + \right. \\ \left. + i \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{1+x} \right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{1-x} \right) \right] \right\},$$

где

$$x = \left(\frac{\frac{1}{2}(V-b)}{H^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \right)^{1/2} \left[\left(H^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2 \right)^{1/2} + H \right]^{1/2}, \\ y = \left(\frac{\frac{1}{2}(V-b)}{H^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \right)^{1/2} \left[\left(H^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2 \right)^{1/2} - H \right]^{1/2}, \quad (4.11) \\ H = E - \Delta + V$$

(арктангенсы вычисляются в первом квадранте). Ширина поглощения Γ , вообще говоря, много меньше характеристической потенциальной энергии V , так что написанное выше выражение для $[\bar{f}(E)]^{-1}$ может быть хорошо аппроксимировано выражением

$$[\bar{f}(E)]^{-1} = \lim_{\mathfrak{E} \rightarrow E} \bar{R}(\mathfrak{E}) = (\pi K a)^{-1} \ln \left\{ \frac{H^{1/2} + (V-b)^{1/2}}{H^{1/2} - (V-b)^{1/2}} \right\} + \frac{i}{K a}. \quad (4.12)$$

В типичных случаях вещественная и мнимая части этой трансформанты имеют одинаковый порядок величины. В этой теории потенциальное рассеяние определяется не формулой для твердой сферы, а формулой, которая получена из фазового сдвига $-\phi'$ в выражении (2.16б). В то время как в обычной теории для функции u используется выражение $u \sim e^{-iK r}$, что положено в основу (4.7), усовершенствованная теория соответствует функции $u \sim e^{(K' - iK) r}$ с коэффициентом затухания примерно той же величины, что и K .

б. Модель „умеренного поглощения“ (модель „комплексного потенциала“) Фешбаха, Портера и Вайскопфа [20, 21]

Более удачной по сравнению с моделью сильного поглощения является модель „умеренного поглощения“¹⁾, или модель „комплексного потенциала“, с помощью которой возможно более точное феноменологическое описание средних нуклонных сечений. Эта модель основывается на допущении, что падающая частица внутри ядра мишени движется в комплексной потенциальной яме $-[V(r) + iW(r)]$, причем $V, W > 0$. Вещественный потенциал притяжения $-V$ просто отклоняет падающие нуклоны, в то время как наличие мнимого члена $-iW$ приводит к их „поглощению“.

Согласно физической интерпретации этой модели (которую мы не будем рассматривать, поскольку она еще недостаточно детально разработана), поглощение рассматривается не как уменьшение потока во входном канале, а как поглощение падающих частиц в составном ядре, которое может, вообще

¹⁾ Эту модель называют также „моделью полупрозрачного ядра“. — *Прим. ред.*

говоря, испустить частицу и во входной канал. Иначе говоря, потенциал поглощения не обязательно связан с сечением реакции; фактически эта модель применима без всякой модификации и в той энергетической области, в которой энергетически возможно лишь упругое рассеяние.

Для простоты мы предположим, что V и W соответствуют прямоугольным потенциальным ямам с одинаковым радиусом a , но различной глубины. Волновая функция внутри такой прямоугольной комплексной потенциальной ямы имеет вид

$$u = F(K_r) \sim \sin\left(K_r - \frac{l\pi}{2}\right), \quad (4.13)$$

где

$$K^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E + V + iW),$$

что является хорошим приближением для $l < Ka$. Логарифмическая производная, соответствующая (4.13), равна

$$\bar{f} = \frac{\mu F'_l(\mu)}{F_l(\mu)} \sim \mu \operatorname{ctg}\left(\mu - \frac{l\pi}{2}\right), \quad (4.14)$$

где $\mu = Ka$. Как следует из обсуждения, проведенного в § 3 гл. IV, (4.14) можно записать в следующем виде, заменив E на $E + iW$:

$$(f + l)^{-1} = \sum_p \frac{(\hbar^2/Ma^2)}{E_p - E - iW}, \quad (4.15)$$

где E_p — энергии одночастичных уровней для вещественного потенциала V , определяющиеся граничным условием $B = -l$.

Из соотношения (4.2) следует, что соответствующая функция \bar{R} есть

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = \sum_p \frac{\hbar^2/Ma^2}{E_p - E - iW} \equiv \sum \frac{\hbar^2/Ma^2}{E'_p - \mathcal{E} - iW'}, \quad (4.16)$$

где $E'_p = E_p + \Delta$, $W' = W - \Gamma/2$. Наконец, из (4.4) и (4.5) имеем

$$\pi s(E) = \sum_p \frac{W' (\hbar^2/Ma^2)}{(E'_p - E)^2 + W'^2}, \quad (4.17a)$$

$$\bar{R}(E) = \sum_p \frac{(E'_p - E) (\hbar^2/Ma^2)}{(E'_p - E)^2 + W'^2}. \quad (4.17b)$$

Конечно, Δ и Γ малы по сравнению с другими величинами, например W , и в (4.17) и (4.18) их можно положить равными нулю, т. е. $E'_p = E_p$, $W' = W$.

Если V и W постоянны, то (4.15) выражает производную на краю потенциальной ямы для всех энергий от $-\infty$ до ∞ . Отсюда автоматически следует, что соотношения (2.156) и (4.6) выполняются, поскольку функция \bar{R} , определенная равенством (4.16), является R -функцией (именно R -функцией для потенциальной ямы).

С другой стороны, если соотношения (4.14) и (4.17) применимы лишь в ограниченной области энергий, например $0 < E \lesssim 30$ Мэв, то согласование их с (2.156) также не является больше проблемой, если даже допустить изменение V и W с энергией, поскольку проведение этих функций за пределами указанного интервала энергий можно так подобрать, чтобы соотношение (2.156) удовлетворялось.

Однако при более глубоком изучении соотношений (4.16) и (4.17) становится ясным, что эти соотношения между моделью комплексного потенциала и R -матричной теорией далеко не так удовлетворительны, как казалось вначале. В самом деле, эти соотношения в действительности не имеют места, что следует, например, из того факта, что $s(E)$, определенная согласно (4.17а), не обращается в нуль при $E < -b$. Чтобы понять это парадоксальное положение, нам надлежит более тщательно исследовать связь между функцией (4.15), следующей из модели прямоугольной потенциальной ямы, и \bar{R} -функцией R -матричной теории.

Рассмотрим эту \bar{R} -функцию. Как уже указывалось в гл. II и III, одно из основных предположений R -матричной теории состоит в том, что поверхности \mathcal{S}_c , на которых определены силовые функции, должны быть достаточно большими, чтобы перекрытием двух независимых систем можно было пренебречь. Например, в случае нейтронного канала, когда нейтрон и остаточное ядро разделены расстоянием $r = a$, вероятность того, что какой-либо из нейтронов остаточного ядра также находится на расстоянии $r = a$, должна быть пренебрежимо мала; в противном случае, основное соотношение ортогональности (III. 2.2) не будет выполняться.

Предположим теперь, что реальная ядерная система может быть описана как система нейтронов и протонов, движущихся

в прямоугольной потенциальной яме. Поскольку на краю ямы могут одновременно находиться много нейтронов, радиус взаимодействия в \mathbf{R} -матричной теории должен быть несколько больше радиуса ямы. Другими словами, на поверхности, проходящей по краю потенциальной ямы, силовая функция не может быть даже определена. Ее можно определить лишь на поверхности, удаленной от края ямы по крайней мере на величину, обратную внешнему волновому числу для наиболее слабо связанных нуклонов, т. е. порядка $(1 - 2) \cdot 10^{-13}$ см. Следовательно, чтобы установить связь между моделью потенциальной ямы и \mathbf{R} -матричной теорией, мы должны построить функцию $(\bar{f} + l)^{-1}$ не на краю потенциальной ямы, как в (4.16), а на несколько большем расстоянии. Всегда можно записать разложение $(\bar{f} + l)^{-1}$ на любом данном радиальном расстоянии a :

$$(\bar{f} + l)^{-1} = \sum_p \frac{\gamma_p^2}{E_p - E - iW_p}, \quad (4.18)$$

где \bar{f} , γ_p^2 , E_p и W_p зависят от a . Различие между (4.15) и (4.18) заключается в том, что в последнем выражении γ_p^2 и W_p зависят от p . В частности, если $r = a$ выбрано так, что оно значительно превышает радиус потенциальной ямы, то значения γ_p^2 для нижних орбит p будут очень малы, благодаря чему эти орбиты дадут в сумму очень небольшой вклад. В этом случае мнимая часть (4.18) эффективно обращается в нуль для энергий, меньших $E \sim -b$. Это как раз и является характерным свойством силовой функции. Таким образом, в противоположность (4.16) функцию $(\bar{f} + l)$, определенную соотношением (4.18), можно с полным основанием отождествить с функцией $\bar{R}(\mathcal{E})$, характеризующей \mathbf{R} -матричное описание (учитывающее тонкую структуру).

Противоречие, связанное с (4.16) и (4.17), не проявилось бы так сильно, если бы была выбрана потенциальная яма с наклонными стенками. Если \bar{f} вычислено на краю такой ямы, то γ_p^2 для более низких орбит были бы, как и требуется, уже малыми (в связи с экспоненциальным затуханием волновых функций в области наклона).

Наконец, мы обсудим, как влияет на силовую функцию введения члена, описывающего спин-орбитальную связь, $U(r)\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ с потенциалом $-(V + iW)$. В случае отсутствия такого члена силовая функция $s(E)$ для любого канала $c \equiv \alpha sl$ и полного спина J дается выражением (4.17). Эта функция одинакова для всех s и J , удовлетворяющих соотношению $\mathbf{s} + \mathbf{l} = \mathbf{J}$. При наличии спин-орбитального члена удобно определить новые амплитуды приведенных ширин $\gamma_{\lambda}^J(\alpha j I_{\alpha_2})$, в которых соотношения связи $\mathbf{l}_{\alpha_1} + \mathbf{l}_{\alpha_2} = \mathbf{s}$, $\mathbf{l} + \mathbf{s} = \mathbf{J}$ заменены на $\mathbf{l}_{\alpha_1} + \mathbf{l} = \mathbf{j}$, $\mathbf{l}_{\alpha_2} + \mathbf{j} = \mathbf{J}$ (α_1 мы приписываем нуклону, так что $\mathbf{l}_{\alpha_1} = 2\boldsymbol{\sigma}$). С помощью алгебры коэффициентов Рака можно показать, что

$$\gamma_{\lambda}^J(\alpha sl) = \sum_{j=l \pm 1/2} U\left(\frac{1}{2} I_{\alpha_2} J, sj\right) \gamma_{\lambda}^J(\alpha j I_{\alpha_2}). \quad (4.19)$$

Из свойств функции U , которая определена как W -функция, умноженная на $(2s + 1)^{1/2} (2j + 1)^{1/2}$, вытекает, как и следовало ожидать, что

$$\sum_s [\gamma_{\lambda}^J(\alpha sl)]^2 = \sum_j [\gamma_{\lambda}^J(\alpha j I_{\alpha_2})]^2. \quad (4.20)$$

При наличии спин-орбитального взаимодействия силовые функции $s_{\alpha j I_{\alpha_2}}^J$ в системе $(\alpha j I_{\alpha_2})$ зависят от j , но одинаковы для всех J , удовлетворяющих равенству $\mathbf{l}_{\alpha_2} + \mathbf{j} = \mathbf{J}$. Силовые функции для двух значений j ($j = l \pm 1/2$) имеют тот же вид, что и (4.17), но различаются по энергиям. Предполагая, что $\gamma_{\lambda}^J(\alpha j I_{\alpha_2})$ имеют случайные знаки, из (4.19) следует, что

$$s_{\alpha sl}^J = \sum_{j=l \pm 1/2} U^2\left(\frac{1}{2} I_{\alpha_2} J, sj\right) s_{\alpha j I_{\alpha_2}}^J. \quad (4.21)$$

Отсюда следует, что в общем случае $s_{\alpha sl}^J$ при заданном спине канала зависит от J , и наоборот.

Соотношение (4.20) показывает, что $\sum_s s_{\alpha sl}^J$ может принимать одно из трех возможных значений в зависимости от того, удовлетворяет ли J соотношению $\mathbf{J} = \mathbf{l}_{\alpha_2} + \mathbf{j}$

- 1) только при $j = l + 1/2$,
- 2) только при $j = l - 1/2$,
- 3) при $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$.

§ 5. Теоретическая форма полюсной силовой функции для нуклонных каналов

В проблеме обоснования модели комплексного потенциала и достигнутых с ее помощью результатов существует два типа подходов. Один из них [109—112, 32] основан на предположении, что ядро воздействует на падающую частицу подобно тому, как сфера в классической оптике действует на свет. В этом предположении значения величин V и W можно оценить, исходя из наблюдаемых свойств рассеяния нуклонов на нуклонах. Для $V \gg W$, E существует важное соотношение

$$V + iW = \hbar v \rho \left\langle \frac{2\pi}{k_r} f(0) \right\rangle, \quad (5.1)$$

где усреднение производится по всем относительным волновым числам k_r падающего нуклона и нуклонов ядра-мишени; $f(0)$ — амплитуда рассеяния вперед для случая рассеяния нуклонов на нуклонах; v — скорость падающей частицы внутри ядра-мишени; ρ — плотность нуклонов в ядре-мишени.

Второй подход, развитый Блохом [26—28], является гораздо более глубоким в том отношении, что он не использует оптическую аналогию. Блох исходит из того, что благодаря успеху модели комплексного потенциала мы имеем некоторую эмпирическую форму сглаженной \bar{R} -функции, а именно форму (4.16). Затем он пытается вывести эту форму из теории структуры ядра.

Поскольку $R'(\mathcal{E}) \sim i\pi s(E)$, если мнимая часть \mathcal{E} много больше D , из (2.14) следует, что для таких значений \mathcal{E}

$$\bar{R}(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - \mathcal{E}}. \quad (5.2)$$

Разложим теперь состояния X_{λ} по полной системе состояний вида

$$\chi_{cp} = \phi_c u_p(r_A), \quad (5.3)$$

где $\phi_c \equiv \phi_{asl}$ являются волновыми функциями каналов, определенными (III. 2.25), а $u_p(r_A)$ представляют собой радиальные части одночастичных волновых функций нуклона, определенные для некоторого вещественного потенциала — V

с теми же самыми граничными условиями, что и X_λ . Разложение X_λ можно представить в виде

$$X_\lambda = \sum_{cp} C_{\lambda, cp} \chi_{cp} \quad (5.4)$$

Из определения амплитуд приведенных ширин (III. 4.7a) следует, что

$$\gamma_{\lambda c} = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right)^{1/2} \sum_p C_{\lambda, cp} u_p(a_c). \quad (5.5)$$

Подстановка этого выражения в (5.2) дает

$$\bar{R}_{cc}(\mathcal{E}) = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right) \sum_{pp'} u_p(a_c) u_{p'}(a_c) \left(\chi_{cp} \left| \frac{1}{H - \mathcal{E}} \right| \chi_{cp'} \right), \quad (5.6)$$

где мы использовали свойство полноты системы функций X_λ для преобразования суммы по λ и ввели H — полный гамильтониан. Эта важная формула связывает весьма существенную для определения средних сечений величину $\bar{R}(\mathcal{E})$ с набором ядерных матричных элементов, зависящих только от одного из состояний ядра-мишени (практически основного состояния). Всякая связь с состояниями λ составного ядра исключена.

Может показаться, что проведенные до сих пор рассуждения являются общими и правильными. Это, однако, не так, поскольку в этих рассуждениях не нашли отражения некоторые тонкие обстоятельства, связанные с антисимметризацией состояний. Мы неявно предположили, что состояния X_λ имеют ту же самую симметрию, что и χ_{cp} , которые являются антисимметричными по частицам 1, 2, ..., (A — 1), но не по A-й частице. Посмотрим теперь, что произойдет, если состояния X_λ антисимметризованы относительно координат всех нуклонов. Разложение типа (5.4), где функции χ_{cp} не симметричны по A-й частице, но антисимметричны по остальным A — 1 частицам, все еще остается возможным. [Это фактически разложение по методу генеалогических коэффициентов¹⁾.]

1) О методе генеалогических коэффициентов см., например, обзор Лейна и Эллиота [A. Lane, J. Elliott, Handbuch der Physik, Ed. by S. Flügge, Bd. XXXIX, 1957 (см. перевод: Строение атомного ядра, ИЛ, 1959)]. — Прим. ред.

В этом случае вклад в амплитуду приведенной ширины от поверхности канала A -й частицы равен выражению (5.5), деленному на $A^{1/2}$. Так как X_λ антисимметричны по всем нуклонам, поверхность каждого канала должна давать такой же вклад; так что амплитуда приведенной ширины равна выражению (5.5), умноженному на $A^{1/2}$. Поэтому может показаться, что влияние антисимметризации на (5.6) сводится к умножению правой части выражения (5.6) на величину A . Однако это неверно, поскольку при выводе (5.6) предполагалось соотношение полноты, что теперь уже не является законным. Дело в том, что когда функции X_λ полностью антисимметричны, разложение (5.4) необратимо, поскольку состояние может быть разложено по состояниям с более низкой симметрией [как в случае (5.4)], но не наоборот. Отсюда следует, что необоснованным является соотношение

$$\sum_{\lambda} C_{\lambda, c p}^* C_{\lambda, c' p'} = \delta_{c p, c' p'} \quad (5.7)$$

или соотношение полноты, использованное при выводе выражения (5.6). Чтобы обойти эту трудность, можно попытаться перейти к новой системе $\chi_{c p}$, а именно к системе, которая полностью антисимметризована. Это означает, что состояния X_λ и $\chi_{c p}$ имеют одинаковую степень симметрии. К сожалению, при этом появляются новые препятствия. Хотя мы теперь и можем разложить $\chi_{c p}$ по состояниям X_λ , соотношение (5.4), а следовательно, и (5.5) больше не являются справедливыми. Причина этого заключается в том, что полностью антисимметричные $\chi_{c p}$ [в (5.4)] не являются больше ортонормированными:

$$\int \chi_{c p}^* \chi_{c' p'} \equiv \langle \chi_{c p} | \chi_{c' p'} \rangle \neq \delta_{c p, c' p'}. \quad (5.8)$$

Можно, однако, думать, что $\chi_{c p}$ являются ортонормированными приближенно. Согласно „промежуточной модели“, которую мы обсудим ниже, наиболее существенные состояния ядра-мишени в сумме (5.4) являются связанными состояниями, а наиболее существенные одночастичные состояния u_p являются свободными состояниями. В этом случае, поскольку среди состояний ядра-мишени нет одночастичных состояний, u_p орто-

гональны состояниям ядра-мишени и χ_{cp} являются ортонормированными. Встав на эту точку зрения, видим, что, когда χ_{cp} и X_λ антисимметричны, соотношения (5.4)—(5.6) все еще остаются справедливыми (без множителя $A^{1/2}$) и требуют лишь небольшой поправки, связанной с отсутствием ортонормированности χ_{cp} .

Возвращаясь к (5.6), введем теперь так называемое „промежуточное“ предположение Лейна, Томаса и Вигнера [113]. В этом предположении утверждается, что в разложении, обратном (5.4),

$$\chi_{cp} = \sum_{\lambda} C_{\lambda, cp}^* X_{\lambda} \quad (5.9)$$

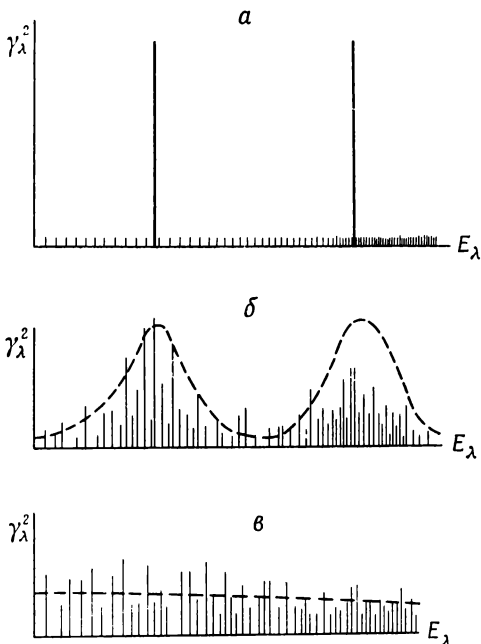
состояния λ , дающие основной вклад в сумму, сосредоточены в ограниченной энергетической полосе около энергии, например, E_{cp} состояния χ_{cp} . (Эта энергия является суммой энергии E_c канала c ядра-мишени и энергии E_p одночастичного состояния.) Другими словами (фиг. 2), эта ситуация является промежуточной между случаем, когда в сумму (5.9) дает вклад только один член (т. е. отсутствует всякая связь между падающим нуклоном и нуклонами ядра-мишени), и случаем, когда существенны вклады всех членов (т. е. имеет место сильная связь, при которой одночастичные состояния p полностью размазаны, или „растворены“). Если имеет место такая картина, то при данной энергии E в суммах в (5.5) и (5.6) доминируют ближайшие одночастичные состояния p , благодаря чему мы можем опустить перекрестные члены с $p \neq p'$ и положить

$$\Upsilon_{lc}^2 \approx \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right) \sum_p u_p^2(a_c) C_{\lambda, cp}^2, \quad (5.10)$$

$$\bar{R}_{cc}(\mathcal{E}) \approx \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right) \sum_p u_p^2(a_c) \left(\chi_{cp} \left| \frac{1}{H - \mathcal{E}} \right| \chi_{cp} \right). \quad (5.11)$$

В связи с этими выражениями следует сделать три замечания:

1) Поскольку $\sum_{\lambda} C_{\lambda, cp}^2 = 1$, из выражения (5.10) следует, что значение *полной* приведенной ширины первоначального одночастичного уровня не изменилось.



Ф и г. 2. Схематическое изображение зависимости γ_λ^2 от E .

Каждая парциальная ширина γ_λ^2 изображена вертикальной линией соответствующей длины, лежащей при энергии E_λ . График *a* соответствует случаю, когда нет почти никакой связи между падающей частицей и ядром-мишенью, так что никакие реакции невозможны и имеет место лишь собственно-упругое рассеяние. В этом случае волновая функция любого собственного состояния λ представляет собой простое произведение внутренней волновой функции сталкивающихся частиц и волновой функции относительного движения. Заметные значения γ_λ^2 имеют лишь те состояния λ , которые отвечают сталкивающимся частицам в их основных состояниях, с энергией, соответствующей одночастичным резонансам. Поэтому график зависимости γ_λ^2 от энергии состоит из отдельных линий $\gamma_\lambda^2 \sim \hbar^2/Ma^2$.

График *b* соответствует противоположному случаю очень сильной связи между падающей частицей и ядром-мишенью. В этом случае одночастичные состояния (т. е. состояния, в которых волновая функция представляется в виде простого произведения внутренней волновой функции и волновой функции относительного движения) совершенно „растворены“ среди множества состояний тонкой структуры составного ядра. Штриховая линия представляет силовую функцию $s = \langle \gamma_\lambda^2 \rangle / D$. Силовая функция в данном случае является гладкой и монотонной.

График *в* соответствует промежуточной ситуации, когда одночастичные состояния „растворены“ среди состояний тонкой структуры лишь в некоторых ограниченных областях около одночастичных состояний. Вследствие этого силовая функция s осциллирует. Следует отметить, что в случаях *б* и *в* каждое одночастичное состояние должно быть размазано между состояниями тонкой структуры таким образом, чтобы полная сила уровня \hbar^2/Ma^2 при этом сохранялась, т. е.

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 \left(= \int s dE \right) \approx \hbar^2/Ma^2.$$

2) Для прямоугольной потенциальной ямы с граничным условием $B = -l$ имеет место соотношение $u_p^2(a) = (2/a)$ (см. гл. IV, § 3).

3) Предположение о случайном распределении знаков амплитуд приведенных ширин могло бы оправдывать формулы (5.10) и (5.11). Однако это предположение не является, по-видимому, правильным (см. далее).

Блохом была предпринята попытка вычисления матричных элементов в (5.11). Для этого производится разложение оператора $1/(H - \mathcal{E})$ в ряд по степеням $H' \equiv H - H_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H - \mathcal{E}} &= \frac{1}{H_0 - \mathcal{E}} + \frac{1}{H_0 - \mathcal{E}} H' \frac{1}{H_0 - \mathcal{E}} + \\ &+ \frac{1}{H_0 - \mathcal{E}} H' \frac{1}{H_0 - \mathcal{E}} H' \frac{1}{H_0 - \mathcal{E}} + \dots \quad (5.12) \end{aligned}$$

При этом имеется в виду, что в разбиении $H = H_0 + H'$ оператор H_0 является суммой гамильтониана ядра-мишени и гамильтониана отдельной частицы в ядре $T + (-V)$, где $(-V)$ — соответствующий средний потенциал для l -й частицы. Оператор H' представляет собой разность между реальным потенциалом $\sum_j v_{ij}$, действующим на l -ю частицу, и средним потенциалом:

$$H' = \sum_j v_{ij} - (-V). \quad (5.13)$$

При вычислении (5.11) для каждого i будут встречаться прямые и обменные члены. Обменными членами будем пренебрегать, так что матричные элементы будут теперь равны матричным элементам с неантисимметризованными χ_{cp} , которые соответствуют тому, что определенная (например, A -я) частица находится в одночастичном состоянии p .

Хотя (5.12) по своей форме аналогично разложению теории возмущений, Блох не пользуется этим обстоятельством как таковым. Он предполагает, что матричные элементы $(cp | H' | c' p')$ имеют случайные знаки. Это дает ему возможность для каждого члена в разложении (5.12) выделить некоторую „главную“ часть. Эта часть соответствует учету всех воздействий, связанных с H' , которые снова приводят к состоянию cp . Если V выбрать так, чтобы $(cp | H' | cp) = 0$,

то приходим к следующей форме матричного элемента в (5.11):

$$\begin{aligned} & \left(\chi_{cp} \left| \frac{1}{H - \mathcal{E}} \right| \chi_{cp} \right) = \\ & = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{E} - E_{cp}} \left[\frac{\varphi_{cp}(\mathcal{E})}{\mathcal{E} - E_{cp}} \right]^n = [E_{cp} - \mathcal{E} + \varphi_{cp}(\mathcal{E})]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$\varphi_{cp}(\mathcal{E}) = \sum_{c'p'} \frac{|(cp | H' | c'p')|^2}{\mathcal{E} - E_{c'p'}} = \left(cp \left| H' \frac{1}{\mathcal{E} - H_0} H' \right| cp \right). \quad (5.15)$$

Заменяя сумму в (5.15) интегралом и полагая $\mathcal{E} \rightarrow E$, получаем

$$\varphi_{cp}(E) = \Delta_{cp}(E) - iW_{cp}(E), \quad (5.16)$$

где

$$\Delta_{cp}(E) = P \int \frac{|(cp | H' | c'p')|^2}{E - E_{c'p'}} \rho(E_{c'p'}) dE_{c'p'}, \quad (5.17)$$

$$W_{cp}(E) = \pi \rho_{cp}(E) \int |(cp | H' | c'p')|^2 \delta(E - E_{c'p'}) dE_{c'p'}. \quad (5.18)$$

Символ P перед интегралом для Δ означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Комбинируя (5.16), (5.14) и (5.11), приходим к окончательному выражению для $\overline{R}(\mathcal{E})$:

$$\overline{R}_{cc}(\mathcal{E}) = \sum_p \frac{\frac{a_c}{2} u_p^2(a_c) \left(\frac{\hbar^2}{M_c a_c^2} \right)}{E_{cp} + \Delta_{cp}(E) - \mathcal{E} - iW_{cp}(E)}. \quad (5.19)$$

Это выражение очень сходно с эмпирической формой (4.16), следующей из модели комплексного потенциала. Действительно, если Δ_{cp} и W_{cp} не зависят от p , то из сравнения с разложением R -функции (IV. 1.10) для потенциальной ямы ($-V$):

$$R_V(\mathcal{E}) = \sum_p \frac{\frac{a_c}{2} u_p(a_c) \left(\frac{\hbar^2}{M_c a_c^2} \right)}{E_p - \mathcal{E}} \quad (5.20)$$

видно, что $\overline{R}_{cc}(\mathcal{E})$ представляет собой ту же самую величину, вычисленную при энергии $E - \Delta_{cp} - E_c - iW_{cp}$:

$$\overline{R}_{cc}(\mathcal{E}) = R_V(\mathcal{E} - \Delta_{cp} - E_c + iW_{cp}). \quad (5.21)$$

Наоборот, предположим, что R_{cc} является R -функцией для потенциальной ямы $-V'_c$, соответствующей потенциалу $(-V)$, измененному путем добавления комплексной части $E_c + \Delta_{cp} - iW_{cp}$. Вспоминая, что $-V$ было ранее выбрано так, что $(cp|H'|cp) = 0$, получаем для вещественной части эффективного потенциала $-V'_c$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(-V'_c) = & \left(cp \left| \sum_j v_{ij} \right| cp \right) + \\ & + \int \frac{|(cp|v_{ij}|c'p')|^2}{E - E_{c'p'}} \rho(E_{c'p'}) dE_{c'p'}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В выражения (5.19) и (5.21) должны быть внесены поправки, связанные с предположениями, сделанными при их выводе. Особенно существенно пренебрежение обменными членами, выделение „главных“ частей, приведшее к (5.14), и пренебрежение перекрестными членами с $p \neq p'$ при переходе от (5.6) и (5.11). Используя результаты последующего параграфа, можно показать, что главные части слагаемых с $p \neq p'$ дают суммарный вклад в \bar{R}_{cc} , равный $(cu_E|H'|cu_E)$, где u_E — одночастичная волновая функция, соответствующая комплексному потенциалу V'_c .

Примечательной особенностью (5.17), (5.18) и (5.20) является то, что, хотя их формы очень похожи на известные выражения теории возмущений второго порядка, между выражениями теории возмущений и этими соотношениями имеется существенное различие. Именно, выражения (5.17), (5.18) и (5.20) зависят от энергии вследствие того, что в них вместо E_{cp} входит E .

Чини и Фубини [114] для получения результатов, подобных (5.17) и (5.18), использовали теорию возмущений. Ими были произведены численные оценки мнимой части потенциала (5.18), основанные на модели ферми-газа для ядра-мишени. Вычисленное значение W оказалось в качественном согласии с эмпирическим значением W . В частности, было получено сильное возрастание W с энергией E и найдено, что оно, как и ожидалось [103, 104], обусловлено действием принципа Паули в ядре-мишени.

В связи с вычислениями W [(5.18)] по модели ферми-газа следует отметить любопытный факт, заключающийся в том, что эта процедура, как можно показать, эквивалентна вычислению W по формуле оптической модели (5.1) с той лишь разницей, что в последнем случае используется *наблюдаемое* полное сечение [т. е. мнимая часть $f(0)$], в то время как в первом случае для той же самой величины используется борновское приближение.

Лейн, Томас и Вигнер [113] пытались оценить W как корень квадратный из второго момента распределения $C_{\lambda, cp}^2$ в (5.10):

$$M_2 \equiv \sum_{\lambda} (E_{cp} - E_{\lambda})^2 C_{\lambda, cp}^2 = (cp | H'^2 | cp). \quad (5.23)$$

Недостатком такого подхода является то, что далекие компоненты имеют слишком большой вес. Если распределение $C_{\lambda, cp}^2$ имеет длинный „хвост“, то это приводит к сильному завышению W . Действительно, численное значение для $M_2^{1/2}$ (~ 20 Мэв), полученное при использовании для ядра-мишени модели ферми-газа, значительно превышает наблюдаемые значения W . Было найдено, что этот результат можно несколько улучшить, если, согласно работам Фогта [115, 116] и Лейна и Верле [117], в волновую функцию χ_{cp} ввести корреляцию между падающим нуклоном и нуклонами ядра-мишени.

Блох [26—28] указал, что M_2 , определенное формулой (5.23), можно записать в виде

$$M_2 = \int |(cp | H' | c'p')|^2 \rho(E_{c'p'}) dE_{c'p'}. \quad (5.24)$$

Если принять, что распределение матричных элементов $(cp | H' | c'p')$ является совершенно гладким вплоть до некоторой энергии разделения $(E_{cp} - E_{c'p'}) = \varepsilon$, то

$$\frac{W}{M_2^{1/2}} \approx \left(\frac{\pi W}{2\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (5.25)$$

Это соотношение подтверждает сделанное нами выше замечание о том, что если распределение $C_{\lambda, cp}^2$ будет растянуто, т. е. если $\varepsilon \gg W$, то $W \ll M_2^{1/2}$ 1).

1) К аналогичному выводу пришли другим путем В. М. Агранович и А. С. Давыдов [ЖЭТФ, 32, 1429 (1957)]. — *Прим. ред.*

Вигнер [118] для формы силовой функции [т. е. для мнимой части (5.19), деленной на π] получил совершенно тот же результат, что и Блох. При этом Вигнер делал в основном те же самые предположения, но использовал совершенно отличный математический метод. Он исходил из уравнения Шредингера в матричной форме:

$$\mathbf{H}\mathbf{C}_\lambda = E_\lambda\mathbf{C}_\lambda, \quad (5.26)$$

где \mathbf{H} дано в χ_{cp} -представлении, а \mathbf{C}_λ — вектор-столбец с компонентами $C_{\lambda, cp}$ из разложения (5.4). Задача нахождения силовой функции s_c вблизи E_p , как следует из (5.10), эквивалентна определению $\langle C_{\lambda, cp}^2 \rangle_I / D_I$, где D_I — среднее расстояние между собственными значениями в интервале I . Таким образом, вопрос сводится к чисто математической задаче, требующей хорошего знакомства с матричной алгеброй.

Вигнер предположил, что недиагональные элементы \mathbf{H} имеют случайные знаки и равные величины для членов, отстоящих от диагонали вплоть до некоторого данного номера. Дальше этого номера (соответствующего энергии ϵ) элементы \mathbf{H} предполагались равными нулю. Кроме того, предполагалось, что соседние диагональные элементы отличаются друг от друга на одинаковую величину. При этих предположениях, в случае, когда $|(cp | H' | c'p')|^2 \rho \ll \epsilon$, полученное Вигнером выражение для силовой функции совпадает с результатом Блоха.

§ 6. Учет неточности предположения о случайности знаков $\gamma_{\lambda c}$

Рассмотрим элемент матрицы столкновений, отвечающий некоторому определенному процессу неупругого рассеяния $c \rightarrow c'$. Как следует из (2.3) или (2.18), существенной частью в этом матричном элементе является сумма

$$\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}}. \quad (6.1)$$

При вычислении сечений (т. е. квадрата этой величины) мы в § 2 [см. (2.4) — (2.6)] предполагали, что знаки $\gamma_{\lambda c}$ и $\gamma_{\lambda c'}$ распределены хаотически. Это означает, что вкладом

состояний λ , отстоящих от энергии E больше, чем на некоторую конечную величину, можно пренебречь, что приводит к сечениям (2.6) или (3.13), которые принято называть сечением образования составного ядра и в которых проявляется независимость способов образования и распада составного ядра. Сейчас представляет интерес проверить справедливость предположения о хаотическом распределении знаков и выяснить, в частности, какой вклад в (6.1) внесут далеко отстоящие уровни, если это предположение не является вполне правильным.

В модели сильной связи, которая обсуждалась в § 4, предполагалось, что приближение случайных знаков верно вплоть до почти произвольно больших энергетических интервалов (за исключением бесконечной энергетической области, в которой применение правила Вигнера — Тейхмана [75] $\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'} = 0$ при $c \neq c'$ требует некоторой осторожности). Это утверждение основывается на обычном представлении теории „сильного поглощения“ о том, что движение внутри ядра является полностью хаотическим без всяких признаков одночастичного или какого-либо другого когерентного движения. Отсюда следует, что в случаях, когда имеется одночастичное движение, можно ожидать некоторого нарушения хаотичности распределения знаков амплитуд приведенных ширин. Это нарушение не должно проявляться в произвольно малых энергетических интервалах; можно лишь ожидать корреляцию между далекими уровнями, которая будет сказываться при суммировании по всем уровням внутри одночастичного резонанса (расширенного благодаря наличию какого-либо потенциала поглощения W). Ясно, что если W возрастает, то корреляция становится все более и более слабой, так что в конце концов мы приходим к положению, характерному для модели сильного поглощения.

К тем же заключениям можно прийти путем рассмотрения так называемых „прямых процессов“, существование которых было недавно обнаружено. Эти процессы дают заметный вклад в ядерные реакции, особенно в сечение неупругого рассеяния. На опыте обнаружено, что в сечениях образования определенных низколежащих состояний прямые процессы преобладают над процессами, протекающими через составное ядро. Прямые процессы четко отличаются характерным

максимумом в угловом распределении, соответствующим направлению вперед. Как следует из рассуждений, проведенных в § 3, отсутствие в угловом распределении симметрии относительно угла 90° (симметрии вперед—назад) указывает на то, что предположение о хаотическом распределении знаков не вполне верно. Прямые процессы могут быть подвергнуты теоретическому анализу с помощью феноменологической модели, которая тесно связана с моделью комплексного потенциала. Основная физическая идея этой модели заключается в том, что благодаря достаточно большому среднему пути свободного пробега нуклона в ядре по отношению к столкновениям, что следует из модели комплексного потенциала (с малым W), имеется вероятность, что падающий нуклон, попав в ядро, может обменяться энергией с одним из нуклонов ядра-мишени, после чего одна из сталкивающихся частиц может покинуть ядро без дальнейших потерь энергии или образования составного ядра. Тот факт, что приложения этой идеи оказались успешными, означает, что неточность предположения о хаотическом распределении знаков связана с одночастичным движением, что и подтверждает вывод, сделанный нами выше. Точно так же, если W возрастает (т. е. средняя длина свободного пробега уменьшается), одночастичное движение должно быть исключено. В этом случае остаются лишь процессы, протекающие через составное ядро; никакие прямые процессы невозможны.

Придадим теперь этой концепции количественную форму. Задача состоит в том, чтобы показать возможность таких корреляций между фазами долгоживущих уровней, что при суммировании по большому числу таких уровней время жизни, соответствующее сумме, оказывается очень малым. Будем считать, что член $E - \Delta_\lambda + (i/2)\Gamma_\lambda$ не зависит от λ (это можно сделать, если уровни перекрываются или если рассматривается усредненное сечение). Как и в § 5, введем в этот член комплексную энергию \mathcal{E} и воспользуемся соотношением полноты суммы. В результате получим

$$R_{cc'}(\mathcal{E}) = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right) \sum_{pp'} u_p(a_c) u_{p'}(a_c) \left(\chi_{cp} \left| \frac{1}{H - \mathcal{E}} \right| \chi_{c'p'} \right). \quad (6.2)$$

Сделанные в предыдущем параграфе замечания об антисимметризации относятся также и сюда.

Блох [34] предпринял попытку вычислить (6.2) тем же самым путем, который использовался им для вычисления диагональных элементов R_{cc} . Если произвести разложение (5.12), пренебречь обменными интегралами и выделить главные члены на основе хаотического распределения знаков $(cp | H' | c'p')$, то формуле (6.2) можно, подобно (5.11), придать следующий вид:

$$R_{cc'}(\mathcal{E}) = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right) \sum_{pp'} \frac{u_p(a_c) u_{p'}(a_c) (cp | H' | c'p')}{[E_{cp} - \mathcal{E} + \varphi_{cp}(E)] [E_{c'p'} - \mathcal{E} + \varphi_{c'p'}(E)]}, \quad (6.3)$$

где величины φ_{cp} определены согласно (5.15). Находя предел этого выражения при $\mathcal{E} \rightarrow E$ и определяя $u_{E_c}(r)$ как

$$u_{E_c}(r) = \left(\frac{\hbar^2}{2M_c a_c} \right) \sum_p \frac{u_p(a_c) u_p(r_c)}{E_{cp} + \Delta_{cp} - E - iW_{cp}}, \quad (6.4)$$

получаем

$$R_{cc'} = (cu_{E_c} | H' | c'u_{E'}c'). \quad (6.5)$$

Определение (6.4) для u_{E_c} совпадает с точным разложением (IV. 1.8) собственной функции u_E для вещественной потенциальной ямы $-V$ при энергии E , с той лишь разницей, что $-E$ заменяется на $(E_c + \Delta_{cp} - E - iW_{cp})$. Если Δ_{cp} и W_{cp} не зависят от p , то ясно, что функция (6.4) совпадает с решением волнового уравнения для потенциальной ямы $-V'_c$, которое рассматривалось в § 5. Это означает, что величина (6.5) соответствует матричному элементу, вычисленному по методу искаженных волн, который использовался для расчета сечений по феноменологической теории прямых процессов, т. е. матричный элемент „возмущающего“ потенциала H берется для двух волновых функций, каждая из которых является произведением волновой функции соответствующего состояния ядра-мишени и искаженной одночастичной волновой функции, соответствующей рассеянию на комплексной потенциальной яме¹⁾.

¹⁾ Для простоты мы не будем принимать в расчет множитель $(1 - L_c^0 \bar{R}_c)^{-1}$ в соотношении (2.18a), который оказывается примерно равным единице, вообще говоря, только при низких энергиях. Если этот множитель ввести в (6.4), то нормировка u_{E_c} будет являться нормировкой на заданный поток падающих частиц, что и требуется для матричных элементов в методе искаженных волн.

То, что имеется феноменологическая теория прямых процессов, связанная с \mathbf{R} -матричной теорией столь простым образом, представляет собой весьма отрадное обстоятельство. Это явно свидетельствует о том, что в \mathbf{R} -матричной теории прямые процессы отвечают корреляциям в знаках амплитуд приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$ далеко отстоящих друг от друга уровней в области гигантских резонансов.

При проведенных выше преобразованиях $R_{cc'}$ мы „потеряли“ вклад от механизма составного ядра. Поскольку единственным приближением, сделанным при переходе от (6.2) и (6.3), является предложенное Блохом выделение главных членов, мы должны заключить, что именно на этой стадии и был неявно упущен вклад от механизма составного ядра.

Недостаток настоящей теории заключается в том, что, сконцентрировав в (6.1) вклад от далеких членов, мы потеряли вклад от близких членов. Этот вклад, тем не менее, можно учесть на основе того факта, что хорошим приближением к (6.1) является, по всей вероятности, выражение

$$(cu_{E_c} | H' | c'u_{E'c'}) + \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}}, \quad (6.6)$$

где сумма во втором члене берется по области энергии, много большей Γ_{λ} , но много меньшей ширины одночастичных резонансов. Последнее требование означает, что распределение знаков $\gamma_{\lambda c}$ можно считать хаотическим. Поэтому если мы возьмем квадрат модуля выражения (6.6) и усредним по многим уровням для того, чтобы получить среднее сечение, то все перекрестные интерференционные члены сократятся и полученное в результате сечение будет представлять собой некогерентную сумму сечения прямых процессов, содержащую величину

$$|(c'u_{E_c} | H' | c'u_{E'c'})|^2$$

плюс сечение типа (3.13), соответствующее образованию составного ядра.

Хотя мы имели дело со специальным случаем прямого неупругого рассеяния, те же самые методы и тот же подход может быть применен для описания прямых процессов других типов, в частности процесса срыва (стриппинга) на дейтроне.

В этом случае мы также можем показать, что \mathbf{R} -матричная теория является правильной, если принятые радиусы взаимодействия достаточно велики для того, чтобы включить все взаимодействия. Так как характерное для процесса срыва угловое распределение не согласуется с предсказаниями теории, основанной на предположении о хаотичном распределении знаков, то отсюда следует, что процесс срыва может быть описан с помощью \mathbf{R} -матричной теории, если допустить корреляцию знаков.

Однако этот случай несколько отличается в деталях от случая падающих нуклонов. Именно, в случае, когда падающими частицами являются нуклоны, принимается, что потенциал поглощения совершенно постоянен внутри ядра, так что одночастичное движение может в равной мере существовать во всем ядре и прямые процессы могут иметь место как внутри ядра, так и на его поверхности. В отличие от этого в случае, когда падающими частицами являются дейтроны, мнимая часть потенциала W , как можно полагать, мала только в некоторой области вблизи поверхности ядра при $r_c = a_c$, а внутри объема ядра весьма велика. Таким образом, одночастичное движение, ответственное за корреляцию фаз, может существовать только вблизи поверхности ядра. Если набор $\gamma_{\lambda c}$ определен на *внутренней* поверхности, то можно ожидать, что их знаки будут распределены случайно. Только в том случае, если поверхностную область распространить вплоть до $r_c = a_c$, появляется корреляция знаков у амплитуд приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$.

Глава XII

ПРИМЕНЕНИЕ R-МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ К ОПИСАНИЮ ИЗОЛИРОВАННЫХ УРОВНЕЙ

Наиболее удивительным явлением в области низких энергий является наличие на кривой возбуждения ядерных реакций острых резонансных пиков. С тех пор как свыше двадцати лет тому назад резонансы были впервые экспериментально обнаружены, число изученных резонансов возросло почти до тысячи. Многие из этих резонансов сравнивались с известной резонансной формулой Брейта — Вигнера [9—11] для изолированного уровня. В одних случаях между экспериментальной и расчетной кривой имелось полное соответствие, в других же согласие было лишь качественным.

В течение нескольких лет формула для изолированного уровня применялась более или менее аналогично приложению подобной формулы к атомному излучению. Это положение было неудовлетворительным, поскольку в случае ядра применение теории возмущений, на основе которой была получена резонансная формула для атомного излучения, является неоправданным. Помимо всего прочего, это крайне затрудняло интерпретацию ширин (матричных элементов оператора возмущения), полученных из сопоставления с экспериментальными данными, и делало невозможным введение каких-либо количественных поправок к формуле для изолированного уровня. С появлением строгой общей теории ядерных реакций, предложенной в 1938 г. Капуrom и Пайерлсом, а позднее и R-матричной теории, большинство этих трудностей было разрешено. В этих теориях ширины совершенно определенным образом количественно выражаются через ядерные волновые функции, а поправки к формуле Брейта — Вигнера следуют из аппроксимации общей теории случаем изолированного уровня. Обычное условие применимости формулы изолированного уровня состоит в том, что ширина уровня Γ должна быть много меньше расстояния D между уровнями. При выводе формулы для изолированного уровня из общей теории ядерных реакций можно показать, что это условие

вполне оправдывает использование формулы Брейта—Вигнера, что, конечно, не является неожиданным. Преимущества R -матричной теории проявляются тогда, когда условия не являются столь благоприятными и величина сечения в области резонанса зависит от наличия других уровней. В таких случаях R -матричная теория позволяет получить модификацию формулы для изолированного уровня, учитывающую с помощью некоторых параметров наличие других уровней. Благодаря этим дополнительным параметрам появляется большая свобода при установлении соответствия между теорией и экспериментом, и неудовлетворительное соответствие, имеющее место при использовании формулы для изолированного уровня, может быть улучшено. Например, если условие $\Gamma \ll D$ нарушается вследствие аномальной близости двух уровней, вместо формулы для изолированного уровня может быть использована формула для двух уровней.

Другое преимущество R -матричной теории связано с тем, что формула для изолированного уровня может находиться в плохом соответствии с опытом даже и в том случае, когда существует только один уровень. Это вызвано тем, что зависимость сечения от энергии не всегда может быть выражена через резонансный знаменатель и фазовые множители. В некоторых случаях ширина уровня и его резонансная энергия существенно изменяются с энергией на протяжении ширины резонанса. Если формула для изолированного уровня выведена из R -матричной теории, то энергетическая зависимость параметров резонанса неявно содержится в коэффициенте проницаемости и факторе сдвига. Резонансы такого типа были подробно изучены Брейтом с сотрудниками [119—122], особенно для случая большой приведенной ширины, т. е. для „одночастичных“ резонансов.

В первых трех параграфах настоящей главы мы изложим общую теорию в форме, удобной для применения к случаю изолированного уровня, и укажем различные приближения, которые позволяют получить формулу для изолированного уровня. Затем мы обсудим физический смысл и интерпретацию формулы для изолированного уровня и, наконец, рассмотрим ее практические применения. В последних двух параграфах настоящей главы будет получена формула для двух уровней и будут сделаны замечания об интерференции уровней в межрезонансной области.

§ 1. Приближение изолированного уровня

Из соотношения (IX. 1.14) следует, что если положить

$$R = R^0 + R' \quad (1.1a)$$

и выбрать

$$R' = \frac{\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda}{E_\lambda - E}, \quad (1.16)$$

то матрица столкновений может быть представлена в виде

$$U = U^0 + 2i\Omega\mathfrak{P}^{1/2} \left\{ \frac{\alpha_\lambda \times \alpha_\lambda}{E_\lambda + \Delta_\lambda - E - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda} \right\} \mathfrak{P}^{1/2}\Omega, \quad (1.2)$$

где „фоновая матрица“ U^0 равна

$$U^0 = \Omega [1 + 2i\mathfrak{P}^{1/2} (1 - R^0 L^0)^{-1} R^0 \mathfrak{P}^{1/2}] \Omega, \quad (1.3a)$$

или

$$U^0 = \Omega \mathfrak{P}^{1/2} (1 - R^0 L^0)^{-1} (1 - R^0 L^{0*}) \mathfrak{P}^{-1/2} \Omega, \quad (1.36)$$

а величины α_λ , Δ_λ и Γ_λ определяются соотношениями

$$\alpha_\lambda = (1 - R^0 L^0)^{-1} \gamma_\lambda, \quad (1.4)$$

$$\Delta_\lambda \equiv \Delta_{\lambda\lambda} = (\alpha_\lambda^* (L^{0*} R^0 L^0 - S^0) \alpha_\lambda) = \sum_c \Delta_{\lambda\lambda c}, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{2} \Gamma_\lambda \equiv \frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\lambda} = (\alpha_\lambda^*, \mathfrak{P} \alpha_\lambda) = \frac{1}{2} \sum_c \Gamma_{\lambda\lambda c} \quad (1.6)$$

[см. (IX. 1.18) и (IX. 1.20)]

Перед тем как ввести приближение изолированного уровня, интересно рассмотреть некоторые формальные свойства матрицы (1.2). Для этой цели удобно записать (1.2) в форме

$$U = U^0 + 2i \frac{\tau_\lambda \times \tau_\lambda}{\varepsilon_\lambda}, \quad (1.7)$$

где τ_λ и ε_λ определены следующим образом:

$$\tau_\lambda = \Omega \mathfrak{P}^{1/2} \alpha_\lambda,$$

$$\varepsilon_\lambda = E_\lambda + \Delta_\lambda - E - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda.$$

Матрица (1.7) удовлетворяет условиям:

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}^{0*}, \quad (1.8a)$$

$$\mathbf{U}^0 (\mathbf{U}^0)^\dagger = \mathbf{1}, \quad (1.8б)$$

$$\mathbf{U}^0 \boldsymbol{\tau}_\lambda^* = \boldsymbol{\tau}_\lambda, \quad (1.8в)$$

$$\text{Im}(\epsilon_\lambda) = -(\boldsymbol{\tau}_\lambda^*, \boldsymbol{\tau}_\lambda), \quad (1.8г)$$

где символ „ \dagger “ означает комплексное сопряжение и транспонирование.

На основании более общего рассмотрения, чем \mathbf{R} -матричная теория, можно убедиться, что (1.7) представляет собой естественную форму приближения изолированного уровня и что можно ожидать справедливости условий (1.8) и в общем случае. Доказательство состоит в представлении N -мерной унитарной симметричной матрицы \mathbf{U} через ее вещественные собственные функции (векторы) \mathbf{g}_λ , принадлежащие собственным значениям $\exp(2i\delta_\lambda)$, равным по модулю единице

$$\mathbf{U} = \sum_{\lambda=1}^N e^{2i\delta_\lambda} (\mathbf{g}_\lambda \times \mathbf{g}_\lambda). \quad (1.9)$$

В гл. IV, исходя из принципа причинности, было показано, что в случае одного канала функция столкновений $\exp(2i\delta)$ может быть выражена через ее нули и полюса и что в окрестности полюса H [в нижней части комплексной плоскости энергий, где $\text{Im}(H) < 0$] эта функция имеет следующую форму:

$$e^{2i\delta} = e^{2i\delta^0} \left(\frac{H^* - E}{H - E} \right) = e^{2i\delta^0} \left(1 + \frac{2i \text{Im}(H)}{H - E} \right).$$

Величина $\exp(2i\delta^0)$ содержит сингулярности в оставшихся полюсах и другие факторы. Если предположить, что отдельные собственные значения представления для многих каналов (1.9) также имеют такую форму в окрестности полюса H и если сингулярности вблизи E соответствуют первому собственному значению $\lambda=1$, то (1.9) может быть переписано в форме (1.7), причем

$$\mathbf{U}^0 = e^{2i\delta_1^0} (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_1) + \sum_{\lambda=2}^N e^{2i\delta_\lambda} (\mathbf{g}_\lambda \times \mathbf{g}_\lambda),$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = [-\text{Im}(H_1)]^{1/2} e^{i\delta_1^0} \mathbf{g}_1,$$

Условиям (1.8), которым удовлетворяет разложение \mathbf{R} -матрицы, удовлетворяет также и матрица (1.9). Заметим, что матрица \mathbf{U} , определяемая равенством (1.9), удовлетворяет также общему условию теории матрицы столкновений, а именно:

$$\mathbf{U}(E^*)^* \mathbf{U}(E) = \mathbf{1}.$$

Брейт [14, 15] дал другой вывод условий (1.8) и их дальнейшее обсуждение.

Отметим теперь несколько специфических особенностей \mathbf{R} -матричной теории, не находящих отражения в общей теории. В \mathbf{R} -матричной теории принимается, что ядерная система имеет более или менее определенную границу, соответствующую поверхности \mathcal{S} . В результате этого предположения парциальные ширины $\Gamma_{\lambda c}$ оказались пропорциональными факторам проницаемости P_c , а парциальные сдвиги уровней — факторам сдвига S_c^0 . Как P_c , так и S_c^0 могут быть рассчитаны, и их зависимость от энергии известна. При определенных граничных условиях B_c уровни E_c могут быть связаны с собственными функциями, а сдвиг Δ_λ реального резонанса от E_r может быть выражен через S_c^0 и приведенные ширины системы. В некоторых случаях можно также произвести довольно разумные оценки величины фоновой матрицы. Поскольку в общей теории не содержится никаких предположений о строгой ограниченности области взаимодействия, в ней не содержится и всей этой информации.

Различные сечения определяются как квадраты модулей соответствующих компонент матрицы \mathbf{U} (см. гл. VIII). Квадраты элементов второй матрицы в выражении (1.2) представляют собой обычную „резонансную“ часть рассеяния или реакции. Элемент (cc') этой матрицы есть

$$\frac{\Gamma_{\lambda c} \Gamma_{\lambda c'}}{(E_\lambda + \Delta_\lambda - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2}.$$

Заметим, что парциальные ширины $\Gamma_{\lambda c}$ в равенстве (1.6) содержат фактор проницаемости P_c , а также зависят от энергии через матрицы \mathbf{L}^0 и \mathbf{R}^0 . Элементы матрицы \mathbf{U}^0 ответственны за так называемое „потенциальное“ рассеяние или реакцию. Они присутствуют также в перекрестных членах

в выражении для полного сечения, которые описывают интерференцию между „резонансными“ и „потенциальными“ членами.

Все полученные до сих пор выражения являются точными, но они, очевидно, непригодны для практического использования, так как, кроме всего прочего, оно требует еще и инверсии матриц. Практическая применимость этого выражения ограничивается случаями, когда могут быть сделаны некоторые приближенные заключения о природе матрицы \mathbf{R}^0 , т. е. об уровнях, отличных от рассматриваемого уровня λ . Заметим, что \mathbf{R}^0 входит во все выражения в комбинации с матрицей проницаемости \mathfrak{P} или с \mathbf{L}^0 -матрицей. Если при данной энергии мы выберем соответствующие граничные условия, то матрица \mathbf{L}^0 станет по существу матрицей проницаемости, т. е. нас должны интересовать величины комбинаций матриц \mathbf{R}^0 и \mathbf{P} . Это значит, что если \mathbf{P} очень мала, то формула для изолированного уровня применима вне зависимости от величины \mathbf{R}^0 (если только последняя величина не слишком велика по сравнению с единицей). Действительно, в пределе при $\mathbf{P} \rightarrow 0$ состояния становятся связанными и перестают оказывать какое-либо влияние друг на друга.

Относительно величины $\mathbf{R}^0\mathbf{L}^0$ можно сделать три различных приближения, которые в широком смысле слова могут быть названы „приближениями изолированного уровня“.

а. Первое приближение: $\mathbf{R}^0\mathbf{L}^0 = 0$

Хотя это приближение связано с наибольшими ограничениями, необходимыми для практического применения общих формул, оно часто используется на практике. В результате этого приближения общие формулы (1.2)—(1.6) немедленно упрощаются. Фоновая матрица \mathbf{U}^0 становится диагональной с диагональными элементами

$$U_{cc}^0 = e^{2i(\omega_c - \phi_c)}, \quad (1.10)$$

ширины и сдвиги уровней даются формулами

$$\Gamma_{\lambda c} = 2P_c \gamma_{\lambda c}^2, \quad (1.11a)$$

$$\Delta_{\lambda c} = -S_c^0 \gamma_{\lambda c}^2 = -(S_c - B_c) \gamma_{\lambda c}^2, \quad (1.11b)$$

а общий элемент матрицы \mathbf{U} , который определяется из (1.2) и (1.10), имеет вид

$$U_{cc'} = (U_{cc}^0 U_{c'c'}^0)^{1/2} \times \left\{ \delta_{cc'} + \frac{i\Gamma_{\lambda c}^{1/2} \Gamma_{\lambda c'}^{1/2}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}} + O\left[\frac{\langle \Delta - \frac{i}{2} \Gamma \rangle}{D}\right] \right\}. \quad (1.12)$$

Это выражение может быть получено из (IX. 1.14) и (IX. 1.20). Подставляя его в (VIII. 3.2), мы получаем известную формулу Брейта—Вигнера для сечения реакции ($\alpha' \neq \alpha$), протекающей через изолированный резонанс λ со спином J и определенной четностью:

$$\sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} g_J \frac{\left(\sum'_{ls} \Gamma_{\lambda c}\right) \left(\sum'_{l's'} \Gamma_{\lambda c'}\right)}{(E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda}^2}. \quad (1.13)$$

Здесь штрихи у символов сумм по ls и $l's'$ означают, что при этом должны выполняться соотношения $\mathbf{l} + \mathbf{s} = \mathbf{J}$ и $\mathbf{l}' + \mathbf{s}' = \mathbf{J}$ и сохраняться четность. Соответствующая формула для сечения упругого рассеяния ($\alpha = \alpha'$) имеет вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \left\{ \sum_{Jsl} 4g_J \sin^2 \phi_c - g_J \left(\sum'_{sl} \Gamma_{\lambda c} \right) \times \right. \\ \times \left[\frac{2(E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E) \sin 2\phi_c + \Gamma_c (1 - \cos 2\phi_c)}{(E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda}^2} \right] + \\ \left. + g_J \frac{\left(\sum'_{sl} \Gamma_{\lambda c}\right) \left(\sum'_{s'l'} \Gamma_{\lambda c'}\right)}{(E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda}^2} \right\}. \quad (1.14)$$

Последний член в этой формуле представляет собой так называемый „резонансный член“, второй — „интерференционный член“, а первый — член потенциального рассеяния. Поскольку ϕ_c являются фазами рассеяния на твердом шарике и не зависят от s или от J , член потенциального рассеяния просто есть

$$\frac{4\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l + 1) \sin^2 \phi_{\alpha l}. \quad (1.15)$$

т. е. представляет собой сечение рассеяния на твердом шарики; величины ϕ_{aI} определены в § 4 гл. III. (Если имеется дальнедействующее кулоновское взаимодействие, этот член имеет другой вид.)

В формуле (1.12) последний член определяет порядок поправки на влияние соседних (а не далеко отстоящих!) уровней, учитываемой членами, содержащими R^0L^0 . В случае, когда реакция протекает по одному каналу, очевидно, что $R^0L^0 \sim O(\langle \Delta - (i/2)\Gamma \rangle / D)$, где символом $\langle \rangle$ означено усреднение по соседним уровням.

Мы до сих пор ничего не сказали о выборе параметров B_c в граничных условиях. Этот выбор должен производиться так, чтобы приближение изолированного уровня было по возможности более точным, т. е. чтобы ошибка — $O(\langle \Delta - (i/2)\Gamma \rangle / D)$ была как можно меньше. Величины $\langle \Gamma \rangle$ и D сравнительно слабо зависят от выбора B_c , но Δ_c очень чувствительно к этому выбору, что можно видеть из соотношения (1.11б). Таким образом, приближение изолированного уровня наиболее точно тогда, когда B_c выбраны так, что $\langle \Delta \rangle \leq \langle \Gamma \rangle$, или, другими словами, так, чтобы собственное значение E_λ лежало в пределах ширины наблюдаемого резонанса. Это, конечно, весьма разумное требование. Можно выбрать $B_c = +S_c(E_r)$, где E_r — энергия, отвечающая центру резонанса. Тогда при $E = E_r$ сдвиг уровня Δ_λ обращается в нуль и поставленное выше требование довольно хорошо удовлетворяется. Можно выбрать B_c иначе и также удовлетворить этому условию, причем это будет не лучше и не хуже выбора $B_c = +S_c(E_r)$. Существенно, что ошибка формулы для изолированного уровня не может быть сделана меньше некоторой „характеристической“ ошибки $O(\langle \Gamma \rangle / 2D)$. Поэтому все выборы B_c , при которых $O(\langle \Delta - (i/2)\Gamma \rangle / D)$ уменьшается до величины этой „характеристической“ ошибки, являются совершенно равноценными.

Из условия совпадения формулы для изолированного уровня с экспериментальной кривой мы можем выбирать граничные условия, наилучшим образом удовлетворяющие поставленному выше требованию. Поскольку граничные условия при этом сопоставлении нигде явно не используются, при рассмотрении результатов такого сопоставления нет необходимости обращать внимание на значения параметров в граничных условиях. Однако при рассмотрении таких результатов читатель

должен отдавать себе отчет в том, что резонансные параметры (приведенные ширины, собственные значения), определенные при сравнении экспериментальной кривой с теоретической формулой, соответствуют граничным условиям, удовлетворяющим указанному выше требованию, т. е. приближенно

$$B_c = +S_c(E_r).$$

Выше мы не обратили внимания читателя на зависимость $\Delta_{\lambda c}$ от энергии (через S_c) так, что из обращения $\Delta_{\lambda c}$ в нуль в центре резонанса не следует, что $\Delta_{\lambda c}$ повсюду равно нулю. В большинстве случаев изменением $\Delta_{\lambda c}$ с энергией на протяжении ширины резонанса можно пренебречь. Это очень существенно, так как, вообще говоря, подгонка формулы к экспериментальной кривой становится гораздо более сложной, если $\Delta_{\lambda c}$ быстро меняется с энергией. Как будет показано в § 3 настоящей главы, энергетическая зависимость $\Delta_{\lambda c}$ может быть, по-видимому, представлена разложением в ряд Тейлора:

$$\Delta_{\lambda c}(E) = \Delta_{\lambda c}(E_r) + (E - E_r) \left(\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE} \right)_{E=E_r} + \dots \quad (1.16)$$

В этом разложении величина $d\Delta_{\lambda c}/dE$ определяет, как быстро изменяется функция $\Delta_{\lambda c}$ с энергией. В рассматриваемом приближении из (1.16) имеем

$$\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE} = -\gamma_{\lambda c}^2 \frac{dS_c}{dE}. \quad (1.17)$$

б. Второе приближение; R^0L^0 мало

Несмотря на то, что это приближение не имеет большого практического значения, в целях полноты мы все же рассмотрим его. Приближение заключается в том, что в разложении

$$(1 - R^0L^0)^{-1} = 1 + R^0L^0 + (R^0L^0)^2 + \dots \quad (1.18)$$

мы берем только два первых члена. В этом приближении выражения (1.5) и (1.6) для парциальных ширин и сдвигов уровней принимают вид

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\lambda c} = P_c \left(\gamma_{\lambda c}^2 + 2 \sum_{c'} \gamma_{\lambda c} R_{cc'}^0 S_{c'}^0 \gamma_{\lambda c'} \right), \quad (1.19a)$$

$$\Delta_{\lambda c} = -S_c^0 \gamma_{\lambda c}^2 - \sum_{c'} S_c^0 \gamma_{\lambda c} R_{cc'}^0 S_{c'}^0 \gamma_{\lambda c'} + \sum_{c'} P_c \gamma_{\lambda c} R_{cc'}^0 P_{c'} \gamma_{\lambda c'}. \quad (1.19b)$$

Если B_c выбрать так, чтобы S_c^0 обращались в нуль при $E = E_r$, то приведенные ширины при резонансной энергии будут равны $2P_c \gamma_{\lambda c}^2$. Таким образом, равенство

$$\Gamma_{\lambda c} = 2P_c \gamma_{\lambda c}^2$$

в резонансе справедливо с точностью до членов второго порядка по $R^0 P$. При этом же выборе B_c первые два члена в выражении для $\Delta_{\lambda c}$ обращаются в нуль. Второй член в выражении для $d\Delta_{\lambda c}/dE$ является квадратичным по $(E - E_r)$, поэтому его вклад будет, по-видимому, мал по сравнению с вкладом первого члена. Третий член в соотношении (1.196) и его изменение с энергией оценить гораздо труднее, так как знаки отдельных членов с $c \neq c'$ будут флуктуировать. Вклад членов с $c = c'$ дается ниже соотношениями (1.34) и (1.35). Можно ожидать, что сумма членов с $c \neq c'$ будет мала по сравнению с суммой членов, в которых $c = c'$. Если в реакции участвуют только два канала, то вклад в третий член соотношения (1.196), обусловленный членами $c \neq c'$, равен, грубо говоря,

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\langle \Gamma_{\lambda c} \rangle \langle \Gamma_{\lambda c'} \rangle}{D^2}.$$

Фоновая матрица \mathbf{U}^0 в этом приближении не является диагональной, так что она дает вклад и в сечения реакций.

в. Третье приближение: $\mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0$ диагонально

Как следует из теоретического и экспериментального изучения средних полных сечений (см. гл. XI, § 4 и 5), матрица \mathbf{R}^0 имеет весьма большие диагональные элементы, так что, если только фактор \mathbf{L}^0 не мал, использование первого приближения ($\mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0 = 0$) не приводит к удовлетворительным результатам. Естественным обобщением этого приближения является допущение, что матрица $\mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0$ является диагональной, так что обращение матрицы становится просто обычным делением. Это позволяет нам записать приведенные выше формулы без каких-либо операций обращения матрицы. Это предположение является разумным, так как вклады отдельных уровней в недиагональные элементы \mathbf{R}^0 могут быть как

положительными, так и отрицательными и имеют тенденцию к взаимной компенсации друг друга; в то же время все диагональные элементы пропорциональны положительным приведенным ширинам. Если R^0L^0 диагонально, то ширины и сдвиги уровней, как следует из (1.5) и (1.6), равны

$$\Gamma_{\lambda c} = \frac{2P_c \gamma_{\lambda c}^2}{d_c}, \quad (1.20a)$$

$$\Delta_{\lambda c} = \frac{P_c (R_{cc}^0 P_c) - S_c^0 (1 - R_{cc}^0 S_c^0)}{d_c} \gamma_{\lambda c}^2, \quad (1.20b)$$

где

$$d_c = (1 - R_{cc}^0 S_c^0)^2 + (R_{cc}^0 P_c)^2. \quad (1.21)$$

Элементы диагональной фоновой матрицы будут теперь равны

$$U_{cc}^0 = e^{2i(\omega_c - \phi'_c)}, \quad (1.22)$$

где

$$\phi'_c = \phi_c + \arg(1 - R_{cc}^0 L_c^0) = \phi_c - \arctg\left(\frac{R_{cc}^0 P_c}{1 - R_{cc}^0 S_c^0}\right). \quad (1.23)$$

Для элементов матрицы столкновений и сечений могут быть использованы соотношения (1.12)—(1.14), если считать, что входящие в них величины $\Gamma_{\lambda c}$, $\Delta_{\lambda c}$ и U_{cc}^0 определены только что приведенными формулами, а под ϕ_c понимать ϕ'_c . В случае, когда реакция протекает только через один канал, такое рассмотрение является вполне удовлетворительным. Формулы (1.20)—(1.23) совершенно эквивалентны соответствующим формулам, рассмотренным ранее для случая одного канала в § 1 гл. IV. Кротков [123] использовал описанное приближение для анализа резонансов рассеяния и захвата нейтронов Mn^{55} при различных энергиях вплоть до области килоэлектронвольт.

Если R^0 и Δ_{λ} не очень сильно зависят от энергии, то в окрестности резонанса их можно считать постоянными. Если же это не так, то согласование с экспериментом становится более сложным и требуется учитывать энергетическую

зависимость $\Delta_{\lambda c}$ с помощью формулы (1.16). В рассматриваемом приближении из (1.20б) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE}\right)_{E=E_r} = & \frac{\gamma_{\lambda c}^2}{[(1-y)^2 + x^2]^2} \left\{ (2x - 2xy + 4xy^2) \frac{dP_c}{dE} + \right. \\ & + (x^2 - 3y^2 + 2y^3 + 2x^2y + y^4 - x^4) \left(\frac{1}{R_{cc}^0}\right)^2 \frac{dR_{cc}^0}{dE} + \\ & \left. + (-1 - 4x^2y + x^2 - 2y + 3y^2 + y^3) \frac{dS_c}{dE} \right\}, \quad (1.24) \end{aligned}$$

где $x = (P_c R_{cc}^0)_{E=E_r}$, $y = (S_c^0 R_{cc}^0)_{E=E_r}$.

Вычисление $\Delta_{\lambda c}$ и $(d\Delta_{\lambda c}/dE)$ зависит от выбора параметра граничных условий B_c . Следуя тем же самым соображениям, что и выше, при обсуждении первого приближения, параметры B_c следует выбирать таким образом, чтобы приближение изолированного уровня было как можно более точным. Это означает, что в области резонанса $\Delta_{\lambda c}$ должно удовлетворять условию

$$\Delta_{\lambda c} \leq \Gamma_{\lambda c}.$$

Мы укажем два выбора параметров B_c , удовлетворяющих этому требованию.

1) Мы можем определить B_c так, чтобы

$$\Delta_{\lambda c}(E_r) = 0 \quad (1.25)$$

для каждого канала c .

Введем угол A_c , определенный с помощью соотношения

$$\sin A_c = 2(P_c R_{cc}^0)_{E=E_r} = 2x. \quad (1.26)$$

Тогда из (1.20б) следует, что параметры B_c , удовлетворяющие (1.25), должны быть равны

$$B_c = S_c(E_r) - P_c(E_r) \operatorname{tg} \frac{A_c}{2}. \quad (1.27)$$

Этот выбор параметров B_c означает, что при $E = E_r$

$$\Gamma_{\lambda c} = 2P_c \gamma_{\lambda c}^2 \sec^2 \frac{A_c}{2}. \quad (1.28)$$

2) Другой выбор B_c должен быть такой, чтобы $d_c = 1$ при $E = E_r$, так что при $E = E_r$

$$\Gamma_{\lambda c} = 2P_c \gamma_{\lambda c}^2. \quad (1.29)$$

Условие (1.29) будет выполнено, если вместо A_c ввести угол A'_c , определенный соотношением

$$\sin A'_c = (P_c R_{cc}^0)_{E=E_r} = x. \quad (1.30)$$

В этом случае сдвиг уровня при резонансной энергии ($E = E_r$) равен

$$\Delta_{\lambda c} = P_c \gamma_{\lambda c}^2 \operatorname{tg} \frac{A'_c}{2} = \gamma_{\lambda c}^2 (S_c - B_c). \quad (1.31)$$

Если x мало, то оба варианта граничных условий сводятся к $y = 0$ и, таким образом, приводят к одинаковым (с точностью до членов первого порядка малости) выражениям для ширины и сдвигов. С точностью до членов первого порядка относительно x

$$\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE} = \gamma_{\lambda c}^2 \left(2x \frac{dP_c}{dE} - \frac{dS_c}{dE} \right). \quad (1.32)$$

С точностью до членов второго порядка

$$\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE} = \gamma_{\lambda c}^2 \left\{ \frac{2x \frac{dP_c}{dE} + P_c^2 \frac{dR_{cc}^0}{dE} + \frac{dS_c}{dE} (x^2 - 2y - 1)}{1 - 4y + 2x^2} \right\}. \quad (1.33)$$

В случае, когда принят первый вариант граничных условий ($y = x^2$), эта формула принимает вид

$$\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE} = \gamma_{\lambda c}^2 \left\{ \frac{\frac{d}{dE} (R_{cc}^0 P_c)^2 - \frac{dS_c}{dE} (1 + x^2)}{1 - 2x^2} \right\}; \quad (1.34)$$

если же выбран второй вариант граничных условий ($y = x^2/2$), то

$$\frac{d\Delta_{\lambda c}}{dE} = \gamma_{\lambda c}^2 \left\{ \frac{d}{dE} (R_{cc}^0 P_c)^2 - \frac{dS_c}{dE} \right\}. \quad (1.35)$$

Обычно

$$\frac{dS_c}{dE} \leq \left(\frac{Ma^2}{\hbar^2} \right),$$

за исключением случая S -нейтронов, в котором dS_c/dE равна нулю. В этом последнем случае можно оценить R_{cc}^0 и счи-

тать его грубо константой, умноженной на $1/(Ka)$, где $K \sim 10^{13} \text{ см}^{-1}$ (см. гл. XI, § 4). Тогда

$$\frac{d}{dE} (R_{cc}^0 P_c)^2 \sim \left(\frac{Ma^2}{\hbar^2} \right) \left(\frac{2}{Ka} \right) \sim \frac{1}{3} \left(\frac{Ma^2}{\hbar^2} \right).$$

Отсюда можно заключить, что величины в фигурных скобках в (1.34) и (1.35) всегда примерно равны (Ma^2/\hbar^2) , так как в случае, когда второй член мал, первый становится большим. Следовательно, $d\Delta_{\lambda c}/dE$ мало (и разложение $\Delta_{\lambda c}$ в ряд Тейлора пригодно) только тогда, когда $\gamma_{\lambda c}^2 \ll \hbar^2/Ma^2$.

§ 2. Интерпретация приближения изолированного уровня

Хотя теория изолированного уровня позволяет получить формулы для анализа резонансов и выражения для поправочных членов, ее нелегко связать с физической картиной ядерной реакции. В частности, вследствие использования стационарной трактовки ядерных реакций временная зависимость реакции не выявляется и идея Бора [2] о распаде состояния составного ядра различными конкурирующими между собой способами не является очевидной. Напротив, более ранние теории ядерных реакций фактически исходили из предполагаемой физической картины. Поэтому эти теории носили феноменологический характер и были недостаточно строги, хотя их физическое содержание было гораздо „прозрачнее“. Сейчас мы попытаемся завершить теорию изолированного уровня, придав ей некоторую физическую окраску.

В § 1 гл. IX мы вывели выражение для интеграла вероятности $|\Psi_e|^2$ по внутренней области. Здесь индекс e означает, что волновая функция Ψ_e , определенная во внутренней области, соответствует единичному входящему потоку (сферической волны) в канале e . Естественно интерпретировать этот интеграл как меру вероятности того, что два ядра пары e проникают друг в друга и образуют составное ядро. Как следует из (IX. 1.29), указанный интеграл равен

$$\int_{\tau} |\Psi_e|^2 d\tau = \frac{\hbar \Gamma_{\lambda e}}{(E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E)^2 - \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda}^2}. \quad (2.1)$$

Это соотношение справедливо не только в том случае, когда в (1.1) можно пренебречь R^0 , но также и в случае,

когда величиной R^0 не пренебрегается, но можно считать, что эта величина не зависит от энергии. (С этой точки зрения для определения приближения изолированного уровня было бы наиболее логично потребовать лишь постоянства R^0 . Однако, как видно из § 1, для вывода удобных выражений для сечений приходится делать дальнейшие предположения.)

Если функция Ψ_e в соотношении (2.1) отнесена к единичному потоку *плоской* волны, правая часть соотношения (V. 2.1) должна быть умножена на фактическую интенсивность потока $\pi/k_e^2 [(2J+1)/(2s_e+1)]$. После умножения на этот множитель интеграл будет иметь размерность „Площадь \times Время“, и, как и раньше, его интерпретация не представляет труда. Разделив этот интеграл на резонансную часть полного сечения, получим среднее значение \hbar/Γ_λ , т. е. среднее время жизни составного ядра.

Физическая природа приближения изолированного уровня выясняется также при вычислении интеграла перекрытия

$$I_{12} = \frac{\int_{\tau} \Psi_1^* \Psi_2 d\tau}{\left[\int_{\tau} |\Psi_1|^2 d\tau \right]^{1/2} \left[\int_{\tau} |\Psi_2|^2 d\tau \right]^{1/2}} \quad (2.2)$$

внутренних волновых функций Ψ_1 и Ψ_2 , отвечающих двум различным энергиям, E_1 и E_2 , но соответствующих R -матрице с изолированным уровнем λ и некоторому постоянному вкладу R^0 от остальных уровней. С помощью выражений (V. 2.9) и (V. 2.10) для интегралов, входящих в соотношение (2.2), можно показать, что

$$|I_{12}|^2 = \frac{|(\mathbf{D}_1^{0*}, (\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda) \mathbf{D}_2^0)|^2}{(\mathbf{D}_1^{0*}, (\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda) \mathbf{D}_1^0)(\mathbf{D}_2^{0*}, (\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda) \mathbf{D}_2^0)} = 1. \quad (2.3)$$

С помощью тождества Шварца

$$(\mathbf{f}^*, \mathbf{g})|^2 = (\mathbf{f}^*, \mathbf{f})(\mathbf{g}^*, \mathbf{g}) - \frac{1}{2} \int \int |\mathbf{f}(x) \mathbf{g}(\xi) - \mathbf{f}(\xi) \mathbf{g}(x)|^2 dx d\xi \quad (2.4)$$

легко показать, что во внутренней области волновая функция Ψ_1 равна умноженной на постоянный комплексный множитель волновой функции Ψ_2 . Заметим, что I_{12} не зависит от того, каким путем образована составная система, описываемая волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 . Следовательно, форма внутренней волновой функции, описывающей общую систему с изолированным уровнем, не зависит от энергии и от канала, по которому эта система была образована. Однако, амплитуда и фаза волновой функции могут зависеть и от того и от другого. Исходя из предположения о независимости формы волновой функции от способа образования составной системы, Вигнер [16, 17] впервые дал вывод обобщенной формулы для изолированного уровня с помощью не зависящей от энергии матрицы R^0 .

В первом приближении изолированного уровня, когда R^0 принимается равной нулю, выводы, сделанные в предыдущем абзаце, становятся тривиальными, поскольку в этом случае принимается, что Ψ может быть выражена с помощью только одной из функций X_λ . В этой связи возникает вопрос о физическом смысле матрицы R^0 и о том, почему в приближении изолированного уровня истинная ψ -функция с бегущими волнами может быть описана одной функцией X_λ типа стоячей волны. Ответ на второй вопрос можно получить с помощью теоремы Грина, использованной нами в гл. V, которая дает нам некоторый приближенный способ, позволяющий сшить X_λ с волновой функцией, определенной во внешней области и содержащей бегущие волны. Эта процедура изменяет производную волновой функции на поверхности, но сохраняет ее производную во внутренней области, что становится очевидным, если применить теорему Грина непосредственно к функциям Ψ и X_λ и предположить, что во внутренней области $\Psi = X_\lambda$. При введении постоянной R^0 -матрицы абсолютное значение волновой функции на поверхности S изменяется. Это означает, что использование теоремы Грина приводит на поверхности S к разрывам непрерывности как самой волновой функции, так и ее производной.

Рассмотрим отношение полной вероятности обнаружения всех нуклонов на поверхности канала S_c (когда нуклоны образуют пару ядер c , разделенных между собой радиусом взаимодействия) к полной вероятности обнаружения нуклонов

во внутренней области (когда они образуют составное ядро):

$$\frac{\int_{\mathcal{S}_c} |\Psi_e|^2 d\mathcal{S}}{\int_{\tau} |\Psi_e|^2 d\tau}. \quad (2.5)$$

С помощью (III. 4.3а) поверхностный интеграл может быть выражен в виде

$$\int_{\mathcal{S}_c} |\Psi_e|^2 d\mathcal{S} = \frac{2Ma_c}{\hbar^2} |V_c|^2, \quad (2.6)$$

где значение величин V_c для системы, образованной по заданному каналу e , дается соотношением (IX. 1.25а). Если выражение (1.1) для изолированного уровня подставить в матрицу $(1 - \mathbf{R}\mathbf{L}^0)^{-1}$ в формуле для \mathbf{V} и использовать выражение (2.1) для объемного интеграла, то отношение (2.5) принимает вид

$$\frac{2Ma_c}{\hbar^2} \left| \left\{ (1 - \mathbf{R}^0\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \right\}_{ce} \varepsilon_\lambda + \alpha_{\lambda c} \alpha_{\lambda e} \right|^2 \frac{P_e}{\hbar\Gamma_{\lambda e}}, \quad (2.7)$$

где α_λ дается равенством (IX. 1.15):

$$\alpha_\lambda = (1 - \mathbf{R}^0\mathbf{L}^0)^{-1} \gamma_\lambda.$$

Если \mathbf{R}^0 принято равным нулю, то указанное отношение становится равным

$$\frac{2Ma_c}{\hbar^2} \gamma_{\lambda c}^2 \quad (2.8)$$

и не зависит от энергии и от канала, по которому было образовано составное ядро. Однако, если \mathbf{R}^0 не равна нулю, хотя и постоянна, энергетическая зависимость ε_λ в (2.7) не выпадает, в результате чего рассматриваемое нами отношение оказывается в общем случае зависящим от энергии и от способа образования составного ядра.

Выражение (2.8) представляет собой отношение (2.5) для собственных функций X_λ . Поскольку в объеме τ волновая функция Ψ_e для изолированного уровня имеет ту же форму, что и X_λ , отклонение отношения (2.5) от (2.8) указывает на то, что введение постоянного члена \mathbf{R}^0 приводит к разрывам величины Ψ_e на поверхности \mathcal{S}_c .

В заключение мы сделаем несколько замечаний об интерпретации временной зависимости в приближении изолированного уровня. В общем случае для определения временной зависимости некоторого процесса, исходя из известных его стационарных характеристик, строится волновой пакет путем суперпозиции стационарных волновых функций, отвечающих различным энергиям в некотором энергетическом интервале, и затем исследуется поведение этого волнового пакета.

В приближении изолированного уровня волновая функция во внутренней области дается, как следует из (IX.1.31) и (IX.1.21), соотношением

$$\Psi_e(E) = \frac{\Gamma_{\lambda e}^{1/2} \hbar^{1/2} e^{i(\omega_e - \phi_e)}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}} \cdot X_{\lambda} e^{iEt/\hbar}, \quad (2.9)$$

в которое мы включили временную зависимость. Заметим, что из (2.9) следует и соотношение (2.1). Составим суперпозицию стационарных состояний такого типа с некоторой зависящей от энергии амплитудой $A(E)$, которая постоянна в области резонанса и с каждой его стороны плавно убывает до нуля. Тогда мы получим волновой пакет:

$$\begin{aligned} \int A(E) \Psi_e(E) dE &= \Gamma_{\lambda e}^{1/2} \hbar^{1/2} e^{i(\omega_e - \phi_e)} X_{\lambda} \int \frac{A(E) e^{iEt/\hbar} dE}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}} \sim \\ &\sim \Gamma_{\lambda e}^{1/2} \hbar^{1/2} e^{i(\omega_e - \phi_e)} X_{\lambda} e^{i(E_{\lambda} + \Delta_{\lambda}) - \Gamma_{\lambda} t/\hbar}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Можно сказать, что этот волновой пакет представляет составное ядро и его распад во времени. Как легко видеть, этот пакет распадается с временем жизни \hbar/Γ_{λ} . Теории Капура—Пайерлса [12, 13] и Зайгерта—Юмбле [94, 95] формулировались с помощью волновых пакетов из состояний X_{λ} . Эти пакеты распадались во времени точно таким же образом. В работе Капура—Пайерлса для определения состояний X_{λ} были выбраны не вещественные граничные условия, а условие выходящих волн во всех каналах. В противоположность использованному здесь произвольным вещественным граничным условиям такое условие прямо соответствует физическому понятию распада составного ядра. Хотя в своей основе эти две формулировки эквивалентны друг другу (§ 2 гл. IX),

условие, использованное Капуром и Пайерлсом, более обосновано физически.

Для более конкретной иллюстрации сказанного рассмотрим простой пример процесса чистого рассеяния вблизи изолированного резонанса. Для этой цели мы воспользуемся следующими рассуждениями, принадлежащими Ван-Кампену ¹⁾. В общем случае при некоторой энергии E имеем на достаточно больших расстояниях

$$\Psi(E, r, t) \sim \frac{1}{r} (e^{-ikr} - Ue^{ikr}) e^{iEt/\hbar}. \quad (2.11)$$

Образуем, как мы делали раньше, волновые пакеты из этих стационарных состояний:

$$\begin{aligned} \Psi(r, t) &\sim \int A(E) \Psi(E, r, t) dE = \\ &= \int \frac{A(E)}{r} (e^{-ikr} - Ue^{ikr}) e^{iEt/\hbar} dE, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $A(E)$ медленно меняется в некотором надлежащем образом выбранном энергетическом интервале и спадает до нуля вне этого интервала. С помощью метода стационарных фаз можно показать, что входящий волновой пакет локализован в момент t в точке $r = -t/v$, где v — средняя скорость. Тот же метод позволяет установить, что *выходящий* волновой пакет находится в точке

$$r = vt - 2 \frac{d\delta}{dk}, \quad (2.13)$$

при этом U выражено в виде $\exp(2i\delta)$. Вблизи изолированного резонанса

$$\delta = (\omega - \phi) + \arctg \left\{ P \left(\frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E} + R^0 \right) \right\}. \quad (2.14)$$

Если пренебречь R^0 , то

$$\frac{d\delta}{dk} = \frac{(\hbar v/2) \Gamma_\lambda}{(E - E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2} + O(a).$$

Таким образом, вблизи резонанса временное запаздывание пакета $(2/v)(d\delta/dk)$ равно примерно $2\hbar/\Gamma$ и гораздо меньше

¹⁾ N. G. Van Kampen, частное сообщение.

вдали от резонанса. Если не пренебрегать величиной R^0 , а считать, что она не зависит от энергии, этот результат остается без изменения при небольшом значении PR^0 .

§ 3. Практическое применение приближения изолированного уровня с $R^0L^0 = 0$

Обсудим теперь вопросы, связанные с согласованием экспериментальной резонансной кривой с формулой для изолированного уровня (1.13), вывод которой основан на пренебрежении величиной R^0 . Единственным серьезным осложнением является то, что в некоторых случаях [119—122, 124] должна быть рассмотрена энергетическая зависимость факторов P и S в выражениях (1.11а) и (1.11б) для ширин и сдвигов уровней. Эти зависимости можно принять во внимание с помощью двух приближенных методов. Первый заключается в том, что для сдвига используется разложение по энергии с точностью до линейного члена, а ширина рассматривается точно. Во втором методе величина ϵ_λ в выражении (1.7) рассматривается в линейном по энергии приближении, тогда как ширины в числителе выражения (1.13) рассматриваются точно. Имеются, однако, случаи, когда эти методы не обеспечивают даже приближенного согласия расчета с экспериментом (например, случай резонансов вблизи порога).

а. Первый приближенный метод:

линейное приближение для зависимости Δ_λ от энергии

Обычно рассмотрение Δ_λ в виде линейной функции E является хорошим приближением в достаточно широком интервале энергий, который часто берется большим, чем ширина резонанса. В этом случае соотношение (1.13) целесообразно переписать так, чтобы сечение зависело от резонансной энергии E_r . Последнюю мы будем теперь определять как корень уравнения

$$E_\lambda + \Delta_\lambda(E_r) - E_r = 0, \quad (3.1)$$

так что

$$E_\lambda + \Delta_\lambda - E = (E_r - E) \left(1 - \frac{d\Delta_\lambda}{dE} \right)_{E_r} + \dots;$$

членами высших порядков пренебрегаем. Тогда соотношение (1.13) принимает следующий вид:

$$\sigma_{cc'} = \frac{\pi}{k_c^2} g_J \frac{\Gamma_{\lambda c}^0 \Gamma_{\lambda c'}^0}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{1}{2} \Gamma_{\lambda c}^0\right)^2}, \quad (3.2)$$

где

$$\Gamma_{\lambda c}^0 = \frac{\Gamma_{\lambda c}}{(1 - d\Delta_{\lambda}/dE)_{E_r}} = \frac{\Gamma_{\lambda c}}{1 + \sum_c \gamma_{\lambda c}^2 (dS_c/dE)}, \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{\lambda}^0 = \sum_c \Gamma_{\lambda c}^0. \quad (3.4)$$

Величины $\Gamma_{\lambda c}^0$ можно интерпретировать как „наблюдаемые“ парциальные ширины в отличие от „формальных“ парциальных ширин $\Gamma_{\lambda c}$, которые зависят от выбора значений радиусов каналов. В области барьера коэффициенты проницаемости P_c очень чувствительны к энергии, поэтому нельзя рекомендовать какой-либо приближенный метод, позволяющий учесть этот факт.

Выразим теперь приведенные ширины через „наблюдаемые“ парциальные ширины с помощью обычного соотношения

$$\Gamma_{\lambda c}^0 = 2P_c (\gamma_{\lambda c}^0)^2. \quad (3.5)$$

Тогда из (3.3) находим

$$(\gamma_{\lambda c}^0)^2 = \frac{\gamma_{\lambda c}^2}{1 + \sum_c \gamma_{\lambda c}^2 (dS_c/dE)}. \quad (3.6)$$

Величины $(\gamma_{\lambda c}^0)^2$, которые получаются путем деления наблюдаемых парциальных ширин на удвоенный коэффициент проницаемости, могут быть названы „наблюдаемыми“ парциальными приведенными ширинами. Из данных о резонансах нельзя, вообще говоря, определить $(\gamma_{\lambda c}^0)^2$ для каналов, отвечающих отрицательным энергиям. Поэтому сумму в знаменателе выражения (3.6) удобно разделить на две части:

$$\sum_c \gamma_{\lambda c}^2 \frac{dS_c}{dE} = N + \sum_{c^+} \gamma_{\lambda c}^2 \frac{dS_c}{dE}, \quad (3.7)$$

где

$$N = \sum_{c^-} \gamma_{\lambda c}^2 \frac{dS_c}{dE}. \quad (3.8)$$

Дополнительное обозначение каналов индексами „+“ или „-“ указывает, что канал соответствует положительной или отрицательной энергии относительного движения. Подставляя (3.7) в соотношение (3.6), находим, что

$$\frac{\gamma_{\lambda c}^2}{(\gamma_{\lambda c}^0)^2} = \frac{1 + N}{1 - \sum_{c^+} \gamma_{\lambda c}^2 (dS_c/dE)}. \quad (3.9)$$

В приложениях было найдено, что производная dS_c/dE положительна, так что отношение (3.9) больше $(1 + N)$. Поскольку $(\gamma_{\lambda c}^0)^2$ положительно, должно удовлетворяться следующее неравенство:

$$\sum_{c^+} (\gamma_{\lambda c}^0)^2 \left(\frac{dS_c}{dE} \right)_{E=E_T} < 1. \quad (3.10)$$

Если разбиение (3.7) не сделано, то $N = 0$ и сумма в неравенстве (3.10) и в знаменателе правой части соотношения (3.9) должна включать каналы, соответствующие как положительной, так и отрицательной энергии. Из результатов, которые даны в Приложении, следует, что N представляет собой объемный интеграл плотности вероятности, взятый по той части внешней области, в которой расположены каналы, соответствующие отрицательной энергии, причем интеграл по внутренней области нормирован на единицу. За исключением случая, когда новый канал, соответствующий положительной энергии, расположен вблизи порога, можно ожидать, что величина N будет мала по сравнению с единицей; однако, как только достигается порог для s -нейтронов, N становится бесконечно большим, поскольку бесконечно большим становится интеграл вероятности, взятый по внешней области.

Можно сделать несколько качественных замечаний о различии между „наблюдаемой“ шириной $\Gamma_{\lambda c}^0$ и „формальной“ шириной $\Gamma_{\lambda c}$. Согласно соотношению (3.6), различие между этими величинами может быть велико, если велики $\gamma_{\lambda c}^2$. В этом случае волновые функции, отвечающие каналу c , будут велики во внешней области при условии, что они не слишком быстро ослабляются барьером. Поскольку быстрота ослабления волновой функции во внешней области обратно пропорциональна dS_c/dE (см. Приложение), различие „наблюдаемой“ и „формальной“ ширин является следствием

относительной протяженности волновой функции во внешней области и вытекающей из этого неопределенности размеров реальной ядерной системы. Можно ожидать, что различие будет большим, когда барьер невысок, но простирается на большие расстояния от поверхности ядра. Поэтому можно думать, что оно должно возрасти с уменьшением l_c и должно быть наиболее существенным в случае слабого кулоновского барьера. Например, в случае α -распада разница между $\Gamma_{\lambda c}^0$ и $\Gamma_{\lambda c}$ мала (меньше нескольких процентов), так как сразу же за ядерной поверхностью волновая функция очень быстро убывает. Это открывает возможность определения реальных размеров ядерной системы с большей степенью надежности. Другие примеры приведены в работах Брейта с сотрудниками [119—122].

Имеется важное исключение, которое необходимо учитывать в дальнейшем рассмотрении. Казалось бы, что в случае канала, отвечающего s -нейтронам, различие между наблюдаемой и формальной ширинами будет наиболее резко выраженным, так как в этом случае волновая функция совершенно беспрепятственно простирается во внешнюю область. Однако для таких каналов $dS_c/dE = 0$, так что никакого различия между $\Gamma_{\lambda c}$ и $\Gamma_{\lambda c}^0$ не может быть (во всяком случае, в рассматриваемом приближении, в котором вкладом других уровней пренебрегается). (См. также замечания, сделанные в § 1 при обсуждении „третьего приближения“.)

Наконец, введем понятие „безразмерной приведенной ширины“ $\theta_{\lambda c}^2$. Эта величина определяется как отношение приведенной ширины $\gamma_{\lambda c}^2$ к $(\hbar^2/M_c a_c^2)$:

$$(\theta_{\lambda c}^0)^2 = \left(\frac{\hbar^2}{M_c a_c^2} \right)^{-1} \gamma_{\lambda c}^2. \quad (3.11)$$

Аналогично, безразмерная ширина, соответствующая *наблюдаемой* приведенной ширине, будет

$$(\theta_{\lambda c}^0)^2 = \left(\frac{\hbar^2}{M_c a_c^2} \right)^{-1} (\gamma_{\lambda c}^0)^2. \quad (3.12)$$

На основании обсуждения в § 4 гл. XI можно полагать, что $\theta_{\lambda c}^2$ подчиняются следующему правилу:

$$\sum_{\lambda} \theta_{\lambda c}^2 \sim 1, \quad (3.13)$$

где суммирование производится по всем уровням λ в интервале, равном расстоянию между одночастичными уровнями. Правило (3.10) может быть записано для сравнения в виде

$$\sum_{c^+} (\theta_{\lambda c}^0)^2 \left[\frac{dS_c}{dE} \frac{\hbar^2}{M_c a_c^2} \right] < 1. \quad (3.14)$$

Поправка к приведенной ширине данного канала (просуммированной по всем спинам канала), обусловленная изменением парциальных сдвигов уровня *только для рассматриваемого канала*, равна, как следует из (3.6),

$$\left[\sum_s (\theta_{\lambda c}^0)^2 \right]^{-1} - \left(\sum_s \theta_{\lambda c}^2 \right)^{-1} = \frac{dS_c}{dE} \frac{\hbar^2}{M_c a_c^2}. \quad (3.15)$$

Величина $(dS_c/dE)(\hbar^2/M_c a_c^2)$ не превышает единицы (см. Приложение). Например, для l -нейтронов ($l \neq 0$) эта величина [равная в случае нейтронов $2(dS_c/d\rho_c^2)$] не превышает $2/(2l-1)$, причем это значение достигается при нулевой энергии. Если $2(dS_c/d\rho_c^2)$ принять равным единице, то указанные поправки к исправленным приведенным ширинам будут равны неисправленным значениям этих величин. Поскольку погрешности другого рода препятствуют определению значений приведенных ширин с точностью выше 10%, можно утверждать, что внесение поправок существенно только тогда, когда неисправленное значение $\sum_s (\theta_{\lambda c}^0)^2 \gtrsim 0,1$.

*б. Второй приближенный метод:
линейное приближение для зависимости величины
 $\Delta_\lambda - (l/2)\Gamma_\lambda$ от энергии*

Приближенные результаты, полученные при представлении величины $\Delta_\lambda - 1/2 i\Gamma_\lambda$ в знаменателе резонансной амплитуды в виде линейной функции энергии, имеют несколько более ясную физическую интерпретацию по сравнению с предыдущим приближением, когда от энергии зависело только Δ_λ . Однако это приближение с практической точки зрения оказывается менее удобным. Хотя в области барьера представление ширины в виде линейной функции энергии весьма не точно, во многих практических случаях оно оказывается вполне удовлетворительным, так как член в знаменателе, содержащий

ширину, существен лишь в непосредственной близости от резонанса; парциальные же ширины в числителе должны всегда рассматриваться точно.

Величина ε_λ в соотношении (1.7) разлагается с точностью до членов первого порядка в ряд по энергии вблизи вещественной энергии E_0 , удовлетворяющей соотношению

$$E_\lambda + \Delta_\lambda(E_0) - E_0 = 0, \quad (3.16)$$

так что

$$\varepsilon_\lambda \approx E_\lambda - E - \xi_\lambda(E_0) - (E - E_0) \left(\frac{d\xi_\lambda}{dE} \right)_{E=E_0}, \quad (3.17)$$

где

$$\xi_\lambda = -\Delta_\lambda + \frac{1}{2} i\Gamma_\lambda.$$

Подставляя (3.16) в соотношение (3.17), получаем в конечном счете

$$\varepsilon_\lambda = \left[1 + \left(\frac{d\xi_\lambda}{dE} \right)_{E=E_0} \right] \left[E_r - E - \frac{1}{2} i\Gamma_\lambda^+ \right], \quad (3.18)$$

где

$$E_r = E_0 - \frac{1}{2} \Gamma_\lambda(E_0) \frac{\text{Im}(d\xi_\lambda/dE)}{[1 + \text{Re}(d\xi_\lambda/dE)]^2 + [\text{Im}(d\xi_\lambda/dE)]^2} \quad (3.19)$$

представляет собой резонансную энергию, а

$$\Gamma_\lambda^+ = \sum_c \Gamma_{\lambda c}^+,$$

$$\frac{\Gamma_{\lambda c}^+}{\Gamma_{\lambda c}} = \left[1 + \text{Re} \frac{d\xi_\lambda}{dE} \right] / \left[\left(1 + \text{Re} \frac{d\xi_\lambda}{dE} \right)^2 + \left(\text{Im} \frac{d\xi_\lambda}{dE} \right)^2 \right]. \quad (3.20)$$

В этом случае можно считать, что резонансный вклад в сечение пропорционален

$$\frac{\Gamma_{\lambda c}^* \Gamma_{\lambda c}^*}{(E_r - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^{+2}}, \quad (3.21)$$

где

$$\Gamma_{\lambda c}^* = 2P_c |\omega_{\lambda c}|^2,$$

$$\omega_{\lambda c} = \frac{\gamma_{\lambda c}}{\{[1 + \text{Re}(d\xi_\lambda/dE)]^2 + [\text{Im}(d\xi_\lambda/dE)]^2\}^{1/2}} \times$$

$$\times \exp \frac{1}{2} i \left\{ \arctg \left(\frac{\text{Im}(d\xi_\lambda/dE)}{1 + \text{Re}(d\xi_\lambda/dE)} \right) \right\}.$$

В общем случае полная ширина Γ_λ^+ в знаменателе меньше, чем сумма парциальных ширин $\Gamma_{\lambda c}^*$ в числителе в соответствии с неравенством (IX. 2.14). Во многих практических случаях $\text{Im}(d\xi_\lambda/dE)$ мала и это различие также мало.

Результаты этого приближения отличаются от предыдущих только тем, что в данном случае ширины в (3.20) и (3.21) зависят от $\text{Im}(d\xi_\lambda/dE)$. Величина $\omega_{\lambda c}$ в выражении (3.21) соответствует такой же величине в выражении (IX. 2.4), а „перенормировочный“ множитель $[1 + (d\xi_\lambda/dE)]^{-1/2}$ и (3.21) — вкладу члена (dL/dE) в условии нормировки (IX. 2.30). Как упоминалось в § 2 гл. IX, этот вклад пропорционален объемному интегралу по внешним каналам от комплексной собственной функции с энергией $H_\lambda = E_r - 1/2 i\Gamma_\lambda^+$.

в. Смещение уровней в зеркальных ядрах

Сделаем некоторые замечания о положениях соответственных уровней в зеркальных ядрах. Как известно, различные пары подобных уровней по-разному смещены относительно друг друга. Если спектры двух зеркальных ядер, например C^{13} и N^{13} , изобразить двумя диаграммами, расположенными так, чтобы основные состояния лежали на одной и той же горизонтальной линии, то некоторые пары возбужденных состояний будут смещены относительно друг друга лишь на несколько килоэлектронвольт или величину такого порядка, в то время как другие состояния смещаются по энергии на величину порядка сотен килоэлектронвольт. Максимальное смещение обнаружено у первых возбужденных состояний C^{13} и N^{13} ; оно достигает свыше 700 кэв.

Эрман [125] и Томас [126] показали, что это смещение может быть качественно объяснено на основе разных граничных условий на входе каналов, отвечающих разделению C^{13} на $C^{12} + n$ и разделению N^{13} на $C^{12} + p$. Снова возвращаясь к (3.1), имеем

$$E_\lambda + [B - S(E)] \gamma_\lambda^2 - E = 0. \quad (3.22)$$

Здесь мы приняли, что единственным каналом, дающим вклад в Δ_λ , является канал, отвечающий разделению на C^{12} (в основном состоянии), и нуклон. Поскольку $S(E)$ зависит от того, является этот нуклон протоном или нейтроном, решения $E = E_r$

этого уравнения будут отличаться в этих двух случаях. Обозначая через N и P случаи, когда испускается нейтрон или соответственно протон, и выбирая для обоих этих случаев одну и ту же величину B , имеем

$$E_{rN} - E_{rP} = (E_{\lambda N} - E_{\lambda P}) + [S_P(E_{rP}) - S_N(E_{rN})] \gamma_\lambda^2, \quad (3.23)$$

где величина γ_λ^2 в обоих случаях выбрана одинаковой. Это будет иметь место, если можно считать, что две внутренние волновые функции X_λ не отличаются друг от друга. Чтобы найти разницу в смещениях первых возбужденных и основных состояний, следует взять разность между величинами $E_{rN} - E_{rP}$, вычисленную для двух наборов состояний. Если принять, что разность внутренних кулоновских энергий $E_{\lambda N} - E_{\lambda P}$ для первых возбужденных состояний зеркальных ядер такова же, что и для их основных состояний, то разность смещений первых возбужденных состояний (относительно основных) будет равна разнице в значениях величины

$$[S_P(E_{rP}) - S_N(E_{rN})] \gamma_\lambda^2, \quad (3.24)$$

вычисленной для двух пар состояний: $\lambda = 0$ и 1 .

Численные расчеты показывают, что в этой разности член, отвечающий возбужденным состояниям, является преобладающим. Это обусловлено самой природой величины S , энергетическая зависимость которой наиболее сильна при энергиях, близких к пороговой и близких к нулю значениях l . (Энергии возбужденных состояний в первом члене примерно на $2,5$ Мэв ближе к порогу, чем энергии основных состояний во втором; кроме того, для возбужденных состояний $l = 0$, в то время как для основных $l = 1$.) Эрман [125] и Томас [126] нашли, что этот первый член в (3.24), вычисленный для первых возбужденных состояний, качественно соответствует относительному смещению уровней, равному 700 кэв. Неточность обусловлена в основном тем, что величина γ_λ^2 известна лишь с точностью до коэффициента ~ 2 .

§ 4. Приближение двух уровней

В некоторых случаях можно найти экспериментальные примеры, когда в области, в которой уровни, вообще говоря, хорошо разделены, два уровня случайно расположены очень

близко друг к другу. В подобных случаях эти два уровня следует анализировать вместе как некоторую отдельную аномалию. Для этой цели можно пытаться использовать формулу для двух уровней, представляющую собой дополнение к формуле (1.13) для изолированного уровня. Такая формула может быть получена из соотношений (IX. 1.14), (IX. 1.22) и (VIII. 3.2). Для простоты мы примем $\mathbf{R}^0 = 0$, так что \mathbf{R} -матрица будет иметь вид

$$\mathbf{R} = \frac{\gamma_1 \times \gamma_1}{E_1 - E} + \frac{\gamma_2 \times \gamma_2}{E_2 - E}. \quad (4.1)$$

После некоторых алгебраических выкладок приходим к требуемой формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi g_J}{k_\alpha^2} \sum_{s l s' l'} \left\{ [(\bar{E}_2 - E) \Gamma_{1c}^{1/2} \Gamma_{1c'}^{1/2} + (\bar{E}_1 - E) \Gamma_{2c}^{1/2} \Gamma_{2c'}^{1/2} - \right. \\ \left. - \Delta_{12} (\Gamma_{1c}^{1/2} \Gamma_{2c'}^{1/2} + \Gamma_{2c}^{1/2} \Gamma_{1c'}^{1/2})]^2 + \frac{1}{4} \left[\sum_{c''} \Pi_{c''c} \Pi_{c''c'} \right]^2 \right\} \times \\ \times \left\{ [(\bar{E}_1 - E)(\bar{E}_2 - E) + \frac{1}{4} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_1 \Gamma_2) - \Delta_{12}^2]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [\Gamma_1 (\bar{E}_2 - E) + \Gamma_2 (\bar{E}_1 - E) - 2\Delta_{12} \Gamma_{12}]^2 \right\}^{-1}, \quad (4.2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{c''c} &= \Gamma_{1c''}^{1/2} \Gamma_{2c}^{1/2} - \Gamma_{2c''}^{1/2} \Gamma_{1c}^{1/2}, \quad \Gamma_1 \equiv \Gamma_{11}, \\ \bar{E}_1 &= E_1 + \Delta_1, \\ \Gamma_{12} &= \sum_{c''} 2P_{c''} \gamma_{1c''} \gamma_{2c''}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выбрав граничные условия $B_c = S_c$ и допустив, что S_c достаточно постоянна в интересующем нас энергетическом интервале (так что $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_{12} = 0$), формулу (4.2) можно упростить. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi g_J}{k_\alpha^2} \sum_{s l s' l'} \left\{ [(E_2 - E) \Gamma_{1c}^{1/2} \Gamma_{2c'}^{1/2} + (E_1 - E) \Gamma_{2c}^{1/2} \Gamma_{1c'}^{1/2}]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[\sum_{c''} \Pi_{c''c} \Pi_{c''c'} \right]^2 \right\} \cdot \left\{ (E_1 - E)(E_2 - E) + \frac{1}{4} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_1 \Gamma_2) \right\}^2 + \\ + \frac{1}{4} [\Gamma_1 (E_2 - E) + \Gamma_2 (E_1 - E)]^2 \Big\}^{-1}. \quad (4.4) \end{aligned}$$

В тех специальных случаях, когда имеются только 2 канала, второй член в числителе равен нулю. Из рассмотрения оставшегося члена становится ясным, что $\sigma_{\alpha\alpha'}$ обращается в нуль между резонансами тогда и только тогда, когда $\gamma_{1c}\gamma_{1c'}$ и $\gamma_{2c}\gamma_{2c'}$ имеют одинаковые знаки. В общем случае, когда реакция может идти через большое число каналов, второй член в числителе приводит к тому, что $\sigma_{\alpha\alpha'}$ нигде не обращается в нуль. Эти выводы находятся в согласии с заключениями, сделанными из общих соображений в § 3 гл. VII.

§ 5. Интерференция между изолированными уровнями

а. Минимумы сечения между резонансами

В предыдущих параграфах было показано, что в приближении изолированного уровня хорошо описывается поведение сечения вблизи максимумов, когда $\Gamma/D \ll 1$. Как было показано Тейхманом [67, 68], в этом же случае можно также сделать оценки величины и поведения сечения в области минимумов между резонансами. В отличие от максимумов эти минимумы сечений могут различаться по величине на некоторую степень Γ/D , и поэтому оценки могут иметь лишь качественный характер.

Эти оценки могут быть сделаны с помощью разложения в степенной ряд в окрестности минимума матрицы $(1 - \mathbf{R}\mathbf{L}^0)^{-1}$ или, что эквивалентно, матрицы $(\mathbf{L}^0)^{-1/2}(1 - \mathbf{L}^{0/2}\mathbf{R}\mathbf{L}^{0/2})^{-1}(\mathbf{L}^0)^{1/2}$. Достаточным условием допустимости такого разложения является требование, чтобы норма

$$\|\mathbf{L}^{0/2}\mathbf{R}\mathbf{L}^{0/2}\| = \sum_{cc'} |L_c^{0/2}R_{cc'}L_c^{0/2}|^2 \quad (5.1)$$

была меньше единицы. Чем меньше величина этой нормы по сравнению с единицей, тем более пригодно указанное разложение. Это условие выполняется наиболее удовлетворительно в том случае, когда параметры в граничных условиях B_c выбраны равными факторам сдвига S_c ; в этом случае $L_c = iP_c$. Тогда в области между резонансами можно произвести оценку порядка величины элементов матрицы \mathbf{R} , которые оказываются $\sim \langle \gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'} \rangle / D$, хотя вполне возможно, что некоторые, как

недиагональные, так и диагональные, элементы могут в этой области обратиться в нуль. (С другой стороны, как подчеркивается в § 6 гл. XI, совокупный вклад далеко отстоящих уровней в $R_{cc'}$ может быть существенным. Следуя Тейхману [67, 68], мы пренебрежем этой возможностью, не оправдывая это какими-либо соображениями.) Если при указанных условиях считать, что знаки $\gamma_{\lambda c}$ могут с равной вероятностью быть как отрицательными, так и положительными, их величины не зависят от λ и все уровни отстоят друг от друга на расстоянии D , то можно показать, что величина $R_{cc'}^2$, усредненная по всем возможным наборам знаков $\gamma_{\lambda c}$, равна

$$\langle R_{cc'}^2 \rangle_{\pm} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2}{(E_{\lambda} - E)^2} \approx \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 \left(\frac{\pi}{D} \right)^2.$$

Точно так же можно показать, что если знаки $\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}$ являются либо только положительными, либо только отрицательными, величина $R_{cc'}$ умножается на некоторый численный множитель порядка π . Ввиду того факта, что некоторые элементы $R_{cc'}$ могут обратиться в нуль, представляется разумным принять, что

$$\|L^{0^{1/2}} R L^{0^{1/2}}\| \leq \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 \sum_{cc'} P_c P_{c'} \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 = \left(\frac{\pi \Gamma}{2D} \right)^2, \quad (5.2)$$

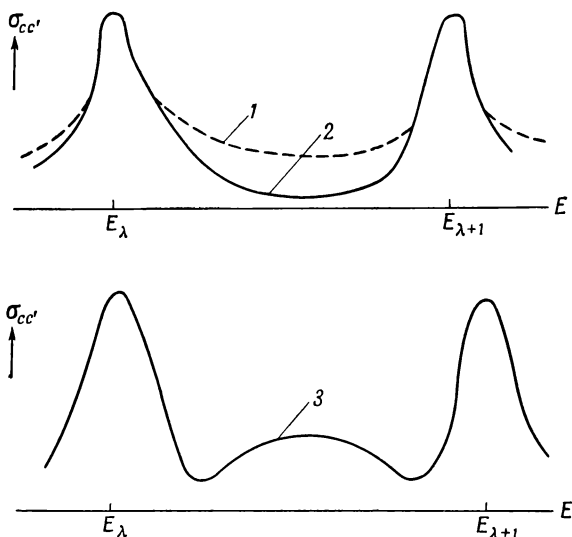
где Γ и D — соответственно средняя полная ширина уровней и среднее расстояние между ними. Поэтому последующее рассмотрение будет достаточно правомочным при условии, что $\Gamma \ll D$.

Разложение в степенной ряд для недиагональных элементов матрицы столкновений, определяющих сечение реакции, имеет вид

$$W_{cc'} = 2t P_c^{1/2} \left[R_{cc'} + \sum_{c''} R_{cc''} L_{c''}^0 R_{c''c'} + \dots \right] P_{c'}^{1/2}. \quad (5.3)$$

При рассмотрении этого разложения необходимо различать три возможности (см. фиг. 3): 1) $R_{cc'}$ имеет экстремум между резонансами, но не проходит через нуль; 2) $R_{cc'}$ обращается в нуль между резонансами, но не имеет экстремума; 3) $R_{cc'}$ между резонансами дважды обращается в нуль и имеет экстремум между этими нулями. В этом последнем, несколько необычном случае сечение реакции имеет между резонансами

два минимума и один максимум, который сам по себе не является резонансом. Для того чтобы в области между резонансами при E_λ и $E_{\lambda+1}$ имела место первая из указанных возможностей, необходимо, чтобы произведения $\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}$ и $\gamma_{\lambda+1, c} \gamma_{\lambda+1, c'}$ имели противоположные знаки. Тогда для оценки величины и формы минимума достаточно рассмотреть лишь первый член разложения (5.3).



Фиг. 3. Различные типы поведения сечений в области между резонансами.

Третья возможность есть частный случай первой возможности. Она может иметь место тогда, когда вклад в $R_{cc'}$ от совокупности всех других уровней по обе стороны от рассматриваемых имеет тот же знак, что и $\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}$, и величину достаточную для того, чтобы компенсировать вклад от уровней λ и $\lambda + 1$. Экстремум $R_{cc'}$, имеющий место между энергиями, при которых $R_{cc'}$ обращается в нуль, приводит к той же самой формуле сечения в минимуме, как и в случае $R_{cc'} \neq 0$. Когда Γ/D мало, для осуществления такой возможности требуется, по-видимому, anomalно высокое значе-

ние $\gamma_{\mu c}^2$ для ближайшего уровня или довольно резкое уменьшение расстояния между уровнями.

Для того чтобы имела место вторая возможность, необходимо, чтобы произведения $\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}$ и $\gamma_{\lambda+1, c} \gamma_{\lambda+1, c'}$ имели одинаковый знак. Поведение сечения в области минимума в этом случае зависит главным образом от второго члена в разложении (5.3).

Минимумы типа „1“. Если $R_{cc'} \neq 0$ в окрестности минимума, то элемент cc' матрицы столкновений может быть приближенно представлен в форме:

$$|W_{cc'}|^2 \approx 4P_c P_{c'} \left[R_{cc'}^{(\text{мин.})} + (E - E_{\text{мин.}})^2 \left(\frac{d^2}{dE^2} \right) (R_{cc'}^{(\text{мин.})}) \right]^2 \approx \\ \approx 4P_c P_{c'} \left[(R_{cc'}^{(\text{мин.})})^2 + 2R_{cc'}^{(\text{мин.})} (E - E_{\text{мин.}})^2 \left(\frac{d^2}{dE^2} \right) (R_{cc'}^{(\text{мин.})}) \right]. \quad (5.4)$$

Очевидно, что в минимуме сечение имеет параболическую форму. Согласно произведенной выше оценке, $(R_{cc'})^2 = \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 (\pi/D)$. Аналогично, можно произвести оценку второго члена в соотношении (5.4):

$$R_{cc'}^{(\text{мин.})} \frac{d^2}{dE^2} (R_{cc'}) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E} \sum_{\mu} \frac{\gamma_{\mu c} \gamma_{\mu c'}}{(E_{\mu} - E)^3} \approx \\ \approx \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 \sum_{\lambda} (E_{\lambda} - E)^{-4} \approx \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 \left(\frac{32}{D^4} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-4} = \\ = \frac{1}{3} \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 \left(\frac{\pi}{D} \right)^4, \quad (5.5)$$

и, следовательно,

$$|W_{cc'}|^2 \approx \Gamma_{\lambda c} \Gamma_{\lambda c'} \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 (E - E_{\text{мин.}})^2 \right]. \quad (5.6)$$

Отношение сечения в минимуме к сечению в максимуме (в резонансе) равно

$$\frac{\sigma_{cc'}^{(\text{мин.})}}{\sigma_{cc'}^{(\text{макс.})}} \approx \left(\frac{\pi \Gamma}{2D} \right)^2. \quad (5.7)$$

Если ширину W минимума определить как интервал между энергиями, при которых $\sigma_{cc'}$ превосходит $\sigma_{cc'}^{(\text{мин.})}$ в четыре раза, то из (5.4) следует, что

$$W \approx 1,4D.$$

Минимумы типа „2“. Когда в окрестности минимума $R_{cc'} = 0$, квадрат модуля элемента cc' матрицы столкновений приближенно может быть представлен в виде

$$|W_{cc'}|^2 \approx 4P_c P_{c'} \left[\left(\frac{dR_{cc'}}{dE} \right)^2 (E - E_{\text{мин.}}) + (Q_{cc'})^2 \right], \quad (5.8)$$

где

$$Q_{cc'} = \sum_{c''} R_{cc''} P_{c''} R_{c''c'} = \sum_{c''} \sum_{\lambda\mu} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c''}}{E_\lambda - E} P_{c''} \frac{\gamma_{\mu c''} \gamma_{\mu c'}}{E_\mu - E},$$

так как первый член в разложении (5.3) вещественный, в то время как второй член — мнимый. Произведем теперь оценку величины $Q_{cc'}$. Сумма по каналам c оказывается по порядку величины равна $1/2 \Gamma$ или меньше. Как и выше, суммы по λ и μ можно принять равными $\langle \gamma_{\lambda c} \rangle (\pi/D)$ и $\langle \gamma_{\mu c'} \rangle (\pi/D)$ соответственно; следовательно,

$$Q_{cc'} \leq \frac{1}{4} \langle \gamma_{\lambda c}^2 \gamma_{\lambda c'}^2 \rangle \Gamma \left(\frac{\pi}{D} \right)^2.$$

Подставляя эту сумму в (5.8), получаем

$$|W_{cc'}|^2 \leq \Gamma_{\lambda c} \Gamma_{\lambda c'} \left(\frac{\pi}{D} \right)^4 \left[(E - E_{\text{мин.}})^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \right]. \quad (5.9)$$

Отношение сечения в минимуме к сечению в резонансном максимуме будет, очевидно, равно

$$\frac{\sigma_{cc'}^{(\text{мин.})}}{\sigma_{cc'}^{(\text{макс.})}} \approx \left(\frac{\pi \Gamma}{2D} \right)^4, \quad (5.10)$$

т. е. зависит от Γ/D на два порядка сильнее, чем в предыдущем случае. Ширина параболического минимума равна

$$W \sim \Gamma. \quad (5.11)$$

6. Матрица столкновений для областей, содержащих изолированные уровни

Когда $\Gamma/D \ll 1$, матрицу U можно приближенно представить в виде ряда по уровням системы. Форма такого разложения была впервые указана Бете [1]. Недавно Вигнер [16, 17] вывел это разложение более строго на основе R -матричной теории.

Если ширины малы и использованы хорошие граничные условия, то элементы матрицы ξ в (IX. 1.9) также будут малы. В этом случае можно попытаться разложить матрицу $\mathbf{A} = (\epsilon - \xi')^{-1}$ в ряд по степеням диагональной части матрицы $\epsilon = \mathbf{e} - \mathbf{E} - \xi + \xi'$, элементами которой являются $\epsilon_\lambda = E_\lambda - E - 1/2 i\Gamma$; здесь ξ' представляет собой недиагональную часть матрицы ξ . Таким образом,

$$\mathbf{A} = \epsilon^{-1} + \epsilon^{-1}\xi'\epsilon^{-1} + \dots, \quad (5.12)$$

и, следовательно, согласно (IX, 1.13),

$$(\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R} = \sum_{\lambda} (\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}) \epsilon_{\lambda}^{-1} + \sum_{\lambda, \mu} \epsilon_{\lambda}^{-1} (\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\mu}) \xi'_{\lambda\mu} \epsilon_{\mu}^{-1} + \dots \quad (5.13)$$

Элементами этой матрицы являются

$$\begin{aligned} [(1 - \mathbf{R}\mathbf{L}^0)^{-1} \mathbf{R}]_{cc'} &= \sum_{\lambda} \left(\frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{\epsilon_{\lambda}} \right) + i \sum_{c''} P_{c''} \sum_{\lambda} \left(\frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c''}}{\epsilon_{\lambda}} \right) \times \\ &\times \sum_{\mu (\neq \lambda)} \left(\frac{\gamma_{\mu c''} \gamma_{\mu c'}}{\epsilon_{\mu}} \right). \end{aligned} \quad (5.13a)$$

Элементы $|\xi_{\lambda\mu}| < \sum_{c''} P_{c''} |\gamma_{\lambda c''} \gamma_{\mu c''}|$ меньше или порядка $1/2 \Gamma$.

Если некоторое определенное состояние λ близко к резонансу, то члены суммы по μ не удовлетворяют этому условию и величина суммы равна, как показывает оценка, $\langle \gamma_{\mu c'} \rangle / (\pi/D)$. С другой стороны, если к резонансу близок один из членов суммы по μ , то указанному выше условию не удовлетворяют члены суммы по λ и, точно так же, как и выше, величина этой суммы оказывается равной $\langle \gamma_{\lambda c} \rangle / (\pi/D)$. Отсюда ясно, что если $\Gamma/D \ll 1$, то в (5.13) можно пренебречь членами второго и более высоких порядков, так что в приближенном выражении для W остается только первая сумма:

$$\mathbf{W} = \mathbf{1} + 2i\mathbf{P}^{1/2} \left[\sum_{\lambda} \frac{(\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda})}{\epsilon_{\lambda}} \right] \mathbf{P}^{1/2}. \quad (5.14)$$

Хотя (5.14) имеет ту же форму, что и более правильное выражение (IX. 2.5), входящие в него величины $\gamma_{\lambda c}$ являются вещественными и мнимые части знаменателей $1/2 \Gamma_{\lambda}$ удовлетворяют условию (IX. 2.14) в крайнем случае равенства. Если Γ_{λ} по порядку величины равно или больше энергетических

интервалов между резонансами, (5.14) может стать весьма неточным. Тем не менее, если можно считать, что знаки $\gamma_{\lambda c}$ могут быть равновероятно как положительными, так и отрицательными, то, как было показано в § 2 гл. XI, выражения (5.13) и (5.14) будут справедливы и для сравнительно больших значений Γ/D , если только все величины $\langle 2\pi\Gamma_{\lambda c}/D \rangle$ много меньше единицы.

Из (VIII. 3.3) следует, что сечение реакции, соответствующее (5.14), равно

$$\sigma_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_{J S_1 S_1' I'} g_J \left| \sum_{\lambda} \frac{\Gamma_{\lambda c}^{1/2} \Gamma_{\lambda c'}^{1/2}}{E_{\lambda} + \Delta_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda}} \right|^2, \quad (5.15)$$

где суммирование по λ означает суммирование по уровням с данным спином J и данной четностью. Как видно из этой формулы, в случае, если знаки $\gamma_{\lambda c'}$ распределены случайно по отношению к c' , интерференционные члены в сечении будут очень малы, так как они описываются суммой по большому числу каналов.

По этой причине, например, экспериментальные сечения захвата медленных нейтронов могут быть представлены в виде суперпозиции резонансных членов Брейта — Вигнера без учета интерференции. (При радиационном захвате нейтронов составное состояние может распадаться через несколько сотен различных фотонных каналов.) Совершенно другое положение имеет место в случае сечения деления, в котором проявляются эффекты сильной интерференции отдельных уровней. Это находится в соответствии со сделанным в работе [76] предположением о том, что в процессе деления участвует всего лишь 2 или 3 канала.

Глава XIII

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Настоящая глава посвящена различным специальным вопросам. Будут обсуждены фотонные процессы и распад составного ядра на три части, что позволит частично снять ограничения, налагавшиеся на теорию до сих пор.

§ 1. Поведение сечения вблизи порога

Хотя большинство изложенных ниже результатов, касающихся поведения сечений вблизи порога, было известно уже довольно давно, со времени введения борновского приближения в теорию ядра, строгий вывод этих известных результатов, не оставляющий никаких сомнений в их правильности, был дан лишь сравнительно недавно в работе Вигнера [127] (см. также [128]). Вывод, предложенный Вигнером, идет несколько дальше, чем предыдущие; так, например, он позволил выявить пики вблизи порога в сечениях реакций и рассеяния¹⁾. В этом выводе не используется приближение изолированного уровня, однако он исходит из требования, чтобы интервал изменения энергии возбуждения рассматриваемого составного ядра был много меньше расстояния до следующего уровня. Предполагается также, что вообще $\rho \ll 1$, а в случае заряженных частиц выполняется, кроме того, условие $\eta \gg 1$.

Как следует из (VII. 1.6), типичный недиагональный элемент может быть записан в следующем виде:

$$W_{cc'} = 2i [P_c^{1/2} (L_c^0)^{-1}] \left\{ [(L^0)^{-1} - \mathbf{R}]^{-1} \right\}_{cc'} [P_{c'}^{1/2} (L_{c'}^0)^{-1}]. \quad (1.1)$$

¹⁾ См. также А. Базь, Доклад на конференции по ядерным реакциям при малых энергиях, Москва, 1957. — *Прим. ред.*

Вблизи порога одного из каналов s или s' энергетическая зависимость сечения определяется, по существу, величиной $P_c |L_c^0|^{-2}$ или $P_{c'} |L_{c'}^0|^{-2}$ соответственно. Используя введенные в гл. III кулоновские волновые функции и опуская индекс s , будем иметь

$$P^{-1} |L^0|^2 = \frac{1}{P} \{P^2 + (B - S)^2\} = \\ = \frac{F^2 + G^2}{\rho} \left\{ \left(\frac{\rho}{F^2 + G^2} \right)^2 + \left(B - \rho \frac{FF' + GG'}{F^2 + G^2} \right)^2 \right\}. \quad (1.2)$$

При энергиях, близких к порогу канала s , и при $l \neq 0$ выполняются неравенства: $F \ll G$, $F' \ll G'$ и $G \gg 1$; тогда

$$P^{-1} |L^0|^2 = \frac{1}{\rho} [GB - \rho G']^2. \quad (1.3)$$

Если кулоновский барьер отсутствует, то для G и G' можно использовать предельные выражения, справедливые при очень низких энергиях (т. е. в данном случае при $\rho \ll 1$):

$$G_l = \frac{(2l-1)!!}{\rho^l}, \quad G'_l = \frac{-l(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}, \quad (1.4)$$

так что, используя эти выражения, получаем

$$P |L^0|^{-2} = \rho^{l+1} [(B+l)(2l-1)!!]^{-2}. \quad (1.5)$$

Случай $l=0$ является исключительным, так как при этом значении l никакого барьера не существует. Поскольку при $l=0$ $P=\rho$ и $S=0$, из (1.2) следует, что в этом случае

$$P |L^0|^2 = \frac{\rho}{\rho^2 + B^2}. \quad (1.6)$$

Если имеется кулоновский барьер, то предельные выражения для случая низких энергий имеют вид (см. Приложение):

$$G_l = \left(\frac{4\rho}{\pi} \right)^{1/2} e^{\pi\eta} K_{2l+1}(\beta), \\ G'_l = - \left(\frac{1}{\pi\rho} \right)^{1/2} e^{\pi\eta} \{ \beta K_{2l}(\beta) + 2l K_{2l+1}(\beta) \}, \quad (1.7)$$

где $\beta = (8\rho\eta)^{1/2}$, а $K_x(\beta)$ — функции Бесселя 2-го рода. [Мы следуем Вигнеру [127] и используем функции K , отличающиеся от функций K , определенных Ватсоном, множителем $(-1)^{2l+1}$.] Произведение $\rho\eta$ не зависит от энергии, так что β

остаётся конечным при $E \rightarrow 0$. Как следует из (1.3), в этом случае

$$P |L^0|^{-2} = \pi \rho e^{-2\pi\eta} [2\rho^{1/2} (B + D) K_{2l+1}(\beta) + \rho^{1/2} B K_{2l}(\beta)]. \quad (1.8)$$

В области энергий вблизи порога величина $[(L^0)^{-1} - R]$ в выражении (1.1) для матрицы столкновений является, по существу, постоянной для всех каналов, кроме того, порог которого рассматривается. Для этого канала мнимая часть $(L^0)^{-1}$ очень мала, а вещественная часть конечна и существенно постоянна. Следовательно, в первом приближении величину $[(L^0)^{-1} - R]^{-1}$ можно считать постоянной, так что энергетическая зависимость сечения реакции вблизи порога определяется главным образом членом $P_c |L_c^0|^{-2}$. Сечение образования новых частиц типа α' с отрицательной энергией реакции (величина Q) будет вести себя как

$$\sigma \sim k_{\alpha'}^{2l+1} \quad \text{при } \eta = 0$$

и

$$\sigma \sim e^{-2\pi\eta_{\alpha'}} \quad \text{при } \eta > 0.$$

Если энергия реакции (Q) положительна, зависимость сечения реакции от энергии бомбардирующих частиц α при малых значениях E_α имеет вид

$$\sigma \sim k_\alpha^{2l-1} \quad \text{при } \eta = 0$$

и

$$\sigma \sim k_\alpha^{-2} e^{-2\pi\eta_\alpha} \quad \text{при } \eta > 0.$$

Первая из указанных двух зависимостей даёт известный закон $1/v$ для сечения захвата s -нейтронов. Вторая же даёт характерное соотношение, позволяющее экстраполировать сечения для заряженных частиц в область низких энергий бомбардирующих частиц; в этом случае в асимптотическом поведении вследствие наличия кулоновского поля влияние центробежного эффекта совершенно стирается, хотя абсолютное значение сечения в некоторой степени зависит от величины момента количества движения. Мы приходим к известному парадоксу, что в то время как отношения сечений для различных моментов количества движения остаются конечными в случае, когда имеется кулоновское поле, они перестают быть таковыми в отсутствие такого поля.

В следующем приближении рассмотрение поведения сечения вблизи порога реакций с отрицательными энергиями реакции (Q) должно учитывать энергетическую зависимость $[(L^0)^{-1} - R]$. Если вылетающие частицы нового типа не заряжены, то в непосредственной близости от порога они будут испускаться с нулевым моментом; бомбардирующие частицы будут вносить момент, необходимый для сохранения полного момента в реакции, так что для каналов с положительной энергией $L_c^0 = (i\rho_c - B_c)$, а для каналов с отрицательной энергией $L_c^0 = \rho_c - B_c$.

Рассматривая каналы обоих типов вместе, получаем

$$L_c^0 = \left(\frac{-2M_c E_c k_\alpha^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} - B_c.$$

Величина L^0 , рассматриваемая как комплексная функция E , имеет точку ветвления при $E = 0$, благодаря которой энергетическая зависимость различных сечений становится необычной (пик или всплеск типа повернутой на 90° буквы „S“). Если для частиц нового типа имеется барьер, то такая точка ветвления не имеет места.

Эти результаты могут быть проиллюстрированы в частном случае, когда сечение вблизи порога определяется изолированным резонансным уровнем λ . В этом случае, как следует из § 1, а гл. XII,

$$|W_{cc'}|^2 = \frac{\Gamma_{\lambda c} \Gamma_{\lambda c'}}{(E_\lambda + \Delta_\lambda - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2}. \quad (1.9)$$

Энергетическая зависимость вблизи порога [формулы (1.5) и (1.8)] содержится теперь в ширинах, стоящих в числителе, через факторы проницаемости P . Непосредственно над порогом одного из каналов c или c' знаменатель можно считать постоянным по отношению к энергетической зависимости числителя. Однако в случае, когда энергия попадает в область третьего канала c'' , ситуация может оказаться совершенно иной. Числитель является существенно постоянным, однако знаменатель может очень резко меняться благодаря членам $\Delta_{c''}$ и $\Gamma_{\lambda c''}$. Это изменение наиболее сильно проявляется в случае канала, отвечающего s -волне, когда отсутствует барьер. В этом случае, выбрав $B_c = 0$, ниже порога будем иметь

$\Delta_{\lambda c''} = \rho_{c''} \gamma_{\lambda c''}^2$, $\Gamma_{\lambda c''} = 0$, а выше порога $\Gamma_{\lambda c''} = 2\rho_{c''} \gamma_{\lambda c''}^2$, $\Delta_{\lambda c''} = 0$; т. е. при прохождении через порог в энергетической зависимости $\Delta_{\lambda c''}$ и $\Gamma_{\lambda c''}$ действительно имеет место нарушение непрерывности. Это приводит к нарушению непрерывности в производной знаменателя (1.9), благодаря чему в ходе сечения появляется аномалия типа пика или повернутой на 90° буквы „S“. В случае каналов всех других типов нарушения непрерывности $\Delta_{\lambda c''}$ и $\Gamma_{\lambda c''}$ фактически не имеют места; однако при прохождении через область порога они все же могут резко меняться, если значение момента количества движения или барьер невелики.

Полученные результаты относительно поведения сечения вблизи порога для случая распада на две части применимы также и в случае распада на три части, если с достаточной степенью точности можно считать, что последний происходит в две стадии — так, как описано в § 2. Важным примером этого является реакция $(n, 2n)$, при которой вероятность испускания первого нейтрона с энергией E_1 пропорциональна $E_1^{1/2} dE_1$, а вероятность испускания второго нейтрона с энергией E_2 пропорциональна $E_2^{1/2}$, так что

$$\sigma(n, 2n) \sim (E_1 E_2)^{1/2} dE_1.$$

Если полная энергия превышает пороговую на величину $E = E_1 + E_2$, то, проинтегрировав по всему распределению нейтронов, найдем, что $\sigma(n, 2n) \sim E^2$. Эта зависимость была выявлена Сноу [129] более сложным, но более строгим путем. Как подчеркнул Сноу, область, в которой справедлива указанная зависимость, настолько ограничена, что невозможно использовать ее для анализа каких-либо имеющихся в настоящее время данных. Сноу утверждает, что указанная зависимость верна, если энергия E изменяется в интервале, равном наименьшей из двух величин: $D_A/2500$ или $D_{A+1}/100$, где D_A означает среднее расстояние между уровнями исходных ядер A в области порога возбуждения, а D_{A+1} — среднее расстояние между уровнями составного ядра. Поскольку реакции $(n, 2n)$, как правило, имеют место при высоких энергиях возбуждения, допустимые пределы изменения E составляют обычно несколько электронвольт, что много меньше, чем достижимое разрешение в пучке. С другой стороны, статистическая

теория Вайскопфа [4, 6, 36] для этой энергетической зависимости дает выражение, которое справедливо в другом предельном случае, когда область изменения энергии E велика по сравнению с расстояниями между уровнями в составном ядре и в ядре-мишени. Это выражение имеет вид

$$\sigma(n, 2n) \sim \pi a^2 \left[1 - \left(1 + \frac{E}{T} \right) e^{-E/T} \right],$$

где T — температура ядра-мишени при пороге возбуждения. Хотя данное статистическое выражение также дает зависимость $\sigma \sim E^2$ при $E \ll T$, эта зависимость не имеет ничего общего с зависимостью, только что полученной из резонансной теории. Нет никаких оснований к тому, чтобы эти две квадратичные зависимости плавно переходили одна в другую в промежуточной области энергий E , сравнимых с расстояниями между уровнями, точно так же как нельзя ожидать, что их абсолютные значения окажутся одинаковыми.

Вигнер [127] изучал также влияние возмущающих потенциалов на асимптотическое поведение волновых функций.

Его исследования показали, что если малый дополнительный потенциал убывает как r^{-n} , где $n > 2$, то он не оказывает влияния на асимптотическое поведение, хотя и может влиять на величину барьера и область справедливости асимптотического выражения. Отсюда следует, что центробежный потенциал является почти как раз тем слабейшим потенциалом, который еще может влиять на асимптотическое поведение. Однако это влияние может быть совершенно стерто кулоновским полем, влияние которого гораздо сильнее. Условием того, что потенциал несуществен и не влияет на область применимости асимптотического поведения, является малая по сравнению с единицей величина двойного интеграла P_2 от величины P в потенциале возмущения $\hbar^2 P / 2M$ (см. § 4 гл. VII). Практически это эквивалентно тому условию, что интеграл Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна мал. В качестве примера рассмотрим прохождение через барьер, обусловленный магнитным моментом. В этом случае $P \sim (2M/\hbar^2)(e\hbar/2Mc)^2 (\mu_1 \mu_2 / r^3)$ и двойной интеграл равен

$$P_2 = \int_a^\infty \int_{r'}^\infty P(r) dr dr' = \frac{e^2 \mu_1 \mu_2}{4Mc^2 a},$$

что представляет собой величину порядка 10^{-3} . Это говорит о том, что магнитное взаимодействие не будет заметно влиять на процессы с медленными нейтронами, несмотря на то, что высота этого барьера при $r = a$ может достигать нескольких килоэлектронвольт.

§ 2. Распад на три части как два последовательных распада на две части

До сих пор мы предполагали, что энергия возбуждения ядерной системы ниже порога реакции распада ее на три или более частей. Сейчас мы рассмотрим случаи, когда одно из двух ядер (α_1 или α_2) распавшейся пары α будет иметь энергию возбуждения, достаточную для того, чтобы оно могло испытать распад одним или бóльшим числом различных способов еще на одну пару ядер, приведя тем самым к распаду составной системы на три части. Ниже производятся некоторые видоизменения формул, полученных в предыдущих главах, применительно к указанной возможности и обсуждается справедливость и возможности использования полученных результатов.

Мы начнем наши рассуждения с фундаментального соотношения R -матричной теории (V. 1.4):

$$(E_2 - E_1) \int \Psi_2^* \Psi_1 d\tau = \sum_c (V_{2c}^* D_{1c} - V_{1c} D_{2c}^*). \quad (2.1)$$

Член в правой части этого равенства был получен путем применения теоремы Грина для преобразования интеграла, стоящего в левой части равенства, из интеграла по внутренней области в интеграл по поверхности \mathcal{S} . В случае, когда имеет место только распад на две части, поверхность \mathcal{S} в конфигурационном пространстве является, как следует из определения, достаточно вытянутой, так что интегрирование по ней эквивалентно суммированию по неперекрывающимся поверхностям каналов \mathcal{S}_c , что и объясняет появление в правой части суммы по c . Другое следствие определения поверхности \mathcal{S} состоит в том, что все волновые функции ψ_c , определенные на поверхностях каналов, как следует из (III. 2.1), ортогональны на поверхности \mathcal{S}

$$\int \psi_c^* \psi_{c'} d\mathcal{S} = 4\pi a_c^2 \delta_{cc'}. \quad (2.2)$$

Если имеет место распад на три части, то возникает существенное усложнение, состоящее в том, что в этом случае, вообще говоря, невозможно определить соответствующие поверхности каналов \mathfrak{S}_c . Согласно определению, \mathfrak{S}_c представляет собой такую сферическую поверхность радиуса $r_c = a_c$, что если ядра пары c разделены между собой расстоянием, большим a_c , между ними не существует никакого поляризующего взаимодействия. До тех пор пока оба ядра пары c являются связанными, a_c может быть приписано некоторое конечное значение. Однако если одно из ядер этой пары (или оба вместе) не является связанным (т. е. его волновая функция простирается на все пространство), то a_c нельзя, вообще говоря, приписать какого-либо конечного значения. Из этих замечаний ясно, что теория применима к случаю распада на три части только тогда, когда распадающееся ядро пары имеет волновую функцию, которая в несвязанном канале мала, так что для a_c приближенно можно выбрать конечное значение в соответствии с его обычным определением. Это эквивалентно требованию, что несвязанное ядро пары должно быть долгоживущим, так что распад на три части имеет характер двух последовательных распадов на две части. Конечно, если a_c выбрать достаточно большим, то эти условия будут выполнены для любого типа распада на три части; однако в таком случае теория уже не будет иметь практическую ценность. Если указанным способом приближенно определить поверхности каналов для случая распада на три части, то единственной модификацией, которую необходимо произвести в \mathbf{R} -матричной теории для того, чтобы она была пригодна для описания распада такого типа, является введение волновых функций континуума. Последние должны быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли условию ортогональности (2.2); если это условие выполнено, то процессы распада на три части могут быть включены в сумму (2.1) и \mathbf{R} -матричная теория может дальше применяться обычным путем.

Нужно еще согласовать лишь систему обозначений всего набора состояний продуктов распада на три части, необходимую для включения такого рода процессов в сумму (2.1). Для данного типа распада на три части, представляющего собой, для определенности, распад на связанную систему α_1 и несвязанную систему α_2 , мы прежде всего будем характе-

ризовать состояние значением кинетической энергии T_1 системы α_1 . Фиксируя T_1 , мы тем самым фиксируем энергию E_2 , приходящуюся на долю системы α_2 , которая не находится в связанном состоянии. Для данной энергии E_2 и спина I_2 существует несколько линейно-независимых состояний α_2 , число которых определяется числом открытых каналов α_2 (с учетом спинов каналов и значений l , а также различных способов распада). Для удобства мы можем в качестве этих состояний взять состояния с выходящими волнами в отдельных каналах [т. е. использовать обращенный во времени вариант соотношения (VI. 1.3)]. Обозначая открытые каналы индексом r , имеем

$$\psi_{E,r} = \hbar^{-1/2} \left[\mathcal{G}_r(E_2) - \sum_{r'} U_{rr'}^*(E_2) \mathcal{J}_{r'}(E_2) \right], \quad (2.3)$$

где \mathcal{G} и \mathcal{J} определены в § 2 гл. III. Мы ввели здесь множитель $\hbar^{-1/2}$ для того, чтобы $\psi_{E,r}$ удовлетворяло обычному условию нормировки для континуума: ♣

$$\int_{E_2-\Delta}^{E_2+\Delta} dE_2 \int_{\infty} \psi_{E_2,r}^* \psi_{E_2',r'} d\tau = \begin{cases} \delta_{rr'}, & \text{если } |E_2 - E_2'| < \Delta, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь объемный интеграл берется по всему пространству, а Δ — некоторое малое число. [Соотношение (2.4) получается непосредственно путем подстановки выражений (2.3) для волновых функций в его левую часть и последующего интегрирования по всему пространству, а также по энергии.] Воспользовавшись определением δ -функции, соотношения (2.4) можно записать в несколько иной форме:

$$\int_{\infty} \psi_{E_2,r}^* \psi_{E_2',r'} d\tau = \delta_{rr'} \delta(E_2 - E_2'). \quad (2.5)$$

Это значит, что условие ортогональности (2.2) может быть распространено на случай распада на три части:

$$\int \psi_c^*(E_2r) \psi_{c'}(E_2'r') d\mathcal{S} = 4\pi a_c^2 \delta_{cc'} \delta_{rr'} \delta(E_2 - E_2'), \quad (2.6)$$

где c (и точно так же c') определяет разбиение на подсистемы α_1 и α_2 с соответствующими спинами, спином канала s

и относительным моментом количества движения l , но не определяет энергии E_2 или состояния r подсистемы α_2 .

Введем теперь простое видоизменение R -матричной теории, заключающееся в том, что \sum_c повсюду будет заменена на $\sum_c \sum_r \int dE_2$. Прежде всего эта замена должна быть осуществлена в правой части соотношения (2.1). Элементы $U_{c'}(E'_2, r')$, c матрицы столкновений для каналов c , отвечающих несвязанному состоянию, определены так, что полная асимптотическая волновая функция имеет форму:

$$\Psi_c \sim \mathcal{J}_c - \sum_{c'} U_{c'c} \mathcal{G}_{c'} - \sum_{c'r'} \int U_{c'}(E'_2, r') \mathcal{G}_{c'} dE'_2,$$

где первое суммирование производится по всем каналам, отвечающим распаду на две части. При этом определении $U_{c'}(E'_2, r')$, c имеет размерность (Энергия) $^{-1/2}$, а сечение первоначального распада на две части равно

$$\frac{d\sigma_{\alpha, \alpha'}(E'_2, r')}{dE'_2} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{Jsls'l'} g_J |U_{c'}^J(E'_2, r')|_c|^2. \quad (2.7)$$

Сечение образования трех определенных конечных продуктов (независимо от их кинетической энергии) может быть получено интегрированием по E'_2 и суммированием по всем r' , отвечавшим этим трем продуктам (т. е. по спидам каналов и значениям l).

В частном случае формулы для изолированного уровня соотношение (2.7) принимает вид

$$d\sigma_{\alpha, \alpha'}(E'_2, r') = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{slsl'l'} g_J \frac{\Gamma_{\lambda c} \Gamma_{\lambda c'}(E'_2, r')}{(E_\lambda + \Delta_\lambda - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2} dE'_2, \quad (2.8)$$

где величина $\Gamma_{\lambda c'}(E'_2, r')$ безразмерна и где полная ширина и сдвиг уровня в знаменателе включают интегрирования $\Gamma_{\lambda c'}(E'_2, r')$ по dE'_2 (кроме обычного суммирования по c').

Приведенные ширины $\gamma_{\lambda c'}^2(E_2', r')$ для распада на три части являются неизвестными функциями E_2' , так что формула (2.8) не так полезна, как формула для изолированного уровня в случае распада на две части. Однако если несвязанная система $c'r'$ в области энергии E_2' также может быть описана формулой для изолированного уровня, может быть оправдано следующее полезное приближение:

$$\gamma_{\lambda c'}^2(E_2', r') \approx \gamma_{\lambda c'}^2(\lambda') \int_{\tau_{\alpha_2}} |\Psi_{c'}(E_2', r')|^2 d\tau_{\alpha_2}, \quad (2.9)$$

где постоянный фактор приведенной ширины $\gamma_{\lambda c'}^2(\lambda')$ не зависит от r' и E_2' , но зависит только от α_2' и энергетического уровня λ' этой системы α_2' . Основой для выделения этого множителя являются выводы [см. § 2 гл. XII] о том, что в приближении изолированного уровня (даже в случае, когда в рассмотрение включен постоянный член R^0) форма волновой функции во внутренней области для любого определенного α_2' не зависит ни от r' , ни от E_2' ; можно думать, что $\gamma_{\lambda c'}^2(E_2', r')$ пропорциональны квадрату модуля этой волновой функции во внутренней области τ_{α_2}' системы α_2' , а поэтому также и интегралу от квадрата модуля этой волновой функции по области τ_{α_2}' . Для интеграла вероятности в соотношении (2.9) можно применить формулу (XII. 2.1). Тогда получим

$$\gamma_{\lambda c'}^2(E_2', r') \approx \frac{1}{2\pi} \gamma_{\lambda c'}^2(\lambda') \frac{\Gamma_{\lambda', r'}}{(E_{\lambda'} + \Delta_{\lambda'} - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda'}^2}, \quad (2.10)$$

где для нормировки по энергии включен множитель \hbar^{-1} так, как это было сделано в (2.3). Если $\Gamma_{\lambda', r'}$ и $\Delta_{\lambda'}$ не изменяются с E_2' в пределах резонанса λ' (мы можем рассматривать $\Delta_{\lambda'}$ как линейную функцию E_2'), то соотношение (2.10) может быть проинтегрировано по резонансу λ' ; в результате находим

$$\int_{\lambda'} \gamma_{\lambda c'}^2(E_2', r') dE_2' \approx \gamma_{\lambda c'}^2(\lambda') \frac{\Gamma_{\lambda', r'}}{\Gamma_{\lambda'}}. \quad (2.11)$$

Наконец, мы можем просуммировать (2.11) по различным возможным r' :

$$\sum_{r' \lambda'} \int \gamma_{\lambda c'}^2(E_2, r') dE_2 \approx \gamma_{\lambda c'}^2(\lambda'). \quad (2.12)$$

Таким образом, мы получим в результате, что для сечения образования данного несвязанного состояния λ' системы α'_2 , при условии, что это состояние можно рассматривать как изолированное, справедлива обычная формула для изолированного уровня:

$$\sigma_{\alpha, \alpha'}(\lambda') = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{s l s' l'} g_J \frac{\Gamma_{\lambda c} \Gamma_{\lambda c'}(\lambda')}{(E_\lambda + \Delta_\lambda - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2}. \quad (2.13)$$

Из (2.11) следует, что сечение образования трех определенных конечных продуктов может быть получено путем умножения (2.13) на отношение $(\sum_{r'} \Gamma_{\lambda' r'} / \Gamma_{\lambda'})$, где сумма по r' означает суммирование по всем спинам, соответствующим трем ядрам-продуктам.

Проведенное рассмотрение создает некоторое обоснование обычных, встречающихся в литературе [36] трактовок распада на три части. Почти все они основаны на предположении о последовательных распадах на две части, вследствие чего сечение образования определенных конечных продуктов оказывается произведением двух множителей, как это было описано выше.

Хотя мы рассмотрели лишь случай изолированного уровня, подобные же рассуждения могут быть распространены и на случай, когда состояния составного ядра (имеется в виду первое составное ядро) оказываются перекрывающимися. Для этого следует воспользоваться статистической картиной, описанной в § 3 гл. XI. В практических приложениях рассуждения такого типа, основанные на предположении о последовательных распадах, могут оказаться полезными не только при описании распада на три части, но даже и в случае реакций, в результате которых одновременно образуется большое число (например, семь) конечных продуктов [130].

§ 3. Описание реакций с фотонными каналами

Теория в том виде, в котором она была изложена в предыдущих главах, неприменима для описания реакций с участием квантов электромагнитного поля (фотонов) с их специфическими свойствами. Эти свойства, включая возможность образования и аннигиляции частиц и нелокализуемость фотонов в пространстве, не позволяют описывать фотоны общепринятыми пространственными волновыми функциями. Однако мы все же можем обобщить теорию, построенную для тяжелых частиц, так, чтобы можно было описывать фотонные процессы. Для этого воспользуемся тем фактом, что связь между нуклонами и электромагнитным полем сравнительно слаба, благодаря чему для описания электромагнитных явлений может быть использована обычная теория возмущений; при этом мы будем рассматривать процессы, при которых в любой данный момент времени в системе существует не более одного реального или виртуального фотона. Вследствие малости константы связи вероятность того, что в системе будут одновременно находиться два фотона, много меньше вероятности существования одного фотона, благодаря чему „однофотонная“ теория должна быть вполне удовлетворительной, за исключением тех аномальных случаев, когда однофотонные переходы запрещены правилами отбора (например, переходы между двумя состояниями с нулевыми спинами).

Хотя описание фотонов отличается от описания тяжелых частиц, роль, которую играют фотоны в ядерных реакциях, качественно подобна роли тяжелых частиц. Это обстоятельство проявляется в том, что фотонные процессы в теориях ядерных реакций обычно рассматриваются *по аналогии* с процессами, в которых участвуют частицы. Например, дисперсионная формула для ядерных реакций, идущих через составное ядро, распространяется на фотонные процессы путем простого введения в полную ширину еще одной конкурирующей ширины, учитывающей эти процессы. Такое описание является разумным и согласуется с боровской картиной составного ядра, распадающегося по различным каналам конкурирующими между собой способами, не зависящими от способа образования. Согласно этой картине, испускание фотона является одним из конкурирующих способов распада, так

что вероятность испускания фотона зависит от конкуренции со стороны других способов распада.

В большинстве ядерных реакций ширины, отвечающие радиационным процессам, настолько малы по сравнению с ширинами, отвечающими испусканию частиц, что эффектом конкуренции со стороны радиационных процессов вполне можно пренебречь. Известным исключением из этого правила являются реакции на тепловых нейтронах, в которых фотонные ширины могут в тысячи и более раз превышать ширины для частиц, так что в этом случае конкуренция со стороны фотонных каналов должна учитываться.

а. Однофотонная теория без учета затухания

Обозначим волновые функции, учитывающие и не учитывающие взаимодействие между фотонами и частицами, соответственно через Φ и Ψ , так что

$$H\Phi = E\Phi, \text{ где } H = (H_{\text{част.}} + H_{\text{фот.}}) + (H' + H'^*), \quad (3.1)$$

$$\bar{H}\Psi = E\Psi, \text{ где } \bar{H} = H_{\text{част.}} + H_{\text{фот.}}, \quad (3.2)$$

где H' соответствует рождению отдельных фотонов, а H'^* — их поглощению.

Рассмотрим состояние Φ_e , отвечающее единичному входящему потоку в канале $c = e$. Приняв, что в этом состоянии в системе может быть не более одного фотона, мы можем записать его волновую функцию в форме:

$$\Phi_e = \Phi_e^{(0)} + \sum_p A_p \Psi_p^{(1)}. \quad (3.3)$$

Верхние индексы указывают на число фотонов в системе. Волновая функция $\Psi_p^{(1)}$ имеет форму произведения ядерной волновой функции и вектора состояния отдельного фотона p . Для определенности мы примем для этого вектора представление $(k; \mathcal{L}M\pi)$ [здесь k — волновое число фотона, \mathcal{L} — момент количества движения, M — проекция момента, π — четность] и нормируем его на один фотон в большом объеме V .

Подставляя (3.3) в (3.1), умножая на $\Phi_e^{(0)*}$ и интегрируя по всем координатам, получаем

$$\int \Phi_e^{(0)*} (\bar{H} - E) \Phi_e^{(0)} + \sum_p A_p \int \Phi_e^{(0)*} H'^* \Psi_p^{(1)} = 0. \quad (3.4)$$

Умножая же на $\Psi_p^{(1)*}$ и интегрируя, находим

$$(E_p - E) A_p + \int \Psi_p^{(1)*} H' \Phi_e^{(0)} = 0. \quad (3.5)$$

Применив теперь известную процедуру, предложенную Дираком [131], мы приходим к заключению, что амплитуда U_{ep} реальных выходящих фотонов на больших расстояниях имеет вид

$$U_{ep} = \left\{ \left(\frac{2\pi\rho}{\hbar} \right)^{1/2} (E_p - E) A_p \right\}_{E_p = E} = \\ = \left\{ - \left(\frac{2\pi\rho}{\hbar} \right)^{1/2} \int \Psi_p^{(1)*} H' \Phi_e^{(0)} \right\}_{E_p = E}, \quad (3.6)$$

где ρ представляет собой плотность энергии фотонных состояний, а $E = E_p$ выражает энергетический баланс для реальных фотонов. (Заметим, что $\rho^{1/2}$ содержит множитель $V^{1/2}$, который сокращается с нормировочным множителем $V^{-1/2}$ вектора состояния фотона.) Амплитуды U_{ep} , определенные формулой (3.6), являются элементами матрицы столкновений, соответствующими реакциям, которые протекают с участием фотонных состояний p . Сечения связаны с элементами матрицы столкновений, так же как в случае реакций с частицами (см. гл. VIII). Единственное различие заключается в том, что в дифференциальных сечениях фотонная волна ($\mathcal{L}\mathcal{M}\pi$) соответствует не угловой части $Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})}(\Omega)$ волновой функции, а специальной фотонной векторной функции $X_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})}(\Omega)$, определяемой ниже соотношением (3.40).

Здесь мы ограничимся рассмотрением в рамках теории возмущений первого порядка без учета затухания, заменяя $\Phi_e^{(0)}$ в соотношении (3.6) на $\Psi_e^{(0)}$, т. е. на волновую функцию ядра в случае отсутствия взаимодействия частиц с фотонами.

Из (IX.1.31) следует, что во внутренней области эта функция имеет вид

$$\Psi_e^{(0)} = -i\hbar^{1/2}\Omega_e \sum_{\lambda\mu} (A_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu e}^{1/2}) X_{\lambda} \quad (3.7)$$

и соответствует матрице столкновений для каналов, отвечающих частицам

$$U_{ec} = i\Omega_e \Omega_c \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu e}^{1/2} \Gamma_{\lambda c}^{1/2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, предполагая, что внутренняя область достаточно велика для того, чтобы включить все существенные вклады в матричный элемент (3.6), мы приходим к выводу, что

$$U_{ep} = i\Omega_e \Omega_p \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu c}^{1/2} \Gamma_{\lambda p}^{1/2}, \quad (3.9)$$

где произведение $(\Omega_p \Gamma_{\lambda p}^{1/2})$ фотонного фазового множителя и амплитуды фотонной ширины определено как

$$\Omega_p \Gamma_{\lambda p}^{1/2} = \left\{ (2\pi\rho)^{1/2} \int \Psi_p^{(1)*} H' X_\lambda \right\}_{E_p = E}. \quad (3.10)$$

В самом деле, поскольку матричный элемент (3.10) должен быть вещественным, без ограничения общности можно положить $\Omega_p = 1$. Сравнивая (3.8) и (3.9), мы видим, что выражения для элементов матрицы столкновений, отвечающие частицам и фотонам, имеют почти одинаковый вид, так что, если фотонным процессам соответствуют ширины, даваемые формулой (3.10), их можно описывать так же, как и процессы с частицами. К сожалению, это не совсем верно, поскольку коэффициенты $A_{\lambda\mu}$ в (3.8) и (3.9) относятся к случаю, когда возмущение отсутствует, так что они не имеют никакого отношения к фотонам, а потому и несимметричны по отношению к ширинам фотонов и частиц. Рассмотрим в качестве иллюстрации сечение образования фотона при захвате частицы в случае, когда реакция протекает через изолированный резонанс. В этом случае, как следует из (IX. 1.21), все коэффициенты $A_{\lambda\mu}$ равны нулю, за исключением

$$A_{\lambda\lambda} = \left[E_\lambda + \Delta_\lambda - E - \left(\frac{i}{2} \right) \Gamma_\lambda \right]. \quad (3.11)$$

Тогда из (3.8) или (3.9) следует, что как для выходного канала, соответствующего частицам, так и для фотонного выходного канала имеем

$$U_{ec} = \frac{i\Omega_e \Omega_c \Gamma_{\lambda e}^{1/2} \Gamma_{\lambda c}^{1/2}}{E_\lambda + \Delta_\lambda - E - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda} \quad (3.12)$$

и из (VIII. 3.3)

$$\sigma_{ec} = \frac{\pi}{k_e^2} \sum_{sl} g_J \frac{\Gamma_{\lambda e} \Gamma_{\lambda c}}{(E_\lambda + \Delta_\lambda - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2}. \quad (3.13)$$

В этих трех равенствах сдвиг уровня Δ_λ и ширина Γ_λ содержат вклад только от каналов с частицами. В общем случае вследствие того, что фотонные ширины много меньше ширины для частиц, указанное нарушение симметрии между фотонами и частицами в теории не имеет никакого практического значения. Имеется, однако, специальный случай резонансного захвата медленных нейтронов, когда, как правило, $\sum_p \Gamma_{\lambda p} \gg \Gamma_{\lambda n}$.

В таких случаях соотношение (3.13) становится совершенно неверным, если в знаменателе в полную ширину и в сдвиг уровня не включен вклад от фотонных каналов. Другими словами, в этих случаях важно учесть конкуренцию, обусловленную возможностью образования фотонов. Это означает, что для подстановки в (3.6) следует найти более точное приближение для $\Phi_e^{(0)}$, чем то, каким является $\Psi_e^{(0)}$, определенное соотношением (3.7). Если фотоны играют примерно ту же роль, что и частицы, то указанное лучшее приближение должно быть таким, чтобы коэффициенты $A_{\lambda\mu}$ в соотношении (3.7) были симметричны по отношению к ширинам для фотонов и для частиц. Имеется два довода, показывающих, что подобная модификация может быть осуществлена.

б. Влияние затухания

1) *Вывод на основе свойства унитарности матрицы столкновений.* Величины $A_{\lambda\mu}$ в выражении (3.9) для U_{ep} были вычислены для невозмущенной системы, т. е. при пренебрежении фотонными каналами. Это означает, что матрица U не является унитарной, как легко видеть в частном случае изолированного уровня (3.12). В этом частном случае из условия унитарности следует, что фотонная ширина должна быть включена в полную ширину в знаменателе (3.12); это эквивалентно тому, что она будет симметрично входить и в $A_{\lambda\lambda}$.

Теперь мы покажем, что в общем случае мнимая часть скалярного произведения, определяющего те элементы ξ -матрицы, которые нужны для определения элементов матрицы A в (3.9), должна включать дополнительный вклад от фотонных каналов для каждого элемента $\lambda\mu$, причем каждый из двух факторов этого вклада определяется равенством (3.10). В приводимой здесь аргументации вклад от дополнительных каналов в вещественную часть элементов матрицы ξ остается неопределенным.

Чтобы более детально рассмотреть условие унитарности, вычислим элементы матричного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{Q} \left[1 + 2i \sum_{\lambda\mu} (\mathbf{P}^{1/2}\gamma_\lambda \times \mathbf{P}^{1/2}\gamma_\mu) A_{\lambda\mu} \right] \times \\ \times \left[1 - 2i \sum_{\lambda\mu} (\mathbf{P}^{1/2}\gamma_\lambda \times \mathbf{P}^{1/2}\gamma_\mu) A_{\lambda\mu}^* \right] \mathbf{Q}^*. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Это произведение может быть сведено к выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{Q} \left\{ 1 + 2i\mathbf{P}^{1/2} \sum_{\lambda\mu} (\gamma_\lambda \times \gamma_\mu) \left[A_{\lambda\mu} - A_{\lambda,\mu}^* - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\sigma\nu} A_{\lambda\sigma} (\xi_{\sigma\nu} - \xi_{\sigma\nu}^*) A_{\nu\mu}^* \right] \mathbf{P}^{1/2} \right\} \mathbf{Q}^*, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\xi_{\sigma\nu} = (\gamma_\sigma, \mathbf{L}\gamma_\nu)$$

есть скалярное произведение, учитывающее вклад от всех каналов. Заметим, что в (3.15) входит лишь мнимая часть элементов ξ . Для унитарности матрицы \mathbf{U} необходимо, чтобы

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}^* - \mathbf{A}(\xi - \xi^*)\mathbf{A}^* = 0. \quad (3.16)$$

Если $\mathbf{A} = (\mathbf{e} - \mathbf{E} - \xi)^{-1}$, где элементы ξ те же, что и в (3.15), то $\mathbf{A}(\mathbf{e} - \mathbf{E} - \xi)\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^*(\mathbf{e} - \mathbf{E} - \xi^*)\mathbf{A} = \mathbf{A}$, так что разность

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}^* = \mathbf{A}\xi\mathbf{A}^* - \mathbf{A}\xi^*\mathbf{A}^*,$$

удовлетворяя таким образом (3.16).

2) *Вывод на основе более точного учета затухания.* Если (3.3) подставить в (3.1), полученное уравнение умножить на X_λ^* и проинтегрировать, то вместо (3.4) получим

$$\int X_\lambda^* (\bar{H} - E) \Phi_e^{(0)} + \sum_p A_p \int X_\lambda^* H' \Psi_p^{(1)} = 0. \quad (3.17)$$

Положим теперь, что имеет место разложение

$$\Phi_e^{(0)} = \sum_\mu A_\mu X_\mu; \quad (3.18)$$

тогда (3.5) принимает вид

$$(E_p - E) A_p + \sum_\mu A_\mu \int \Psi_p^{(1)*} H' X_\mu = 0. \quad (3.19)$$

Подставляя A_p из (3.19) в (3.17) и учитывая условие, которому удовлетворяют выходящие волны, получаем

$$\int X_\lambda^* (\bar{H} - E) \Phi_e^{(0)} = \sum_\mu \sum_p \left\{ -\frac{1}{E - E_p} + i\pi\delta(E - E_p) \right\} \times \\ \times \left(\int \Psi_p^{(1)*} H' X_\mu \right) \left(\int X_\lambda^* H' \Psi_p^{(1)} \right). \quad (3.20)$$

Выделив в сумме по p суммирование по E_p и заменив его интегрированием, получим

$$\int X_\lambda^* (\bar{H} - E) \Phi_e^{(0)} = - \sum_{\mu p} A_\mu \left(\Delta_{\lambda\mu p} - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda\mu p} \right), \quad (3.21)$$

где фотонный сдвиг уровня и фотонная ширина соответственно определяются соотношениями

$$\Delta_{\lambda\mu p} = \int \rho_{E_p} \frac{\left(\int \Psi_p^{(1)*} H' X_\mu \right) \left(\int X_\lambda^* H' \Psi_p^{(1)} \right)}{E - E_p} dE_p; \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu p} = \Gamma_{\lambda p}^{1/2} \Gamma_{\mu p}^{1/2}; \quad (3.23)$$

здесь $\Gamma_{\lambda p}^{1/2}$ определяется соотношением (3.10).

Соотношение (3.21) является основным для проводимого здесь рассмотрения. Если $\Phi_e^{(0)}$ заменить $\Psi_e^{(0)}$, т. е. невозмущенным состоянием, то левая часть обратится в нуль, как этого требует закон сохранения. Отсюда следует, что правая часть (3.21) объясняет уменьшение вероятности других процессов, обусловленное наличием фотонных процессов. Применяя к левой части равенства (3.21) теорему Грина, находим

$$\int X_\lambda^* (\bar{H} - E) \Phi_e^{(0)} = (E_\lambda - E) A_\lambda + \sum_c (V_c D_{\lambda c} - D_c V_{\lambda c}) = \\ = \sum_\mu A_\mu \left\{ (E_\lambda - E) \delta_{\lambda\mu} + \sum_{c (\neq e)} \left(\Delta_{\lambda\mu c} - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda\mu c} \right) \right\} + \\ + (V_e D_{\lambda e} - D_e V_{\lambda e}). \quad (3.24)$$

Комбинируя (3.21) и (3.24), легко прийти к выводу, что фотонные каналы проявляют себя точно так же, как и все другие выходные каналы. Имеем

$$\sum_\mu A_\mu \left\{ (E_\lambda - E) \delta_{\lambda\mu} + \sum_{c (\neq e)} \left(\Delta_{\lambda\mu c} - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda\mu c} \right) \right\} = V_e D_{\lambda e} - D_e V_{\lambda e}. \quad (3.25)$$

где сумма по c включает и фотонные каналы. Если мы вычислим волновую функцию на поверхности входного канала с внешней и внутренней стороны, то придем к следующим соотношениям:

$$\sum_{\mu} A_{\mu} \gamma_{\mu e} = V_e, \quad (3.26a)$$

$$D_e - V_e L_e = i(2\hbar)^{1/2} P_e^{1/2} \Omega_e. \quad (3.26b)$$

Отсюда следует, что правая часть (3.25) равна

$$V_e D_{\lambda e} - D_e V_{\lambda e} = - \sum_{\mu} A_{\mu} \left(\Delta_{\lambda \mu e} - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda \mu e} \right) + \\ + i(2\hbar)^{1/2} P_e^{1/2} \Omega_e \gamma_{\lambda e}. \quad (3.27)$$

Определяя обычным путем матрицу $\mathbf{A} = [A_{\lambda \mu}]$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}, \\ B_{\lambda \mu} = (E_{\lambda} - E) \delta_{\lambda \mu} + \sum_c \left(\Delta_{\lambda \mu c} - \frac{i}{2} \Gamma_{\lambda \mu c} \right), \quad (3.28)$$

где сумма по c включает фотонные каналы, из (3.25) и (3.27) мы можем получить выражение для коэффициентов разложения A_{λ} :

$$A_{\lambda} = -i(2\hbar)^{1/2} P_e^{1/2} \Omega_e \sum_{\mu} A_{\lambda \mu} \gamma_{\mu e}. \quad (3.29)$$

Подстановка (3.29) в (3.18) приводит к разложению (3.7). Продолжая решение (3.7) через поверхности каналов до бесконечности, находим элементы матрицы столкновений (3.8) для каналов, соответствующих частицам. Подстановка (3.7) в (3.8) приводит к соотношению (3.9), определяющему элементы матрицы столкновений для фотонных каналов. Это завершает доказательство того факта, что при учете затухания фотонные каналы и каналы, соответствующие частицам, входят в матрицу столкновений совершенно симметрично.

в. Переходы во внешней области

Если поверхности каналов, соответствующих частицам, выбраны обычным образом, то внешняя область конфигурационного пространства также может давать вклад в матричные элементы электромагнитных переходов [132]. Эта воз-

можность может быть исключена путем расширения внутренней области или учтена с помощью метода, который мы сейчас обсудим. Обычно вклад внешней области сравнительно мал. Например, когда энергия бомбардирующих частиц в точности равна резонансной энергии, вкладом внешней области можно пренебречь. Ситуация, при которой вклад внешней области может быть заметным, имеет место при сочетании особых обстоятельств и иногда встречается в легких ядрах.

Волновая функция конечного состояния ядра, например $X_{pJ'M'}$, для канала $c = asl'$ имеет следующий вид:

$$X_{pJ'M'} \rightarrow \left(\frac{2}{a_c}\right)^{1/2} \theta_{\lambda c} N_p^{1/2} \frac{E_c(r_c)}{r_c} \times \left\{ \sum_{\nu'+m'=M'} (sl'\nu'm' | J'M') \psi_{as\nu'}(i^{l'} Y_m^{(l')}) \right\}. \quad (3.30)$$

Здесь предполагается, что X_p является связанным состоянием, нормированным во всем пространстве; нормировочный множитель N_p определен как

$$N_p^{-1} = 1 + \sum_c \frac{2\theta_{pc}^2}{a_c} \int_{a_c}^{\infty} E_c^2(r_c) dr_c. \quad (3.31)$$

Здесь θ_{pc} — безразмерная амплитуда приведенной ширины, а $E_c(r_c)$ — внешняя радиальная волновая функция, определенная условием $E_c(a_c) = 1$, так что с помощью функции O , введенной в гл. III, имеем

$$E_c(r_c) = \frac{O_c(r_c)}{O_c(a_c)}. \quad (3.32)$$

Разумно предположить, что переходы, обусловленные вкладом внешней области, существенны лишь в тех каналах α , в которых имеются падающие волны. В этом случае вклад внешней области в матрицу столкновений U_{ep} [см. (3.6)] равен

$$U_{ep}^{J(\text{внешн.})} = N_p \left(\frac{2\pi\rho}{\hbar}\right)^{1/2} \sum_{\substack{\nu+m=M \\ \nu'+m'=M' \\ l'}} (sl\nu m | JM) (sl'\nu'm' | J'M') \times \times \theta_{pc} \left(\frac{2}{a_e v_e}\right)^{1/2} \left(i^{l'} Y_m^{(l')}\right) \frac{E_c}{r_c} | H_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L}\pi)} | i^{l'} Y_m^{(l)} \frac{(I_e - U_{ee} O_e)}{r_e}, \quad (3.33)$$

где через $e = asl$ обозначен входной канал. Чтобы получить полный элемент матрицы столкновений, этот член должен

быть добавлен к вкладу (3.9) внутренней области, умноженному на N_p . Оператор $H_M^{(\mathcal{L}\pi)}$ в (3.33) равен оператору H' , за вычетом оператора испускания фотона ($k; \mathcal{L}, M\pi$), ранее обозначенного индексом p . Этот оператор зависит только от координат нуклона. Как видно из (3.33), переходы в каналах по своей природе являются электрическими мультипольными переходами. (Действительно, электрические дипольные переходы имеют место только тогда, когда имеется заметный вклад от внешней области.) Выражение (3.33) можно несколько преобразовать с помощью алгебры Рака́ к следующему виду:

$$U_{ep}^J(\text{внешн.}) = (-)^{2s} \left(\frac{4\pi\rho}{\hbar a_e v_e} \right)^{1/2} (J \mathcal{L} M \mathcal{M} | J' M') \times \\ \times \sum_{l'} \frac{U(\mathcal{L} l' s, l' J)}{(2l' + 1)^{1/2}} \theta_{pc} \times \left(i^{l'} Y^{(l')} \frac{E_c}{r_c} \parallel \mathbf{H}^{(\mathcal{L}\pi)} \parallel i^{l'} Y^{(l)} \frac{I_e - U_{ee} O_e}{r_e} \right), \quad (3.34)$$

где мы ввели приведенный матричный элемент.

2. Фотонные ширины

Чтобы найти выражение для ширин фотонных каналов, следует выполнить разложение по мультиполям, которое было описано Блаттом и Вайскопфом [36], Роузом [133], Мак-Дональдом [134] и другими.

В свободном пространстве можно рассмотреть входящие и выходящие векторные потенциалы поля:

$$\mathfrak{S}_{lm1t} = \left(\frac{k}{2\pi\hbar} \right)^{-1/2} r^{-1} I_l(i^l Y_m^{(l)}) \mathbf{e}_t, \\ \mathfrak{D}_{lm1t} = \left(\frac{k}{2\pi\hbar} \right)^{-1/2} r^{-1} O_l(i^l Y_m^{(l)}) \mathbf{e}_t, \quad (3.35)$$

которые подобны аналогичным функциям (III. 2.25) для случая волновых функций частиц. Эти потенциалы нормированы на единичный поток. Единичные векторы \mathbf{e}_t имеют вид

$$\mathbf{e}_1 = -2^{-1/2} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_{-1} = 2^{-1/2} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)$$

и обладают свойством

$$(\mathbf{e}_t^* \cdot \mathbf{e}_{t'}) = \delta_{tt'}.$$

Векторный потенциал поля мультиполя, имеющего определенный полный момент количества движения \mathcal{L} и его проекцию M , представляет собой линейную комбинацию следующего вида:

$$\left. \begin{matrix} \mathfrak{S}_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{M}} \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{M}} \end{matrix} \right\} = -2^{1/2} \sum_{mt} (L1mt | \mathcal{L}M)(L1-11 | LO) \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{S}_{\mathcal{L}M1t} \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{L}M1t} \end{matrix} \right. \quad (3.36a)$$

для магнитного мультиполя \mathcal{H} и

$$\left. \begin{matrix} \mathfrak{S}_{\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{M}} \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{M}} \end{matrix} \right\} = -2^{1/2} \sum_{mt} \sum_{l(\neq \mathcal{L})} (l1mt | \mathcal{L}M)(L1-11 | LO) \times \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{S}_{lM1t} \\ \mathfrak{D}_{lM1t} \end{matrix} \right. \quad (3.36b)$$

для электрического мультиполя \mathcal{E} . Эти поля также нормированы на единичный поток. Соответствующие входящие и выходящие поля мультиполей соответственно связаны соотношением

$$k^{-1} \left(\nabla \times \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{S}_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{M}} \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{M}} \end{matrix} \right\} \right) = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{S}_{\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{M}} \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{M}} \end{matrix} \right. \quad (3.37)$$

Мы можем иметь дело с полями (3.36) точно таким же образом, как это делалось в (VIII.1.5) с функциями каналов, введенными в § 2 гл. III. Векторный потенциал \mathbf{A} нормированной на единичный поток плоской волны с волновым вектором \mathbf{k} и состоянием поляризации ϵ может быть разложен по указанным полям следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \epsilon) = -i\pi^{1/2} k^{-1} 2^{-1/2} \sum_{\mathcal{L}M} (2\mathcal{L} + 1)^{1/2} \times \\ \times [(\mathfrak{S}_{\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{M}} - \mathfrak{D}_{\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{M}}) + \epsilon(\mathfrak{S}_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{M}} - \mathfrak{D}_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{M}})] D_{M\epsilon}^{(\mathcal{L})}, \quad (3.38)$$

где величины $D_{M\epsilon}^{(\mathcal{L})}$ являются элементами неприводимых матриц, представляющих вращение от оси квантования к направлению \mathbf{k} .

Полуклассический метод определения элементов матрицы столкновений U_{ep} для указанных выше выходящих мультиполей дан в книге Блатта и Вайскопфа [36] (§ 4 Приложения II), где на основе уравнений Максвелла показано, что магнитное и электрическое \mathcal{L} -польное излучение может быть

выражено через источники нуклонного тока \mathbf{j}_{ep} и источники намагниченности \mathbf{M}_{ep} следующим образом:

$$U_{ep} = - (2\pi\hbar k)^{-1/2} \left(\frac{4\pi}{c} \right) \times \\ \times \int r^{-1} F_{\mathcal{L}} (i^{\mathcal{L}} \mathbf{X}_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \cdot (\mathbf{j}_{ep} + c\nabla \times \mathbf{M}_{ep}) dV, \quad (3.39a)$$

$$U_{ep} = - (2\pi\hbar k)^{-1/2} \left(\frac{4\pi}{c} \right) \times \\ \times \int r^{-1} F_{\mathcal{L}} (i^{\mathcal{L}} \mathbf{X}_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})}) (k^{-1}\nabla \times \mathbf{j}_{ep} + ck\mathbf{M}_{ep}) dV, \quad (3.39b)$$

где $\mathbf{X}_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})}$ — векторные сферические гармоники для фотонов, определенные Блаттом и Вайскопфом:

$$\mathbf{X}_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})} = [\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)]^{-1/2} \mathbf{L} Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})}. \quad (3.40)$$

Эти функции нормированы:

$$\int [\mathbf{X}_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})}]^* [\mathbf{X}_{\mathcal{M}'}^{(\mathcal{L}')}] d\Omega = \delta_{\mathcal{L}\mathcal{M}, \mathcal{L}'\mathcal{M}'}$$

Здесь \mathbf{L} — дифференциальный оператор $-\mathbf{ir} \times \nabla$. Эти амплитуды отличаются от соответствующих амплитуд \mathcal{A}_g и \mathcal{A}_{gc} Блатта и Вайскофа нормировкой и фазой. Переходу из начального состояния Ψ_e в конечное (связанное) состояние X_p соответствуют следующие квантовомеханические выражения для тока и намагниченности:

$$\mathbf{j}_{ep} = \sum \frac{1}{2} [X_p^* (\mathbf{j}\Psi_e) + (\mathbf{j}X_p)^* \Psi_e], \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{M}_{ep} = \sum \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \mu [X_p^* \boldsymbol{\sigma} \Psi_e], \quad (3.41b)$$

где \sum означает суммирование по всем нуклонам, \mathbf{j} — оператор тока для протонов ($-ie\hbar\nabla$), $\boldsymbol{\sigma}$ — спиновый оператор Паули, μ — магнитный момент, выраженный в магнетонах Бора.

Из соотношений (3.9), (3.10) и (3.39) следует, что

$$\Gamma_{\lambda p}^{1/2} = \left(\frac{8\pi k}{c^2} \right)^{1/2} \int dV j_{\mathcal{L}}(kr) (i^{\mathcal{L}} \mathbf{X}_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \begin{cases} \mathbf{j}_{\lambda p} + c(\nabla \times \mathbf{M}_{\lambda p}) \\ k^{-1}(\nabla \times \mathbf{j}_{\lambda p}) + ck\mathbf{M}_{\lambda p} \end{cases} \quad (3.42)$$

где волновая функция в свободном пространстве $j_{\mathcal{L}}(kr)$ положена равной $r^{-1}F_{\mathcal{L}}(kr)$ и где выражения для источников за фигурной скобкой есть

$$\mathbf{j}_{\lambda p} = \frac{e}{2M} [X_p^* (\mathbf{j}X_{\lambda}) + (\mathbf{j}X_p)^* X_{\lambda}], \quad (3.43a)$$

$$M_{\lambda p} = \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \mu [X_p^* \boldsymbol{\sigma} X_{\lambda}]. \quad (3.43b)$$

Верхнее выражение за фигурной скобкой в (3.42) относится к магнитному излучению, нижнее же — к электрическому.

Полученные выражения для ширин можно привести к форме, более удобной для численных расчетов, если произвести несколько интегрирований. В результате для амплитуды ширины фотонного канала p с мультипольностью \mathcal{L} получаем

$$\Gamma_{\lambda p}^{1/2} = \frac{(8\pi)^{1/2} k^{\mathcal{L}+1/2} (\mathcal{L}+1)^{1/2}}{\mathcal{L}^{1/2} (2\mathcal{L}+1)!!} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_{\mathcal{L}M} + \mathcal{H}'_{\mathcal{L}M} \\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}M} + \mathcal{E}'_{\mathcal{L}M} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{L}M} = & -2i \frac{(2\mathcal{L}+1)!!}{(\mathcal{L}+1)k^{\mathcal{L}}} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \times \\ & \times \int dV \{ j_{\mathcal{L}}(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \nabla \cdot (X_p^* L X_{\lambda}) \}, \end{aligned} \quad (3.45a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{\mathcal{L}M} = & -i \frac{(2\mathcal{L}+1)!!}{(\mathcal{L}+1)k^{\mathcal{L}}} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \mu \times \\ & \times \int dV \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\mathcal{L}})(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \nabla \cdot (X_p^* \boldsymbol{\sigma} X_{\lambda}) - \right. \\ & \left. - j_{\mathcal{L}}(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* (X_p^* \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r} X_{\lambda}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.45b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{L}M} = & e \frac{(2\mathcal{L}+1)!!}{(\mathcal{L}+1)k^{\mathcal{L}}} \int dV \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\mathcal{L}})(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* (X_p^* X_{\lambda}) + \right. \\ & + \frac{\hbar k}{Mc} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\mathcal{L}})(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* (X_p^* X_{\lambda}) + j_{\mathcal{L}}(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* X_p^* X_{\lambda} + \right. \\ & \left. \left. + j_{\mathcal{L}}(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* X_p \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) X_{\lambda} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.46a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{\mathcal{L}M} = & -i \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \frac{(2\mathcal{L}+1)!!}{(\mathcal{L}+1)k^{\mathcal{L}}} \mu k \times \\ & \times \int dV \{ j_{\mathcal{L}}(i^{\mathcal{L}}Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \nabla \cdot (X_p^* (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) X_{\lambda}) \}. \end{aligned} \quad (3.46b)$$

Эти выражения для моментов $\mathcal{H}_{\mathcal{L}M}$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{L}M}$ подобны тем, которые были получены Мак-Дональдом [134]. В приближении

больших длин волн, т. е. если предположить, что $ka \ll 1$, получаем

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}M} = \frac{-i}{\mathcal{L}+1} 2\mu \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \int dV \{ r^{\mathcal{L}} (i^{\mathcal{L}} Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \nabla \cdot (X_p^* L X_{\lambda}) \}, \quad (3.47a)$$

$$\mathcal{H}'_{\mathcal{L}M} = -i\mu \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \int dV \{ r^{\mathcal{L}} (i^{\mathcal{L}} Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \nabla \cdot (X_p \sigma X_{\lambda}) \}, \quad (3.47b)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}M} = e \int dV \{ r^{\mathcal{L}} (i^{\mathcal{L}} Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* (X_p^* X_{\lambda}) \}, \quad (3.48a)$$

$$\mathcal{E}'_{\mathcal{L}M} = \frac{-i\mu k}{\mathcal{L}+1} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) \int dV \{ r^{\mathcal{L}} (i^{\mathcal{L}} Y_{\mathcal{M}}^{(\mathcal{L})})^* \nabla \cdot (X_p^* (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) X_{\lambda}) \}. \quad (3.48b)$$

Эти выражения аналогичны выражениям, которые были выведены Блаттом и Вайскопфом.

Записанные выше амплитуды $\Gamma_{\lambda p}^{1/2}$ и связанные с ними выражения для моментов соответствуют испусканию мультиполя $\mathcal{L}M$ при переходе из начального состояния ядра $X_{\lambda JM}$ с определенным спином J и его проекцией M в конечное состояние $X_{p J' M'}$ с определенным спином J' и его проекцией M' . Приведенные матричные элементы можно ввести обычным путем:

$$\Gamma_{\lambda p (\mathcal{L}M J' M' JM)}^{1/2} = (\mathcal{L} J' M M' | JM) \Gamma_{\lambda p (\mathcal{L} J J)}. \quad (3.49)$$

§ 4. Альфа-распад

Представляет интерес выяснить, каким образом в рамках \mathbf{R} -матричной теории можно описать α -распад ядер. Представим сначала α -распадающееся состояние как резонансное состояние, которое может быть в принципе (но не в случаях, встречающихся на практике) возбуждено путем бомбардировки дочернего продукта α -частицами. Подобная трактовка приводит к ожидаемым соотношениям между ширинами и другими величинами. Однако, поскольку эта трактовка не включает зависимость от времени, в ней не фигурируют величины, которые непосредственно наблюдаются на опыте, т. е. времена жизни. Известно, что время жизни α -радиоактивного состояния равно \hbar/Γ , где Γ — ширина состояния (при не связанным со временем описании). Это соотношение основано на соотношении неопределенности для энергии и времени и является почти самоочевидным. Тем не менее было бы весьма поучительным

детально исследовать описание α -распада во времени и рассмотреть, как возникает соотношение между шириной и временем жизни и как реальные распадающиеся состояния распределены во времени и пространстве.

а. Описание, не рассматривающее зависимость от времени

Согласно Томасу [135] (в цитируемой работе даются ссылки на дальнейшие работы), волновая функция во внутренней области, соответствующая единичному потоку во входном канале e , как следует из (IX. 1.31), имеет вид

$$\Psi_e = -i\hbar^{1/2}\Omega_e \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu e}^{1/2} X_\lambda. \quad (4.1)$$

Соответствующий реакции элемент в матрице столкновений равен, согласно (IX. 1.32),

$$U_{ec} = i\Omega_e \Omega_c \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda e}^{1/2} \Gamma_{\mu c}^{1/2}. \quad (4.2)$$

Из рассмотрения приближения изолированного уровня в § 1, а гл. XII мы знаем, что если $\mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0$ положить равным нулю (здесь $\mathbf{R}^0 = \mathbf{R} - [(\boldsymbol{\gamma}_\lambda \times \boldsymbol{\gamma}_\lambda)/(E_\lambda - E)]$), то

$$A_{\lambda\lambda} = \left(E_\lambda + \Delta_\lambda - E - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda \right)^{-1}, \quad (4.3)$$

а все остальные коэффициенты $A_{\lambda\mu} = 0$. В случае, когда входной канал соответствует α -частицам, бомбардирующим ядро-продукт α -распада, величина $\mathbf{R}^0 \mathbf{L}^0$ может быть сделана весьма малой путем соответствующего выбора граничных условий. Выбирая $B = S(E_r)$, где E_r — резонансная энергия, получаем величину

$$L^0(E) = (E - E_r) (dS/dE)_{E=E_r} + iP(E),$$

которая весьма мала в области резонанса вследствие больших барьеров каналов. При этом же выборе граничных условий $E_\lambda = E_r$, $\Delta_\lambda(E_r) = 0$, так что (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{\lambda\lambda}^{-1} &= (E_\lambda - E) \left(1 - \frac{d\Delta_\lambda}{dE} \right) - \frac{i}{2} \Gamma_\lambda = \\ &= \left(1 - \frac{d\Delta_\lambda}{dE} \right) \left(E_\lambda - E - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_\lambda}{1 - d\Delta_\lambda/dE} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Как отмечалось в § 3 гл. XII, член Δ_λ существен при нормировке волновой функции X_λ на единицу в окрестности точек, соответствующих классическим точкам отражения от барьеров в каналах (а не по внутренней области). Однако в связи с большой величиной барьеров волновая функция в области барьера очень быстро затухает, так что разница в нормировках весьма невелика. Действительно, величина $d\Delta_\lambda/dE$ в случае α -распада была оценена [135] как $\leq 10^{-2}$. Другим следствием большой величины барьеров является то, что $S(E_r)$ очень велико, так что параметр граничных условий B также весьма велик.

Из проведенных рассуждений и соотношения (4.1) следует, что бегущая волна Ψ_e в случае, когда барьеры в каналах велики, может быть аппроксимирована стоячей волной X_λ . Если представить себе, что барьеры безгранично возрастают, то $P \rightarrow 0$ и $\Gamma_\lambda \rightarrow 0$ и соотношение $\Psi_e \sim X_\lambda$ становится точным.

Это почти все, что можно сказать относительно процесса α -распада в рамках не зависящей от времени теории с вещественной энергией.

б. Описание α -распада во времени

При рассмотрении α -распада необходимо знать соотношение между константой распада и параметрами резонанса. Если решение (VI. 3.1a) аналитически продолжить на комплексную плоскость волновых чисел, то в полюсах U будут присутствовать решения только в виде выходящих плоских волн. Как указывалось в § 8 гл. IV, все эти полюса лежат в нижней половине комплексных плоскостей k . Исключением являются лишь полюса, соответствующие связанным состояниям системы, которые лежат на положительной мнимой полуоси. Если λ -й полюс на нижней половине одной из плоскостей k_c находится при $k_{\lambda c} = \Lambda_\lambda = K_{\lambda c} - iG_{\lambda c}$, то в плоскости энергии он лежит при $E = H_\lambda = F_\lambda - 1/2i\Gamma_\lambda$, где $F_\lambda = (\hbar^2/2M_c) \times \times (K_{\lambda c}^2 - G_{\lambda c}^2) + b_c$, $1/2\Gamma_\lambda = (\hbar^2/M_c)K_{\lambda c}G_{\lambda c}$, а b_c — энергия связи для канала c . Следовательно, в таком полюсе зависящее от времени решение имеет следующую асимптотическую форму:

$$\begin{aligned} \Psi(r, t) &\sim \sum_c U_c(H_\lambda) \exp i[k_{\lambda c}r - H_\lambda t \hbar^{-1}] = \\ &= \sum_c U_c(H_\lambda) \exp i[K_{\lambda c}r_c - F_\lambda t \hbar^{-1}] \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_\lambda t\right) \exp(G_{\lambda c}r_c), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где индексом c отмечены различные α -частичные каналы, а

$$\lambda_\lambda = \frac{\Gamma_\lambda}{\hbar}. \quad (4.6)$$

Если взять квадрат модуля такого решения, то мы придем к обычному экспоненциальному закону распада радиоактивных состояний во времени. Таким образом, (4.6) приводит к искомому соотношению между константой распада λ_λ для λ -го уровня и резонансной шириной Γ_λ . Это решение обнаруживает также ожидаемое экспоненциальное возрастание амплитуды с увеличением радиуса при фиксированном времени. Так, второй экспоненциальный множитель в (4.5) может быть переписан в виде $\exp(1/2 \lambda_\lambda r_c / v_{\lambda c})$, где $v_{\lambda c} = \hbar K_{\lambda c} / M_c$ есть скорость испускания, соответствующая величине $K_{\lambda c}$.

Несмотря на то, что (4.5) дает точную асимптотическую форму волновой функции распадающейся системы с большим временем жизни, против него имеются возражения, поскольку это решение относится к системе с комплексной энергией, которой в действительности не существует.

Можно показать, что (4.5) представляет только часть правильного решения, которое представляет собой суперпозицию или волновой пакет зависящих от времени решений с вещественными энергиями. Можно показать, что в волновом пакете, представляющем испускание ядром частицы с энергией, близкой к вещественной энергии F_λ одного из полюсов, появляется член, имеющий форму (4.5). Он пропорционален вычету в полюсе $U_c(H_\lambda)$, который дает вклад в том случае, когда оказывается допустимой замена интегрирования по вещественной оси в формуле для волнового пакета интегрированием по пути в комплексной плоскости, который охватывает полюс и уходит в бесконечность в нижней половине плоскости \hbar . В излагаемом ниже рассмотрении, предложенном Ван-Кампеном ¹⁾, индексы опущены и анализ ограничен случаем одного канала и взаимодействием в s -состоянии ($l = 0$).

В случае одного канала и s -волны при $r > a$ (где a — радиус ядра) зависящая от времени общая форма решения имеет

¹⁾ N. G. Van Kampen, частное сообщение.

следующий вид:

$$r\psi(r, t) = \int_0^{\infty} A(k) [\exp(-ikr) - U(k) \exp(ikr)] \times \\ \times \exp(-ihk^2t/2M) dk + \sum_n A_n \exp(-K_n r) \exp(-ihK_n^2t/2M). \quad (4.7)$$

Суммирование проводится по связанным уровням n с энергиями $\hbar^2 K_n^2/2M$, в то время как интегрирование производится по континууму уровней с энергиями $\hbar^2 k^2/2M$; здесь A_n , $A(k)$ являются произвольными амплитудами с интегрируемым квадратом. Построим теперь пакет с амплитудами:

$$A_n = \frac{1}{(iK_n + \Lambda) U'(-iK_n)}, \\ A(k) = \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\exp[-i(\delta + ka)]}{k - \Lambda} + \frac{\exp[i(\delta + ka)]}{k + \Lambda} \right\} e^{-i\delta}; \quad (4.8)$$

здесь $\Lambda = K - iG$ — волновое число в полюсе U в четвертом квадранте ($K > 0$, $G > 0$), Λ^* — соответствующий нуль U в первом квадранте, iK_n являются полюсами U на положительной мнимой полуоси, которые соответствуют связанным состояниям, а $-iK_n$ соответствующими нулями U ; $\delta(k)$ представляет собой вещественный сдвиг фазы функции столкновений $U(k) = \exp(2i\delta)$; штрих означает дифференцирование по k . На основе свойства симметрии $U(k)U(-k) = 1$ волновая функция (4.7) с амплитудами (4.8) может быть записана в следующем виде:

$$r\psi(r, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k - \Lambda) U(k) \exp(ika)} [\exp(-ikr) - \\ - U(k) \exp(ikr)] \exp(-\hbar k^2 t/2M) + \\ + \sum_n \frac{\exp(-K_n r - ihK_n^2 t/2M)}{(iK_n r + \Lambda) U'(-iK_n)}. \quad (4.9)$$

Покажем теперь, что $\psi(r, 0) = 0$ при $r > a$, так что $\psi(r, t)$ представляет испускание частиц ядрами.

При $t = 0$ путь интегрирования во втором слагаемом в правой части (4.9) может быть смещен в комплексной пло-

скости k вверх на бесконечность, где подынтегральное выражение обращается в нуль в связи с тем, что $r > a$. Для вычисления первого члена путь интегрирования смещается вниз. Вычет в каждом нуле $U(k)$ при $-iK_n$ дает вклад в соответствующий член суммы в (4.9). Согласно Ван-Кампену, путь на бесконечности не дает никакого вклада. Суммой членов в (4.9) можно теперь пренебречь, поскольку они стремятся к нулю при увеличении r и не могут, следовательно, обуславливать какую-либо эмиссию.

Вычисляя интегралы в (4.9) для достаточно отдаленного момента времени и большого расстояния, можно также показать, что этот волновой пакет описывает частицу, энергия которой близка к вещественной части F_λ энергии полюса при $E = H_\lambda$. Часть подынтегрального выражения (4.9), соответствующая выходящей волне, может быть проинтегрирована приближенно методом стационарной фазы. Экспоненты выражаются в виде $\exp [if(k)]$, где $f(k) = k(r - a) - (\hbar k^2 t / 2M)$ и $f(k)$ разлагается в ряд около стационарного значения $k_0 = (M/\hbar)(r - a)t^{-1}$, при котором $f'(k_0) = 0$; $f(k) \approx f(k_0) - 1/2(k - k_0)^2(\hbar t/M)$. В этом приближении для $f(k)$ и в предположении, что $(k - \Lambda)$ постоянно, интегрирование немедленно приводит к выражению

$$-i \left(\frac{M}{2\pi\hbar t} \right)^{1/2} e^{-1/4i\pi} (k_0 - \Lambda)^{-1} \exp i \left[k_0(r - a) - \left(\frac{\hbar k_0^2 t}{2M} \right) \right]. \quad (4.10)$$

В каждой точке (r, t) , наблюдается волна со скоростью $v_0 = \hbar k_0 / M = (r - a)t^{-1}$, указывая, что t так велико, что все компоненты Фурье, относящиеся к первоначальному пакету, разделились благодаря тому, что они обладали различными скоростями. В самом деле, условием применимости этого метода является неравенство $(\hbar/M)tG^2 \gg 1$, вытекающее из требования, чтобы вторая производная аргумента функции

$$\exp \left[-\frac{1}{2} i (k - k_0)^2 \frac{\hbar t}{m} \right]$$

была велика по сравнению с

$$(k - \Lambda) = [(k - K)^2 + G^2]^{1/2} \exp \left[i \operatorname{arccctg} \left(\frac{k - K}{G} \right) \right].$$

Если ввести „неопределенность в скорости“ $\omega = \hbar G/M$, соответствующую мнимой части (G) величины Λ (по аналогии с определением скорости $v = \hbar K/M$ для вещественной части этой величины), то указанное условие может быть записано в более ясном виде как $(\omega t) G \gg 1$. Это условие означает, что неопределенность в положении ωt должна быть велика по сравнению с длиной волны $1/G$. Согласно (4.10), плотность частиц дается выражением

$$\frac{\hbar t/2\pi M}{[(r-a) - vt]^2 + (\omega t)^2}, \quad (4.11)$$

которое имеет максимум в точке $r = a + vt$ и разброс в положении ωt . Часть (4.10), соответствующая входящей волне, может быть вычислена подобным же образом вблизи стационарной точки $k_1 = -(M/\hbar t)(r-a) = -k_0$. Она равна

$$i \left(\frac{M}{2\pi\hbar t} \right)^{1/2} e^{-(1/2)t\pi} \exp \left[-ik_0(r-a) - \frac{ik_0^2\hbar t}{2M} \right] \times \\ \times [(-k_0 - \Lambda)U(-k_0)]^{-1} \quad (4.12)$$

и всегда мала по сравнению с (4.10), поскольку $(k_0 + \Lambda)$ всегда много больше G .

Другой путь интегрирования дает информацию о форме волнового пакета на расстояниях, не настолько больших, чтобы пакет был разложен на отдельные компоненты Фурье. С этой целью вводится новая комплексная переменная $\zeta = \xi + i\eta = k - k_0$. С помощью этой величины часть (4.10), соответствующая входящей волне, можно представить в виде

$$- \frac{i}{2\pi} \exp \left[\frac{iM(r-a)^2}{2\hbar t} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\hbar t\zeta^2/2M) d\zeta}{k_0 - \Lambda + \zeta}. \quad (4.13)$$

Путь интегрирования в плоскости ζ идет теперь по направлению движения часовой стрелки к мнимой оси. Весьма существенно, что направление интегрирования именно таково, поскольку в первом и третьем квадранте экспоненциальный множитель на бесконечности становится бесконечно большим. Можно показать, что вклады от интегрирования по дугам на бесконечности во втором и четвертом квадрантах обращаются в нуль. С помощью метода стационарной фазы

можно показать, что вклад в интеграл (4.13) от интегрирования вдоль мнимой оси равен

$$-i \frac{(2\pi\hbar t/M)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{4} i\pi\right)}{[(r-a) - vt] + iG}. \quad (4.14)$$

Условие справедливости этого метода состоит в том, чтобы

$$[(r-a) - vt]^2 \gg \frac{vt}{K}. \quad (4.15)$$

Другими словами, разность $(r-a) - vt$ должна быть велика по сравнению со средним геометрическим vt и длины волны частицы $1/K$. Это указывает на то, что (4.14) дает лишь „хвост“ волнового пакета, центр которого располагается в точке vt . Однако если $vt > r-a$, подынтегральное выражение в (4.13) имеет в четвертом квадранте полюс при $\zeta = \Lambda - k_0$. Вычет в этом полюсе дает вклад в (4.14), равный

$$- \exp\left[-i\left(\frac{M}{2\hbar t}\right)(r-a)^2\right] \exp[i\Lambda(r-a)] \exp\left(-\frac{i\Lambda^2\hbar t}{M}\right). \quad (4.16)$$

Этот член обычно рассматривается как испущенная волна. Вторая и третья экспоненты в выражении (4.16) соответствуют аналогичным экспонентам в (4.5). Вспоминая рассуждения, проводившиеся в связи с (4.11), приходим к выводу, что вещественные части аргументов этих экспонент могут быть скомбинированы в $1/2(\lambda/v)[(r-a) - vt]$. Поскольку полюс в четвертом квадранте появляется лишь тогда, когда $vt > r-a$, очевидно, что выражение (4.16) всегда меньше единицы.

Таким образом, на больших расстояниях позади фронта волны при $r-a = vt$ волновой пакет определяется асимптотическим разложением, первыми членами которого являются (4.14) и (4.16). На больших расстояниях перед фронтом первым исчезающим членом является (4.14). Однако следует рассмотреть и входящую часть (4.10). Для этой части невозможно провести путь интегрирования через второй квадрант, так что только половина пути сдвигается в нижнюю полуплоскость. Полагая

$$k = k_1 + \zeta = \zeta - \frac{r-a}{\hbar t/M},$$

получаем

$$\frac{i}{2\pi} \exp \left[i \left(\frac{M}{2\hbar t} \right) (r - a)^2 \right] \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} i t \xi^2 \right) d\xi}{(k_1 - K + iG + \xi) U_a(k_1 + \xi)} + \right. \\ \left. + \int_0^{-\infty} \frac{\exp \left(\frac{1}{2} i t \eta^2 \right) i d\eta}{(k_1 - K + iG + i\eta) U_a(-k_1 + i\eta)} \right], \quad (4.17)$$

где

$$U_a = \exp(2ika)U.$$

Оба интеграла могут быть вычислены с помощью метода стационарной фазы при том же самом условии (4.15). В результате получаем, что оба интеграла в сумме дают

$$\frac{2U_a(k_0) (2\pi\hbar t/M)^{1/2} e^{-\frac{i\pi}{4}}}{(r - a) + vt - iwt}; \quad (4.18)$$

последнее выражение всегда мало по сравнению с (4.14) (даже в головной части пакета) и не влияет на общую форму пакета.

§ 5. Правила отбора по изотопическому спину для реакций с легкими ядрами

Некоторые авторы [136, 137] предложили и обсуждали правило отбора для ядерных реакций, которое может запрещать некоторые реакции на самосопряженных ядрах под действием дейтронов или α -частиц. Это правило отбора, так называемое „правило отбора по изотопическому спину“, основано на утверждении, что „в ядерных реакциях полный изотопический спин сохраняется“. Если, в частности, два исходных ядра имеют изотопические спины T_1 и T_2 , а конечные ядра, образующиеся в результате реакции, имеют изотопические спины T'_1 и T'_2 , то, согласно этому правилу отбора, реакция запрещена, если не выполняется векторное соотношение

$$T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2. \quad (5.1)$$

Если бомбардирующими и испускаемыми частицами являются α -частицы или дейтроны (которые имеют $T=0$), это правило отбора запрещает все реакции, в которых конечные состоя-

ния имеют изотопический спин, отличный от изотопического спина ядра-мишени. Хотя это правило имеет довольно значительное экспериментальное подтверждение, оно не имеет под собой строгой теоретической основы даже в тех случаях, когда состояния разделенных начальных и конечных ядер являются в высокой степени чистыми в отношении изотопического спина. Представим себе, например, реакцию, идущую через составное ядро с заметным запаздыванием во времени. Если возбуждение составного ядра соответствует области энергий, где его состояния весьма близки друг к другу, то, хотя кулоновские силы между протонами намного слабее ядерных сил, они вполне могут привести к смешению изотопических спинов соседних состояний. Тогда, хотя начальная разделенная система могла находиться в чистом изотопическом состоянии, составная система уже не будет находиться в чистом изотопическом состоянии, так что изотопический спин в ядерной реакции не обязательно сохраняется.

Недавно появились экспериментальные данные, показывающие, что при определенных условиях изотопический спин может и не сохраняться в ядерных реакциях. Теперь мы сформулируем теоретические условия, при которых мы можем ожидать сохранения изотопического спина как в реакциях, идущих с образованием составного ядра, так и в прямых реакциях.

а. Условия сохранения изотопического спина для реакций, идущих через составное ядро

Сохранение изотопического спина в данной реакции, идущей через составное ядро, зависит от структуры составного ядра. Оно зависит от относительных значений трех следующих величин, характеризующих составное ядро: 1) среднего расстояния D^J между уровнями с одинаковым спином, J и четностью, 2) средней полной ширины $\langle \Gamma^J \rangle$ этих уровней и 3) среднего матричного элемента $\langle H_c \rangle$ кулоновского взаимодействия между такими состояниями. В отличие от величин D и $\langle \Gamma \rangle$ величина $\langle H_c \rangle$, по-видимому, не сильно зависит от J и четности.

Наиболее простым критерием сохранения изотопического спина для состояний с данными J и четностью является условие

$$\langle H_c \rangle \ll D^J \text{ („статический“ критерий)}. \quad (5.2)$$

Этот критерий означает, что кулоновские силы настолько слабы, что не могут привести к заметному смешению изотопических спинов соседних состояний. Таким образом, состояния составного ядра будут иметь определенный изотопический спин, так что в реакции, идущей через это составное ядро, изотопический спин должен сохраняться. Мы назвали этот критерий „статическим“, поскольку он, как правило, применим для установления чистоты изотопического спина связанных стационарных состояний.

Другой критерий сохранения изотопического спина в реакциях не имеет никакого отношения к связанным состояниям, и мы назвали его „динамическим“ критерием. Он вытекает из того факта, что имеется время $\sim \hbar/\langle H_c \rangle$, связанное с действием кулоновских сил [138]. Если ширина составного состояния достаточно велика, состояние распадается до того, как кулоновское взаимодействие успеет произойти, в результате чего изотопический спин начальной разделенной системы сохранится. Поскольку время жизни типичного составного состояния равно $\hbar/\langle \Gamma^J \rangle$, динамический критерий можно записать в виде

$$\langle H_c \rangle \ll \langle \Gamma^J \rangle \text{ („динамический“ критерий)}. \quad (5.3)$$

Из рассмотрения обоих критериев следует, что если средний матричный элемент кулоновского взаимодействия меньше *либо* среднего расстояния между уровнями, *либо* средней ширины, то изотопический спин сохраняется. Если только величина матричного элемента оказывается порядка или больше как среднего расстояния между уровнями, так и средней ширины, изотопический спин может не сохраняться.

Рассмотрим более подробно эти два критерия для случаев, когда $\langle \Gamma^J \rangle < D^J$ и $\langle \Gamma^J \rangle > D^J$. (В дальнейшем мы опустим индекс J и будем считать, что он подразумевается.)

$\langle \Gamma \rangle < D$. Это условие означает, что при данной энергии бомбардирующих частиц может возбуждаться только один изолированный резонанс. Из условий (5.2) и (5.3) более слабым является условие $\langle H_c \rangle \ll D$. При $\langle \Gamma \rangle < D$ это обеспечивает сохранение изотопического спина, поскольку изотопический спин изолированного состояния составного ядра при этих условиях должен быть хорошим квантовым числом. Таким образом, более сильное условие $\langle H_c \rangle \ll \langle \Gamma \rangle$ автоматически обеспечивает сохранение изотопического спина.

$\langle \Gamma \rangle > D$. Это условие означает, что при данной энергии бомбардирующих частиц может возбуждаться много состояний составного ядра. Наиболее слабым из (5.2) и (5.3) является условие $\langle H \rangle \ll \langle \Gamma \rangle$. Рассмотрим подробно, почему сохраняется изотопический спин при комбинации условий $\langle \Gamma \rangle \gg \langle H \rangle$ и $\langle \Gamma \rangle > D$. В § 2 гл. XI мы пришли к заключению, что сечение $\sigma_{cc'}$ реакции, идущей через составные состояния λ , находящиеся в области континуума, определяется квадратом модуля выражения

$$\sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E - \frac{i}{2} \langle \Gamma \rangle}. \quad (5.4)$$

Это выражение было получено в предположении о хаотическом распределении знаков амплитуд приведенных ширин $\gamma_{\lambda c}$ и приводит к независимости процессов образования и распада составного ядра, которая и ожидалась для реакций, идущих через составное ядро.

Рассмотрим, как было предложено Шварцем¹⁾, обычный набор состояний X_{λ} полной системы и другой набор $X_{\mu T}^0$, который определен подобным же образом, за исключением лишь того, что в этом случае мы пренебрегаем кулоновскими силами, так что изотопический спин T является хорошим квантовым числом. Разложим состояние X_{λ} по состояниям $X_{\mu T}^0$

$$X_{\lambda} = \sum_{\mu} a_{\lambda \mu} X_{\mu T}^0; \quad (5.5)$$

обратное разложение $X_{\mu T}^0$ по X_{λ} будет

$$X_{\mu T}^0 = \sum_{\lambda} a_{\lambda \mu}^* X_{\lambda}. \quad (5.6)$$

Здесь

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda \mu} a_{\lambda \mu'}^* = \delta_{\mu \mu'}, \quad (5.7)$$

$$\sum_{\mu} a_{\lambda \mu} a_{\lambda' \mu}^* = \delta_{\lambda \lambda'}. \quad (5.8)$$

1) C. S c h w a r t z, частное сообщение.

Из первого разложения мы имеем соотношения

$$\gamma_{\lambda c} = \sum_{\mu} \dot{a}_{\lambda\mu} \gamma_{\mu c}^0, \quad (5.9)$$

$$\gamma_{\lambda c'} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} \gamma_{\mu c'}^0, \quad (5.10)$$

где $\gamma_{\mu c}^0$ и $\gamma_{\mu c'}^0$ — амплитуды приведенных ширин, определенные для набора $X_{\mu T}^0$. Из (5.5), (5.7), (5.9) и (5.10) следует, что

$$\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'} = \sum_{\mu} \gamma_{\mu c}^0 \gamma_{\mu c'}^0. \quad (5.11)$$

Предположим, что изотопические спины каналов c и c' равны T_c и $T_{c'}$. Поскольку состояния μ имеют определенный изотопический спин T , амплитуды приведенных ширин $\gamma_{\mu c}^0$ и $\gamma_{\mu c'}^0$ содержат соответственно δ_{TT_c} и $\delta_{TT_{c'}}$, так что

$$\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'} = (\text{Коэффициент}) \cdot \delta_{T_c T_{c'}}. \quad (5.12)$$

В сумме по λ можно ограничиться учетом тех состояний, энергия которых заключена в интервале энергий Δ , таком, что $\Delta \ll \langle \Gamma \rangle$, но $\Delta \gg \langle H_c \rangle$. Из условия $\langle H_c \rangle \ll \langle \Gamma \rangle$ и из того факта, что состояние λ содержит в основном лишь те состояния μ , которые лежат в интервале $\sim \langle H \rangle$, следует, что как состояние λ , так и состояния μ в интервале $\sim \Delta$ с высокой степенью точности образуют полные системы. Таким образом, приведенные выше разложения, и в частности соотношение (5.11), все еще являются справедливыми, если суммы ограничены указанным образом.

Из условия $\langle \Gamma \rangle > D$ следует, что для группы состояний λ в (5.4), в пределах энергетических интервалов Δ , знаменатель в (5.4) может быть приближенно заменен постоянной, вынесенной за знак суммы. Тогда из (5.12) следует, что выражение (5.4) содержит множитель $\delta_{T_c T_{c'}}$, откуда вытекает справедливость правила отбора по изотопическому спину при условиях $\langle \Gamma \rangle > D$, $\langle \Gamma \rangle \gg \langle H_c \rangle$.

б. Сохранение изотопического спина в реакциях других типов

Для полноты остановимся на некоторых вопросах, связанных с сохранением изотопического спина в прямых реакциях. В процессах неупругого рассеяния, протекающих согласно механизму, известному как механизм кулоновского возбуждения [57], значительную часть теоретического сечения составляет матричный элемент электромагнитного взаимодействия между начальным и конечным состояниями ядра-мишени. В общем случае этот матричный элемент взаимодействия между парами состояний ядра-мишени отличен от нуля, так что изменение изотопического спина ядра-мишени может быть равно -1 , 0 или 1 . Известно специальное правило отбора [134, 139, 140], имеющее место для электрических дипольных переходов, которые в самосопряженных ядрах запрещены, если $\Delta T = 0$.

Кроме того, имеются такие прямые реакции, как $(\alpha\alpha')$, (dd') , (pp') , (pn) , которые вызваны бомбардирующими частицами с большими параметрами удара, взаимодействующими с нуклонами, которые находятся на поверхности ядра. Поскольку в таких реакциях отсутствует запаздывание во времени, кулоновское взаимодействие между ядром-мишенью и бомбардирующей частицей не успевает проявиться, вследствие чего можно ожидать, что в таких реакциях полный изотопический спин должен сохраняться. Это, однако, не всегда означает, что изотопический спин ядра-мишени не может измениться в результате реакции. Ясно, что он не может измениться при бомбардировке α -частицами и дейтронами, поскольку у этих частиц $T = 0$, так что сохранение полного изотопического спина означает сохранение изотопического спина ядра-мишени. Если бомбардирующими частицами являются нуклоны, то положение меняется [31]. Например, если у ядра-мишени $T = 0$, то в результате столкновения изотопический спин ядра может возрасти до $T' = 1$ без изменения *полного* изотопического спина, равного $1/2$. Изменение изотопического спина ядра-мишени зависит от того: 1) вылетает ли в результате реакции падающий нуклон или же нуклон ядра-мишени, т. е. является ли вылетающий нуклон „прямым“ или же „обменным“, и 2) существуют ли зарядово-обменные силы

$$[1 + (\tau_i \cdot j\tau)] v(r_{ij}),$$

действующие между падающим нуклоном и ядром-мишенью.

Если вылетающий нуклон является обменным нуклоном, изотопический спин ядра-мишени может измениться, поскольку в этом случае не существует никакого правила отбора по изотопическому спину ядра-мишени. Если же вылетающий нуклон является прямым (падающим) нуклоном, то изотопический спин ядра может измениться лишь под действием зарядово-обменных сил.

Рассмотрим матричные элементы изотопического спина для прямого и обменного процессов. Для *прямого* процесса имеем

$$M = \langle \alpha T M, \beta \frac{1}{2} m | V_{0n} | \alpha' T' M', \beta' \frac{1}{2} m' \rangle, \quad (5.13)$$

где $\alpha T M, \beta \frac{1}{2} m$ обозначают начальные состояния соответственно ядра-мишени и падающей частицы, причем в этом обозначении выделены изотопический спин и его проекция, а все остальные квантовые числа включены соответственно в символы α и β . Конечные состояния отмечены штрихом. Здесь V_{0n} — оператор энергии взаимодействия падающего нуклона (индекс 0) с нуклоном ядра (индекс n), который имеет одну из двух следующих форм:

$$V_{0n} = v_{0n}(\mathbf{r}_{0n}) \begin{cases} 1 & \text{(обычное),} \\ \frac{1}{2} [1 + (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_n)] & \text{(зарядово-обменное),} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{2} [1 + (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_n)] \text{ (зарядово-обменное),} \quad (5.15)$$

где v_{0n} не зависит от изотопического спина.

Для начального состояния ядра-мишени мы можем воспользоваться разложением по методу генеалогических коэффициентов:

$$\begin{aligned} \langle \alpha T M | &= \sum \langle \alpha T | \{ \alpha_1 T_1 \alpha_2 \} \times \\ &\times \langle \alpha_1 T_1 M_1 | \langle \alpha_2 \frac{1}{2} m_2 | \left(T_1 \frac{1}{2} M_1 m_2 | T M \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

(и аналогично для конечного состояния). Здесь генеалогический коэффициент выбран так, чтобы включить векторную связь механического момента количества движения с полным моментом количества движения J_i ; символами $\alpha_1 T_1 M_1$ и $\alpha_2 \frac{1}{2} m_2$ обозначены „родительские“ состояния и состояния

n -го нуклона. После подстановки в (5.13) выражений для V_{0n} (5.14) и (5.15) получим соответственно

$$M = \delta_{TMm, T'M'm'} \sum_{T_1} \langle \alpha\beta | v | \alpha'\beta' \rangle_{T_1, \text{прям.}},$$

$$M = \frac{3}{2} \sum_{T_1} \left\{ \delta_{TMm, T'M'm'} + (-1)^{M'-M+T-T'} \times \right.$$

$$\times \left(1 \frac{1}{2} (m - m') m' \middle| \frac{1}{2} m \right) \times$$

$$\times (1T'(M-M')M'|TM) U \left(1 \frac{1}{2} TT_1, \frac{1}{2} T' \right) \left. \right\} \langle \alpha\beta | v | \alpha'\beta' \rangle_{T_1, \text{прям.}},$$

(5.17)

где матричный элемент $\langle \alpha\beta | v | \alpha'\beta' \rangle_{T_1, \text{прям.}}$ равен

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_1' \alpha_2 \alpha_2'} \langle \alpha T | \alpha_1 T_1 \alpha_2 \rangle \langle \alpha' T' | \alpha_1' T_1 \alpha_2' \rangle \langle \alpha_2 \beta | v_{0n} | \alpha_2' \beta' \rangle_{\text{прям.}} \quad (5.18)$$

Как и следовало ожидать, обычные силы не изменяют изотопический спин, а наличие зарядово-обменных сил может привести к его изменению. В последнем случае матричный элемент равен нулю, когда состояние конечного ядра и состояние ядра-мишени являются состояниями одного и того же само-сопряженного ядра и $T = T'$. Это достигается обращением в нуль коэффициента векторной связи ($T'100 | T0$), когда $T = T'$.

Обменный процесс. Если вылетающий нуклон является нуклоном ядра-мишени, а падающий нуклон остается в остаточном ядре, то вместо „прямых“ матричных элементов мы будем иметь „обменные“ матричные элементы

$$M = \sum_{T_1} \left(T_1 \frac{1}{2} M_1 m' | TM \right) \times$$

$$\times \left(T_1 \frac{1}{2} M_1 m | T' M' \right) \langle \alpha\beta | v_{0n} | \alpha'\beta' \rangle_{T_1, \text{обм.}},$$

$$M = \delta_{TMm, T'M'm'} \sum_{T_1} \langle \alpha\beta | v_{0n} | \alpha'\beta' \rangle_{T_1, \text{обм.}}.$$

Матричный элемент в случае зарядово-обменных сил обращается в нуль, когда $m = -m'$. Этого следовало ожидать, так как зарядово-обменные силы изменяют заряд, и поэтому любой нуклон ядра-мишени (обменный), испущенный благо-

даря этим силам, должен иметь тот же заряд, что и падающий нуклон, т. е. $m = m'$.

В связи с этим представляется весьма сомнительным, чтобы поверхностные нуклонно-ядерные реакции позволили установить какие-либо правила отбора по изотопическому спину конечного ядра. Вообще говоря, все четыре типа амплитуд реакции должны давать вклад в реакции (pp') и (nn'), а два из них должны давать вклад в реакции (np) и (pn). Даже если бы во взаимодействии между нуклонами не участвовали зарядово-обменные силы, вклад в первые два типа реакций давали бы две амплитуды, а во вторые два процесса — одна. Более того, поскольку угловые распределения всех четырех амплитуд должны быть качественно подобными (пик в направлении вперед в угловом распределении для средних энергий падающих нуклонов), по всей вероятности, нет никакой возможности выделения различных амплитуд из наблюдаемого углового распределения и, следовательно, их индивидуального изучения.

в. Обсуждение экспериментальных данных

Обзор экспериментального материала был дан Барчемом [141]. Рассмотрим сначала реакции ($\alpha\alpha'$), (dd'), (αd) и ($d\alpha$).

Последние два типа реакций являются, вероятно, реакциями, идущими через составное ядро, так как в них происходит большая перегруппировка нуклонов. Первые два типа реакций могут быть обусловлены как поверхностным механизмом, так и механизмом составного ядра, причем в образовании определенных конечных состояний преобладает, по-видимому, последний. Поскольку в поверхностных реакциях изотопический спин должен сохраняться, нарушения правила отбора могут быть обусловлены лишь вкладом механизма составного ядра. Для реакций (αd) и ($d\alpha$) отношение интенсивностей запрещенных групп к интенсивностям разрешенных групп может рассматриваться как мера нарушения правила отбора при *механизме составного ядра*. В случае реакций ($\alpha\alpha'$) и (dd') такой подход может привести к недооценке степени нарушения правила отбора, поскольку поверхностные реакции могут давать большие вклады в разрешенные группы. О том, насколько важны эти вклады, можно судить по угловому распределению.

Любой детальный теоретический анализ данных затруднен тем обстоятельством, что состояния с одинаковым спином и четностью могут иметь совершенно различные характеристики изотопического спина. Например, можно представить себе, что в данном ядре при данном возбуждении состояния с низким значением спина расположены плотно, так что $D \ll \langle H_c \rangle$, но имеют значительную ширину [т. е. $\langle \Gamma \rangle \gg \langle H_c \rangle$], в то время как состояния с высоким значением спина узки и расположены далеко друг от друга [т. е. $\langle \Gamma \rangle \ll D \ll \langle H_c \rangle$]. В обоих случаях правило отбора будет иметь место, но по различным причинам [критерий (5.3) для состояний с низким значением спина и критерий (5.2) для состояний с высоким значением спина]. Нарушение правила отбора может происходить только для состояний с промежуточным значением спина, но эти состояния составляют обычно лишь некоторую долю всех возбуждаемых состояний, так что в общем случае вопрос о применимости правила отбора должен решаться экспериментально.

Рассмотрим теперь состояния с данным спином при различных возбуждениях. При низких возбуждениях правило отбора должно быть применимо вследствие критерия (5.2). При высоких же возбуждениях это правило также применимо, но уже на основании критерия (5.3). Нарушение правила отбора будет иметь место в том случае, если эти две области не перекрываются, т. е. если при увеличении возбуждения D становится меньше $\langle H_c \rangle$ раньше, чем $\langle \Gamma \rangle$ становится больше $\langle H_c \rangle$. Такая промежуточная область реализуется на практике по крайней мере в одном частном случае (см. ниже случай $A = 14$).

Детальный анализ эмпирических данных затрудняется также тем, что имеющиеся данные носят спорадический характер. Зачастую измерения производились при фиксированной энергии бомбардирующих частиц и реакция наблюдалась лишь под одним углом. Важно отметить, что в одной из первых попыток наблюдения реакции в некотором интервале энергий и углов было открыто наиболее серьезное нарушение правила отбора по изотопическому спину (см. ниже случай $A = 18$).

Обсудим теперь существующие экспериментальные данные по ядерным реакциям, идущим через составное ядро, которые существенны с точки зрения сохранения изотопического спина. Мы не будем касаться неупругого рассеяния и зарядово-обменных нуклон-нуклонных реакций, поскольку в этих реак-

циях не ожидается каких-либо правил отбора по изотопическому спину. Отметим, однако, тот любопытный экспериментальный факт, что в реакции $N^{14}(p, p')$ при энергии бомбардирующих частиц 9,5 Мэв [142] и 17 Мэв¹⁾ отсутствует протонная группа, соответствующая первому возбужденному состоянию N^{14} при энергии 2,31 Мэв. В то же время в реакции $N^{14}(p, n)O^{14}$ ($E_p = 17$ Мэв) [143] выход группы, обусловленной возбуждением соответствующего изобарного состояния, легко обнаруживается. Реакция $N^{14}(n, p)C^{14}$ исследовалась только при низких энергиях. Подобная ситуация имеет место и в случае Li^6 , когда состояние с $T = 1$ при энергии 3,6 Мэв лишь слабо возбуждается в реакции $Li^6(p, p')$ при энергиях бомбардирующих частиц 15 и 19 Мэв [144, 145]. В случае реакции $N^{14}(p, p')$ отсутствие группы, соответствующей первому возбужденному уровню, было недавно убедительно объяснено Левинсоном и Банерджи [146], которые показали, что уменьшение сечения образования этой группы обусловлено тем же самым случайным сокращением матричного элемента, которое приводит к большому времени жизни C^{14} относительно β -распада.

В дальнейшем мы не будем давать ссылки на оригинальные работы, однако их можно найти в опубликованных обзорах экспериментальных данных [147—149].

$A = 8$. В реакции $Li^6(d, d')Li^{6*}$ при $E_d = 7,4$ Мэв и $\theta = 90^\circ$ первое состояние Li^{6*} с $T = 1$ при энергии 3,57 Мэв не проявляется, хотя состояние при энергии 2,19 Мэв ($T = 0$) легко возбуждается. Энергия возбуждения составного ядра Be^8 равна 28 Мэв, где уровни с низкими значениями спина, по-видимому, имеют большую ширину, плотно расположены и перекрываются (если провести экстраполяцию, исходя из данных, наблюдаемых при энергии возбуждения около 20 Мэв).

$A = 10$. В реакции $Li^6(\alpha\alpha')Li^{6*}$ при $E_\alpha = 30$ Мэв и при всех углах возбуждается состояние с энергией 2,19 Мэв ($T = 0$), но не возбуждается состояние с энергией 3,57 Мэв ($T = 0$). Было также обнаружено состояние с энергией 4,52 Мэв ($T = 0$), и верхний предел относительной интенсивности группы может быть принят равным 5% [51] от интенсивности групп, соответствующей состоянию с энергией 3,57 Мэв. Угловое распределение наблюдаемых протонных

¹⁾ R. Sherr, частное сообщение.

групп имеет большой максимум в направлении вперед. Последнее указывает на то, что за эту реакцию ответствен главным образом поверхностный механизм. Поскольку в такой реакции не может возбуждаться состояние с $T=1$, наблюдаемый предел относительной интенсивности не является веским основанием для утверждения о возможном несохранении изотопического спина за счет вклада механизма составного ядра. Возбуждение составного ядра B^{10} составляет около 22 Мэв, где, если судить по ситуации, имеющей место при энергии 7 Мэв, уровни с низким значением спина широки и плотно расположены.

$A=12$. Реакция $B^{10}(dd')B^{10*}$ наблюдалась при энергиях 6,7; 7,6 и 14 Мэв. В первых трех случаях при фиксированных углах были обнаружены возбужденные состояния с $T=0$, с энергиями возбуждения 0,72; 2,15 и 3,58 Мэв. Состояние с энергией 1,74 Мэв обнаружено не было. Верхний предел относительной интенсивности группы, соответствующей возбужденному состоянию с энергией 1,74 Мэв, был найден равным около 2% по сравнению с указанными выше наблюдаемыми группами. Однако при энергии 14 Мэв была обнаружена группа, соответствующая уровню с энергией 1,74 Мэв. Было найдено, что ее относительная интенсивность равна примерно 5% ¹⁾. На основании упоминавшихся выше соображений это значение может рассматриваться как нижний предел относительной интенсивности вклада механизма составного ядра, величина которого, вероятно, в несколько раз больше. Поскольку энергия возбуждения составного ядра C^{12} равна примерно 37 Мэв, при которой все состояния с наиболее существенными значениями спина удовлетворяют критерию (5.3), то подобное нарушение правила отбора является неожиданным.

Весьма правдоподобно, что вообще в таких случаях вклад в запрещенную группу обусловлен некоторым процессом, подобным кулоновскому возбуждению. Однако это трудно было бы объяснить процессом такого рода, поскольку это означает, что переход должен быть типа МЗ, сечение которого весьма мало. Представляет интерес теоретическое исследование таких процессов для надбарьерных энергий.

1) J. M. Mc G u e r, частное сообщение.

$A = 14$. Хотя реакция $B^{10}(\alpha, \alpha')B^{10*}$ не может быть использована для изучения состояния B^{10} с энергией $1,74 \text{ Мэв}$ ($T = 1$), реакция $B^{10} + \alpha$ дает очень интересные сведения об изотопическом спине в составном ядре N^{14} при энергиях возбуждения $\sim 13 \text{ Мэв}$. В реакциях $B^{10}(\alpha, p)C^{13}$, $B^{10}(\alpha, n)N^{13}$ было изучено большое количество изолированных резонансов; полученные опытные данные были проанализированы с помощью резонансной формулы для одного уровня [150, 151]. Если изотопический спин является хорошим квантовым числом для состояний составного ядра, то приведенные ширины, отвечающие испусканию нейтрона и протона, должны быть равны между собой. Однако найдено, что эти ширины для состояний при $12,69 \text{ Мэв}$ (3^-) и $12,79 \text{ Мэв}$ (4^+) отличаются между собой множителем, равным примерно 5, причем это различие нельзя отнести за счет какого-либо изменения радиусов ядерного взаимодействия. Отсюда приходится сделать заключение о том, что изотопический спин не является хорошим квантовым числом. Следующее 4^+ состояние наблюдается при $12,92 \text{ Мэв}$. Это указывает на то, что расстояние между уровнями с одинаковым спином и четностью равно порядка сотен килоэлектронвольт. (Ширины же этих уровней оказываются порядка десятков килоэлектронвольт.) Таким образом, кулоновский матричный элемент порядка сотен килоэлектронвольт будет достаточен для того, чтобы привести к значительной смеси состояний с различными изотопическими спинами. Согласно оценкам, которые были произведены для некоторых специальных случаев [134, 139, 140], такие значения матричного элемента являются вполне разумными. Отсюда становится ясным, что в N^{14} для состояний со спинами 3^- и 4^+ существует область энергий возбуждения порядка 13 Мэв , которая является промежуточной между областями применимости критериев (5.2) и (5.3).

$A = 16$. Реакция $N^{14}(d, d')N^{14*}$ изучалась при энергии бомбардирующих частиц $6,98 \text{ Мэв}$. При этом было обнаружено состояние с энергией $3,95 \text{ Мэв}$ ($T = 0$), в то время как состояние с энергией $2,31 \text{ Мэв}$ ($T = 1$) не было найдено. Верхний предел относительной интенсивности возможной дейтронной группы, отвечающей возбужденному состоянию с энергией $2,31 \text{ Мэв}$, составляет около 5% от интенсивности наблюдаемой группы, обусловленной возбуждением уровня

с энергией 3,95 Мэв. Возбуждение составного ядра O^{16} составляет примерно 27 Мэв, в связи с чем можно думать, что все состояния с низкими спинами удовлетворяют критерию (5.3).

$A = 18$. Реакция $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$ изучалась при энергиях дейтронов от 6 до 7,5 Мэв под различными углами [152]. Кроме того, она изучалась при энергии бомбардирующих частиц, равной 19 Мэв для углов, больших 15° [153]. В последнем случае состояние N^{14} при энергии 2,31 Мэв ($T=1$) обнаружено не было; было установлено, что верхний предел интенсивности группы, соответствующей возбуждению этого уровня, составляет 4% от интенсивности группы, соответствующей переходу в основное состояние. Однако при более низких энергиях [152] наблюдалась группа α -частиц, соответствующая возбуждению состояния с энергией 2,31 Мэв; она имела интенсивность порядка 5—10% от интенсивности групп, соответствующих переходу в состояние с энергией 3,95 Мэв и в основное состояние. Энергетическая зависимость выхода группы, соответствующей уровню с энергией 2,31 Мэв, обнаруживает аномалии типа резонансов при энергиях 6,2; 6,7 и 7,0 Мэв с ширинами порядка 0,25 Мэв. В пике при энергии 7,0 Мэв под углом 30° интенсивность этой группы составляет около половины интенсивности группы, отвечающей переходу на уровень 3,95 Мэв, и около $1/7$ интенсивности группы, соответствующей переходу в основное состояние. Кривая возбуждения для выхода группы, соответствующей переходу в основное состояние, также обнаруживает максимумы, однако они лежат не при тех энергиях, которые наблюдались в случае группы, соответствующей переходу на уровень с энергией 2,31 Мэв.

Энергия возбуждения составного ядра при бомбардировке дейтронами с энергиями 19 и 6,5 Мэв равна соответственно 24 и 13 Мэв. Хотя в первом случае энергия возбуждения достаточна для того, чтобы наиболее важные состояния удовлетворяли критерию (5.3), во втором случае это не так. Согласно имеющимся данным о спектре F^{18} при энергиях порядка 11 Мэв, много уровней все еще очень хорошо разрешены, хотя и расположены близко друг к другу. Поэтому представляется вполне возможным, что при энергии 13 Мэв мы имеем ситуацию, весьма сходную с ситуацией, которая имеет место в N^{14} при той же самой энергии,

именно при этом возбуждении мы попадаем в промежуточную область между областями, где удовлетворяются (5.2) и (5.3). Если это так, то наблюдаемое нарушение сохранения изотопического спина становится вполне понятным. Форма кривой возбуждения „запрещенной“ группы указывает на то, что основную роль здесь играют, по-видимому, изолированные резонансы.

Реакция $N^{14}(\alpha, \alpha')N^{14}$ наблюдалась под углом 35° при энергии α -частиц, равной $21,2$ Мэв [154—156]. Возбужденное состояние при энергии $2,31$ Мэв ($T=1$) не было обнаружено, так же как и состояния при энергии $8,06$ и $8,70$ Мэв, у которых, по-видимому, также $T=1$. Однако было найдено состояние при энергии $9,17$ Мэв, хотя сильное $E1$ -излучение, соответствующее переходу в основное состояние, подтверждает, что у этого уровня $T=1$. [Возможно, при этой энергии лежат два уровня.]¹⁾ Большинство других найденных состояний имеет, вероятно, $T=0$, так что вся картина в целом, по-видимому, говорит о том, что сохранение изотопического спина имеет место. Энергия возбуждения составного ядра равна ~ 21 Мэв. Та же реакция изучалась при энергии 31 Мэв при всех углах вплоть до угла 70° . Верхний предел интенсивности группы, соответствующей переходу на уровень с энергией $2,31$ Мэв, был найден равным 5% от интенсивности наблюдаемых групп.²⁾

$A=22$. Реакция $Ne^{20}(d, \alpha)F^{18}$ исследовалась при $E_d=7,8$ Мэв, причем было обнаружено до десяти состояний F^{18} . Интересной особенностью α -спектра является то, что наиболее интенсивная группа лежит при энергии, соответствующей первому возбужденному состоянию F^{18} с $T=1$ и с энергией $1,05$ Мэв.

Это может иметь два объяснения: 1) указанная группа соответствует состояниям с $T=0,8$ (лежащим, возможно, при энергиях $0,94$ и $1,25$ Мэв) и 2) имеет место очень сильное нарушение сохранения изотопического спина. Может случиться, что последнее соответствует действительности, поскольку положение здесь совершенно подобно тому, которое имеется в случае реакции $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$, где, как мы видели,

1) V. K. Rasmussen, частное сообщение. (См. также [154—156].)

2) H. Watters, частное сообщение. (См. также [154—156].)

изотопический спин плохо сохраняется. Энергия возбуждения составного ядра N^{22} составляет около 18 Мэв, что значительно выше энергии возбуждения составного ядра в реакции $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$, равной 13 Мэв. Хотя спектр уровней Na^{22} изучен плохо, можно полагать, что при энергии 18 Мэв плотность уровней будет выше, чем в случае F^{18} , вследствие более высокой энергии возбуждения, а также в связи с тем, что в данном случае составное ядро содержит большее число нуклонов.

$A=26$. Реакция $Mg^{24}(d, \alpha)Na^{22}$ исследовалась под углом 90° при энергиях дейтронов 5, 6 и 7 Мэв [157]. Наблюдаемая группа соответствует состоянию Na^{22} при энергии 0,59 Мэв, которое было обнаружено в реакции $F^{19}(\alpha, n\gamma)Na^{22}$ [158], и имеет примерно ту же энергию, что и первое возбужденное состояние с $T=1$ [159—161]. Поскольку при $E_d=6$ Мэв выход группы, соответствующей этому состоянию, примерно равен интенсивности группы, отвечающей переходу в основное состояние, можно предполагать, что имеет место нарушение закона сохранения изотопического спина. Энергия возбуждения составного ядра Al^{26} составляет ~ 17 Мэв.

$A=30$. Реакция $Si^{28}(d, \alpha)Al^{26}$ исследовалась при $E_d=7$ Мэв и $\theta_\alpha=90^\circ$ [162]. Первое возбужденное состояние Al^{26} при 0,22 Мэв обнаружено не было, точно так же как и состояние при 2,074 Мэв. Энергия возбуждения составного ядра P^{30} была равна ~ 19 Мэв. Наличие состояний с энергиями 0,22 и 2,074 Мэв было установлено при исследовании реакции $Mg^{25}(p, \gamma)Al^{26}$ [163]; энергия уровня 0,22 Мэв примерно равна энергии первого возбужденного состояния с $T=1$. Это, казалось бы, говорит о том, что в реакции $Si^{28}(d, \alpha)Al^{26}$ при $E_d=7$ Мэв и $\theta_\alpha=90^\circ$ имеет место сохранение изотопического спина. Однако в более полных исследованиях [164], выполненных при энергиях от 5,5 до 7,5 Мэв и при углах от 15° до 130° , была обнаружена группа α -частиц, соответствующая возбужденному состоянию с энергией 0,22 Мэв. Интенсивность этой группы изменялась в ~ 10 раз. Отношение интенсивности этой группы к интенсивности группы, соответствующей переходу в основное состояние, менялось от 0,65 до 2. Для уровня с энергией 7,03 Мэв отношение этих интенсивностей уменьшалось от 0,62 при $\theta_\alpha=15^\circ$ до 0,12 при $\theta_\alpha=60^\circ$, а при больших

углах обнаружить группу, отвечающую переходу на уровень с энергией $0,22 \text{ Мэв}$, не представлялось возможным. Этим и объясняется то, что в предыдущих исследованиях она не была обнаружена.

$A = 34$. Реакция $S^{32}(d, \alpha)P^{30}$ исследовалась при энергиях бомбардирующих частиц от $1,6$ до $2,9 \text{ Мэв}$ [165], что соответствует энергии возбуждения составного ядра, равной примерно $13,6 \text{ Мэв}$. Наблюдения, производившиеся под углами 63 и 90° , показали, что переход на уровень P^{30} с энергией $0,71 \text{ Мэв}$ также вероятен, как и переход в основное состояние, однако уровень с энергией $0,69 \text{ Мэв}$ возбуждается очень слабо. Исследования реакции $Si^{29}(p, \gamma)P^{30}$ [166] подтвердили, что состояние с энергией $0,69 \text{ Мэв}$ является самым низшим возбужденным состоянием P^{30} с $T = 1$. Учет смещения уровня за счет кулоновского взаимодействия [165] приводит к понижению энергии уровня на $\sim 0,33 \text{ Мэв}$. Если состояние с энергией $0,69 \text{ Мэв}$ имеет $T = 1$, а состояние с энергией $0,71 \text{ Мэв}$ имеет $T = 0$, то данные о реакции (d, α) указывают на сохранение изотопического спина.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КУЛОНОВСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ НЕЙТРОНОВ

Настоящее приложение посвящено исследованию решений уравнения (III. 2.9):

$$u''(\rho) - [l(l+1)\rho^{-2} + 2\eta\rho^{-1} \mp 1] u(\rho) = 0, \quad (\text{П. 1})$$

где штрих означает дифференцирование по ρ ; верхний и нижний знаки относятся к каналам с положительной и отрицательной энергиями соответственно. Величины ρ и η определяются следующим образом:

$$\rho = kr, \\ \eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2 M}{\hbar^2 k},$$

где k — волновое число канала, выражаемое через энергию относительного движения в том же канале:

$$k = \left(\frac{2M|E|}{\hbar^2} \right)^{1/2}.$$

Здесь M — приведенная масса в заданном канале; Z_1 и Z_2 — заряды двух частиц, относящихся к заданному каналу, а r — расстояние между частицами.

Решениями уравнения (П. 1), приемлемыми с физической точки зрения, являются следующие:

1) Для *положительных энергий* такими решениями u_l являются функции F_l и G_l — соответственно регулярное и сингулярное в точке $r = 0$ решения, имеющие асимптотические формы:

$$F_l \sim \sin\left(\rho - \eta \ln 2\rho - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_l\right), \quad (\text{П. 2a})$$

$$G_l \sim \cos\left(\rho - \eta \ln 2\rho - \frac{1}{2} l\pi + \sigma_l\right), \quad (\text{П. 2б})$$

где σ_l — фаза, равная $\arg \Gamma(1 + l + i\eta)$. В случае $\eta = 0$ (нейтронные каналы) функции F_l и G_l имеют простую связь со сферическими функциями полуцелого порядка:

$$F_l = \left(\frac{\pi\rho}{2}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = \rho j_l(\rho), \quad (\text{П. 3а})$$

$$\begin{aligned} G_l &= (-1)^l \left(\frac{\pi\rho}{2}\right)^{1/2} J_{-(l+\frac{1}{2})}(\rho) = \\ &= (-1)^l \rho j_{-l}(\rho). \end{aligned} \quad (\text{П. 3б})$$

2) Для отрицательных энергий единственным решением, приемлемым с физической точки зрения, является экспоненциально затухающее решение

$$u_l = W\left(-\eta, \quad l + \frac{1}{2}, \quad 2\rho\right),$$

имеющее асимптотическую форму

$$W \sim e^{-\rho - \eta \ln 2\rho}. \quad (\text{П. 4})$$

Здесь W — функция Уиттекера, которая может быть представлена в интегральной форме

$$\begin{aligned} W\left(-\eta, \quad l + \frac{1}{2}, \quad 2\rho\right) &= \\ &= \frac{\exp(-\rho - \eta \ln 2\rho)}{\Gamma(1 + l + \eta)} \int_0^\infty t^{l+\eta} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{2\rho}\right)^{l-\eta} dt. \end{aligned} \quad (\text{П. 5})$$

При $\eta = 0$ (нейтронные каналы) функция W имеет простую связь с функцией Бесселя 2-го рода:

$$W\left(0, \quad l + \frac{1}{2}, \quad 2\rho\right) = \left(\frac{2\rho}{\pi}\right)^{-1/2} K_{l+\frac{1}{2}}(\rho). \quad (\text{П. 6})$$

а. Общие формулы

В R -матричной теории величинами, содержащими функции F , G и W , являются S , P и ϕ . При расчетах часто оказывается удобным иметь дело непосредственно с величинами S , P и ϕ или по крайней мере с величинами, тесно

с ними связанными, а именно с так называемыми амплитудой A и фазой ϕ . Для положительных энергий имеем

$$F = A \sin \phi, \quad G = A \cos \phi, \quad (\text{П. 7})$$

$$A = + (F^2 + G^2)^{1/2} = \left(\frac{\rho}{P} \right)^{1/2}, \quad (\text{П. 8})$$

$$\frac{\rho A'}{A} = S. \quad (\text{П. 9})$$

Для отрицательных энергий единственной величиной, с которой приходится иметь дело, является S :

$$\frac{\rho W'}{W} = S. \quad (\text{П. 10})$$

Описание функций F и G с помощью фазы ϕ и амплитуды A лежит в основе так называемых „методов фазы и амплитуды“, полезных в численных расчетах при больших ρ . Согласно (П. 8), фактор проницаемости P обратно пропорционален A^2 , а фактор сдвига S равен логарифмической производной A , умноженной на ρ . Вронскиан (III. 2.12) через A и ϕ записывается в виде

$$A^2 \phi' = 1. \quad (\text{П. 11})$$

С помощью рекуррентных формул Пауэла [167], относящихся к функциям F и G и их производным, одним из авторов ($P. T.$) были получены рекуррентные формулы для S , P и ϕ :

$$P_l = \frac{a_l P_{l-1}}{(b_l - S_{l-1})^2 + P_{l-1}^2}, \quad (\text{П. 12})$$

$$S_l + b_l = \frac{a_l (b_l - S_{l-1})}{(b_l - S_{l-1})^2 + P_{l-1}^2}, \quad (\text{П. 13})$$

$$\phi_l = \phi_{l-1} - \arctg [P_{l-1} / (b_l - S_{l-1})], \quad (\text{П. 14})$$

где

$$a_l = \rho^2 + \left(\frac{\rho \eta}{l} \right)^2,$$

$$b_l = l + \frac{\rho \eta}{l}.$$

Поскольку относящаяся к отрицательной энергии функция Уиттекера получается с точностью до постоянного множителя, то, производя в выражениях для функции O , относящейся

к положительной энергии, замену $\rho \rightarrow i\rho$, $\eta \rightarrow -i\eta$, получаем, что рекуррентная формула (П. 13) будет справедлива и в этом случае, если только в выражении для a_l заменить ρ^2 на $-\rho^2$. Ошибки, возникающие в результате многократного применения формулы (П. 14), будут накапливаться в области барьера, где ϕ и A малы. В этой области $G \gg F$, в результате чего приближенное выражение

$$F_l G_l \approx \frac{\rho}{[(2l+1)^2 + x^2]^{1/2}} \quad (\text{П. 15})$$

оказывается справедливым, так что мы в качестве формулы эквивалентной (П. 14), можем использовать приближенное выражение

$$\phi_l \approx \frac{F_l}{G_l} \approx \frac{P_l}{[(2l+1)^2 + x^2]^{1/2}}, \quad (\text{П. 16})$$

где

$$x = (8\rho\eta)^{1/2}.$$

Все полученные выше результаты справедливы также при $\eta = 0$, т. е. в случае отсутствия кулоновского поля.

Величина P всегда больше нуля и стремится к нулю при $\rho \ll 2\eta$ (энергия E много меньше высоты барьера B) и стремится к ρ при $\rho \gg 2\eta$ ($E \gg B$).

Наоборот, величина S всегда меньше нуля и стремится к нулю при $\rho \gg 2\eta$ ($E \gg B$), но остается конечной при $\rho \ll 2\eta$ [см. ниже соотношение (П. 24)]. То, что величина S всегда меньше нуля, не является очевидным фактом, однако один из авторов (*P. T.*) показал это путем использования соотношения

$$\frac{1}{2P} = \frac{F^2 + G^2}{2\rho} \int_0^\infty dz e^{-2\rho z} Q(z),$$

где

$$Q(z) = \exp(2\eta \arctg z) (1 + z^2)^{l\eta} \times \\ \times {}_2F_1(l+1+i\eta, -l+i\eta, 1; -z^2).$$

Отсюда получаем

$$S\left(\frac{F^2 + G^2}{\rho}\right) = FF' + GG' = - \int_0^\infty z e^{-2\rho z} Q'(z) dz.$$

Отрицательный знак величины S следует из того, что производная Q' положительна; это легко усмотреть из разложения функции ${}_2F_1$ в ряд по z^2 .

Мы не можем доказать, что величина dS/dE является положительной или нулем, но в большинстве практически важных случаев это утверждение оказывается правильным [см. ниже соотношение (П. 30)]. В частности, это справедливо для каналов с отрицательной энергией [см. (П. 27)].

б. Приближение Венцеля — Крамерса — Бриллюэна для кулоновских функций в области барьера

В области барьера мы для нашего исследования можем воспользоваться методом Венцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ), если только величина $[1/4 x^2 + l(l+1)]$ велика по сравнению с ρ^2 и 1. Этот метод оказался очень точным при исследовании вопросов, относящихся к α -распаду. Фактор проницаемости в приближении ВКБ имеет вид

$$P_l \approx \frac{\rho}{G_l^2} = \zeta_l e^{-2C_l}, \quad (\text{П. 17})$$

где

$$\zeta_l = \left(L^2 + \frac{1}{4} x^2 - \rho^2 \right)^{1/2}, \quad L = l + \frac{1}{2},$$

$$C_l = \eta \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\eta - \rho}{(\gamma_l^2 + L^2)^{1/2}} \right] - \zeta_l + L \ln \frac{L\zeta_l + L^2 + \frac{1}{8} x^2}{\rho (\gamma_l^2 + L^2)^{1/2}};$$

значения арксинуса лежат в интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Здесь мы воспользовались вариантом метода ВКБ, предложенным Лэнжером [168] и состоящим в замене l на $(l + 1/2)$. Соответствующий фактор сдвига имеет вид

$$S_l \approx \frac{\rho G_l'}{G_l} = -\zeta_l + \frac{1}{2} \zeta_l^{-2} \left(\frac{1}{8} x^2 + L^2 \right), \quad (\text{П. 18})$$

а его скорость изменения в зависимости от энергии может быть получена из соотношения

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_a \left(\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \right) = \left(\frac{\partial S_l}{\partial \rho^2} \right)_x \approx \frac{1}{2} \zeta_l^{-4} \left(\zeta_l^3 + \frac{1}{8} x^2 + L^2 \right). \quad (\text{П. 19})$$

В случае α -распада второе слагаемое в правой части соотношения (П. 18) мало по сравнению с первым, так что в этом случае

$$S_l \approx -\zeta_l. \quad (\text{П. 20})$$

Полученный нами *фактор проницаемости* P_l отличается от *проницаемости барьера* P_l , определяемого в работе Бете [1] соотношением (632а), множителем ζ_l . Для фазы ϕ_l и произведения $F_l G_l$ мы получаем в приближении ВКБ выражения (П. 16) и (П. 15), где, однако, знаменатели заменены на $2\zeta_l$. Если условия применимости приближения ВКБ выполняются, то эти различия оказываются, конечно, несущественными, и соотношения (П. 15) и (П. 16) сами могут рассматриваться как формулы приближения ВКБ.

в. Разложение кулоновских функций по функциям Бесселя мнимого аргумента

Разложение кулоновских функций по функциям Бесселя мнимого аргумента оказывается полезным при исследовании свойств легких ядер при низких энергиях [169, 127, 128]. Такого рода разложения быстро сходятся, если параметр η велик по сравнению с единицей и параметром x . Здесь мы приведем лишь несколько частных случаев таких разложений, полезных при исследовании ядерных реакций вблизи порога.

Сингулярная функция G может быть представлена в виде

$$G_l = -x B_l(\eta) C_0^{-1} K_{2l+1}(x) Q_l(x, \eta), \quad (\text{П. 21})$$

где

$$B_l = [1 + \eta^{-2} l^2] [1 + \eta^{-2} (l-1)^2]^2 \dots [1 - \eta^{-2}]^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{12} \eta^{-2} l(l+1)(2l+1) + \dots,$$

$$C_0 = \left[\frac{2\pi\eta}{\exp(2\pi\eta) - 1} \right]^{1/2},$$

$$Q_l(x, \eta) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{\eta-2}{24(l+1)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{K_{2l+3}(x)}{K_{2l+1}(x)} \left[1 - 2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 l(l+1) \right] - 1 \right\} + \dots, \quad (\text{П. 22})$$

так что в области барьера, где $G \gg F$, фактор проницаемости равен

$$P_l \approx \frac{\rho}{G_l^2} = \frac{(\pi/4) \exp(-2\pi\eta)}{K_{2l+1}^2(x) B_l^2(\eta) Q_l^2(x, \eta)}. \quad (\text{П. 23})$$

Для $S_l \approx \rho G_l' / G_l$ можно получить следующий результат:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho G_l'}{G_l} \right) = -\frac{x}{2} \frac{K_{2l}(x)}{K_{2l+1}(x)} - l. \quad (\text{П. 24})$$

Можно также получить поправку к (П. 24) для отличной от нуля энергии. Выражение для этой поправки мы приведем лишь в частном случае $l=0$:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial(\rho G'/G)}{\partial(\eta^{-2})} \right)_x = \frac{1}{24} \left(\frac{x}{2} \right)^4 \times \\ \times \left[\frac{K_3(x) - 3K_1(x) - \frac{1}{2} x K_0(x)}{K_1(x)} + \left(\frac{x}{2} \right) \frac{K_3(x) K_0(x)}{K_1(x)} \right]. \quad (\text{П. 25})$$

Функция $K_\nu(x)$ представляет собой „сингулярную“ функцию Бесселя мнимого аргумента, определенную Ватсоном [170]. Главным членом в разложении регулярной функции является

$$F_l = (\pi x)^{1/2} e^{-\pi\eta} I_{2l+1}(\beta), \quad (\text{П. 26})$$

а главным членом в разложении произведения (FG) является приближенное выражение (П. 15); здесь I_ν — „регулярная“ функция Бесселя мнимого аргумента по определению Ватсона.

2. Нейтронные волновые функции

Для нейтронов решения F и G , отвечающие положительной энергии, сводятся к функциям Бесселя (П. 3а) и (П. 3б). Функции F и G удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho^{-l} F_l &= U_l \sin \rho - \rho V_l \cos \rho, \\ \rho^{-l} G_l &= U_l \cos \rho + \rho V_l \sin \rho, \end{aligned} \quad (\text{П. 27})$$

где U_l и V_l являются полиномами по ρ^2 . В табл. П. 1 представлены величины U , V , $A_l z^l$, $A_l z^l S_l$ и $(A_l z^l)^2 (dS_l/dz)$, являющиеся полиномами по z (мы положили $\rho^2 = z$). Фаза ϕ_l , фигурирующая в (П. 7), удовлетворяет соотношению

$$\text{tg}(\rho - \phi_l) = \frac{V_l}{U_l}. \quad (\text{П. 28})$$

Таблица П. 1

Величины, характеризующие нейтронные волновые функции с положительной энергией ($z = \rho^2$)

l	$U_l \rho^l$	$V_l \rho^{l-1}$	$A_l z^l$	$A_l S_l z^l$	$(A_l z^l)^2 \frac{dS}{dz} =$ $= (A_l z^l) \left(\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \right) \left(\frac{dS}{dE} \right)$
0	1	0	1	0	0
1	1	1	$1+z$	-1	1
2	$3-z$	3	$9+3z+z^2$	$-3(6+z^2)$	$3(z^2+12z+9)$
3	$15-6z$	$15-z$	$225+45z+6z^2+z^3$	$-3(225+30z+2z^2)$	$3(2z^4+60z^3+765z^2+1800z+3375)$

В табл. П. 2 представлены величины W , S и $[dS/d(\rho^2)]$, соответствующие отрицательным энергиям. Выражения для S , указанные в табл. П. 2, получаются из выражений для $L = S + iP$, полученных с помощью табл. П. 1, путем замены $\rho \rightarrow i\rho$.

Таблица П. 2

Величины, характеризующие волновые функции состояний с отрицательной энергией ($\rho = kr$)

l	$W\left(0, l + \frac{1}{2}, 2\rho\right)$	S	$-\frac{dS}{d(\rho^2)} = \frac{\hbar^2}{2Ma^2} \cdot \frac{dS}{dE}$
0	$e^{-\rho}$	$-\rho$	$1/2\rho$
1	$(1+1/\rho)e^{-\rho}$	$-\rho - \frac{1}{1+\rho}$	$\frac{2+\rho}{2(1+\rho)^2}$
2	$(1+3/\rho+3/\rho^2)e^{-\rho}$	$-\rho - \frac{3\rho+6}{\rho^2+3\rho+3}$	$\frac{\rho^3+6\rho^2+12\rho+6}{2(\rho^2+3\rho+3)^2}$
3	$(1+6/\rho+15/\rho^2+15/\rho^3)e^{-\rho}$	$-\rho - \frac{6\rho^2+30\rho+45}{\rho^3+6\rho^2+15\rho+15}$	$\frac{\rho^5+12\rho^4+60\rho^3+150\rho^2+180\rho+90}{2(\rho^3+6\rho^2+15\rho+15)^2}$

Из табл. П. 1 и П. 2 мы видим, что величина dS/dE испытывает разрыв при $E = 0$ лишь в случае $l = 0$.

д. Производная от величины S по энергии; фактор сдвига

Рассмотрим сначала каналы с отрицательной энергией, для которых, согласно (П. 10), $S = \rho W'/W$. Из соотношения (V. 1.5) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_a \left(\frac{\hbar^2}{2Ma^2}\right) &= -\left(\frac{\partial S}{\partial(\rho^2)}\right)_{\rho, \eta} = \\ &= \frac{1}{\rho} [W(\rho)]^{-2} \int_{\rho}^{\infty} [W(\rho')]^2 d\rho', \quad (\text{П. 29}) \end{aligned}$$

где мы для краткости величину $W(-\eta, l+1/2, 2\rho)$ обозначили через $W(\rho)$. Из (П. 29) и из определений приведенной ширины γ^2 и сдвига уровня Δ [см. (III. 4.7а) и (IV. 1.17в)] следует, что

$$\frac{d\Delta}{dE} = -\gamma^2 \left(\frac{dS}{dE}\right)_a = +2\theta^2 \left(\frac{\partial S}{\partial(\rho^2)}\right)_{\rho, \eta} = -\int_{\rho}^{\infty} |\Psi|^2 d\tau, \quad (\text{П. 30})$$

т. е. величина $-(d\Delta/dE)$ равна интегралу по области, соответствующей каналу с отрицательной энергией, от квадрата модуля волновой функции Ψ , которая нормирована на единицу во внутренней области. Следовательно, если Γ — любая величина, зависящая от квадрата волновой функции, нормированной во внутренней области, то величина $\Gamma [1 - (d\Delta/dE)]^{-1}$ будет соответствовать величине Γ , определенной для „ренормированной“ волновой функции, область нормировки которой включает также область канала с отрицательной энергией.

Из соображений непрерывности мы ожидаем приблизительно тех же результатов и для положительных энергий и высоких барьеров канала, где нижнему пределу ρ интеграла соответствует классическая точка поворота. Это можно видеть из соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1}^{\rho_2} (G^2 + F^2) d\rho &= \left[-\frac{1}{\rho} \left(E \frac{\partial S}{\partial E} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2P}{\rho} \left\{ F \left(E \frac{\partial G}{\partial E} \right) - G \left(E \frac{\partial F}{\partial E} \right) \right\} \right]_{\rho_1}^{\rho_2}, \quad (\text{П. 31}) \end{aligned}$$

получающегося в результате применения теоремы Грина (V. 1.9) для решения $(G + iF)$. Выбирая ρ_2 несколько бóльшим точки

поворота ρ_0 и используя тот факт, что при синусоидальных F и G первое слагаемое в правой части соотношения (П. 31) стремится к нулю, а второе к ρ , находим

$$\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \frac{\partial S}{\partial E} \approx \frac{1}{\rho G^2(\rho)} \int_{\rho}^{\rho_0} G^2(\rho') d\rho', \quad (\text{П. 32})$$

где мы воспользовались тем фактом, что $F \ll 1 \ll G$ для $\rho \ll \rho_0$. Отсюда следует, что величина $[1 - (d\Delta/dE)]$, где величина Δ определена для открытого канала с барьером, приводит к изменению нормировки, соответствующему включению области канала (до точки поворота) в нормировочный объем.

*е. Численные формулы; графики и таблицы
кулоновских функций*

При рассмотрении функций каналов полезны следующие численные формулы:

$$\rho = ka = 0,21954 M^{1/2} E^{1/2} a,$$

$$\rho^2 = 0,048196 MEa^2,$$

$$\eta = Z_1 Z_2 e^2 M / \hbar k = 0,158052 Z_1 Z_2 M^{1/2} E^{-1/2},$$

$$2\pi\eta = 0,99307 Z_1 Z_2 M^{1/2} E^{-1/2},$$

$$x^2 = 8\rho\eta = 4g^2 = 0,069396 MZ_1 Z_2 a,$$

$$B = Z_1 Z_2 e^2 / a = 1,43987 Z_1 Z_2 a^{-1} Mэв,$$

$$Z = E/B = (\rho^2 / 2\rho\eta) = 0,69451 EaZ_1^{-1} Z_2^{-1},$$

$$k^2 = 4,8196 ME \text{ (барн)}^{-1},$$

$$4\pi/k^2 = 2,6073 M^{-1} E^{-1} \text{ барн},$$

$$\hbar = 0,65817 \cdot 10^{-21} Mэв \cdot \text{сек},$$

$$(2Ma^2/\hbar) = 3,17216 \cdot 10^{-23} Ma^2 \text{ сек},$$

$$(\hbar^2/2Ma^2) = 20,748 (Ma^2)^{-1} Mэв,$$

где

E — энергия относительного движения в системе центра тяжести, выраженная в $Mэв$;

a — радиус канала в единицах 10^{-13} см;

$M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ — приведенная масса в единицах массы протона;

B — высота кулоновского барьера.

Для кулоновских функций известно довольно большое число таблиц и графиков. Наиболее полезными для изучения ядерных реакций являются следующие:

Графики. 1) В обзоре [171] приведены графики, соответствующие случаю бомбардировки протонами отдельных конкретных ядер, а именно представлены графики величины Γ , обозначаемой нами как Γ_{CL} ; Γ_{CL} удовлетворяет соотношениям

$$\Gamma_{CL} = P \left(\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \right)^{1/2},$$

$$\theta^2 \equiv \gamma^2 \left(\frac{\hbar^2}{Ma^2} \right)^{-1} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{CL}} \left(\frac{Ma^2}{8\hbar^2} \right)^{1/2} = 0,0549 \left(\frac{M^{1/2}a\Gamma}{\Gamma_{CL}} \right),$$

где Γ — наблюдаемая парциальная ширина уровня, выраженная в $M\text{эв}$, а величины a и M имеют прежний смысл.

2) В работе [172] приведены графики A_l , ϕ_l и ряда других величин как функций ρ и η .

Таблицы. 1) В обзоре [173] приведены таблицы величин A , ϕ , F , G и т. д. для значений величины $\rho/2\eta$ от единицы до значения, при котором становится применимым приближение ВКБ.

2) Таблицы кулоновских функций имеются также в работе [174].

Авторы благодарны проф. Вигнеру за постоянные советы в течение шести лет подготовки этой работы, а также д-ру Фогту, прочитавшему рукопись настоящей работы и сделавшему критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe H. A., Rev. Mod. Phys., **9**, 69 (1937) (см. перевод: Г. Бете, Физика ядра, М. — Л., 1947).
2. Bohr N., Nature, **137**, 344 (1936).
3. Bohr N., Science, **86**, 161 (1937).
4. Weisskopf V. F., Phys. Rev., **52**, 295 (1937).
5. Bethe H. A., Placzek G., Phys. Rev., **51**, 450 (1937).
6. Weisskopf V. F., Ewing D. H., Phys. Rev., **57**, 472 (1940).

7. Friedman F. L., Weisskopf V. F., в книге „Niels Bohr and the Development of Physics“, London, 1955 (см. перевод: „Нильс Бор и развитие физики“; ИЛ, 1958).
8. Weisskopf V. H., Wigner E. P., *Zs. f. Phys.*, **63**, 54; 65, \mp 18 (1930).
9. Breit G., Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **49**, 519 (1936).
10. Breit G., Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **49**, 642 (1936).
11. Breit G., *Phys. Rev.*, **40**, 127 (1932).
12. Kapur P. L., Peierls R. E., *Proc. Roy. Soc.*, **A166**, 277 (1938).
13. Peierls R. E., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **44**, 242 (1947).
14. Breit G., *Phys. Rev.*, **58**, 506 (1940).
15. Breit G., *Phys. Rev.*, **69**, 472 (1946).
16. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **70**, 15 (1946).
17. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **70**, 606 (1946).
18. Wigner E. P., Eisenbud L., *Phys. Rev.*, **72**, 29 (1947).
19. Wigner E. P., *Journ. Am. Phys. Soc.*, **17**, 99 (1949).
20. Feshbach, Porter, Weisskopf, *Phys. Rev.*, **90**, 166 (1953).
21. Feshbach, Porter, Weisskopf, *Phys. Rev.*, **96**, 448 (1954).
22. Bethe H. A., *Phys. Rev.*, **57**, 1125 (1940).
23. Feshbach, Peaslee, Weisskopf, *Phys. Rev.*, **71**, 145 (1947).
24. Feshbach H., Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **76**, 1550 (1949).
25. Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **97**, 224 (1955).
26. Bloch C., *Journ. phys. rad.*, **17**, 510 (1956).
27. Bloch C., *Nucl. Phys.*, **3**, 137 (1957).
28. Brown G. E., de Dominicis C. T., *Proc. Phys. Soc.*, **A70**, 668 (1957).
29. Butler S. T., *Phys. Rev.*, **80**, 1095 (1950).
30. Butler S. T., *Proc. Roy. Soc.*, **A208**, 559 (1951).
31. Austern, Butler, McManus, *Phys. Rev.*, **92**, 350 (1953).
32. Hayakawa, Kowai, Kikuchi, *Progr. Theor. Phys.*, **13**, 415 (1955).
33. Brown G., Muirhead H., *Phil. Mag.*, **2**, 473 (1957).
34. Bloch C., *Nucl. Phys.*, **4**, 503 (1957) (см. статью II Дополнения к настоящей книге).
35. Brown G. E., de Dominicis C. T., *Proc. Phys. Soc.*, **A70**, 686 (1957).
36. Blatt J. M., Weisskopf V. F., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952 (см. перевод: Дж. Блатт, Дж. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).

37. Peaslee D. C., *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **5**, 99 (1955).
38. Kinsey B. B., *Encyclopaedia of Physics*, Vol. 40, Berlin, 1957.
39. Burcham W. E., *Encyclopaedia of Physics*, Vol. 40, Berlin, 1957.
40. Breit G., *Phys. Rev.*, **58**, 1068 (1940).
41. Schuster W., Tiomno J., *Phys. Rev.*, **83**, 249 (1951).
42. Goertzel G., *Phys. Rev.*, **73**, 1463 (1948).
43. Reynolds H. L., Zucker A., *Phys. Rev.*, **101**, 166 (1956).
44. Eisberg, Igo, Wegner, *Phys. Rev.*, **100**, 1309 (1955).
45. Likely J. G., Brady F. P., *Phys. Rev.*, **104**, 118 (1956).
46. Cohen B. L., Handley T. H., *Phys. Rev.*, **93**, 514 (1954).
47. Allan D. L., *Proc. Phys. Soc.*, **A70**, 195 (1957).
48. Hornyak W. F., Sherr R., *Phys. Rev.*, **100**, 1409 (1955).
49. Beneviste, Finke, Martinelli, *Phys. Rev.*, **101**, 655 (1956).
50. Haffner J. W., *Phys. Rev.*, **103**, 1398 (1956).
51. Watters H. J., *Phys. Rev.*, **103**, 1763, (1956).
52. Chase D. M., *Phys. Rev.*, **104**, 838 (1956).
53. Haykawa, Yoshida, *Proc. Phys. Soc.*, **A68**, 656 (1955).
54. Wandel C. F., Thesis, Copenhagen, 1953 (не опубликовано).
55. Moshinsky M., *Rev. mat. fis.*, **V**, 1 (1956).
56. Brink D. M., *Proc. Phys. Soc.*, **A68**, 994 (1955).
57. Alder, Bohr, Huus, Mottelson, Winther, *Rev. Mod. Phys.*, **28**, 432 (1956) (см. перевод в сборнике „Деформация атомных ядер“, ИЛ, 1958).
58. Breit G., Ebel M. E., *Phys. Rev.*, **104**, 1030 (1956).
59. Sachs R. G., *Nuclear Theory*, Cambridge, 1953.
60. Condon E. U., Shortley G. H., *Theory of Atomic Spectra*, New York, 1953 (см. перевод со 2-го издания: Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1947).
61. Wigner E. P., *Cött. Nachr.* **31**, 546 (1932).
62. Biedenharn L. C., Rose M. E., *Rev. Mod. Phys.*, **25**, 729 (1953).
63. Huby R., *Proc. Phys. Soc.*, **A67**, 1113 (1954).
64. Bloch, Hull, Broyles, Bouricius, Freeman, Breit, *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 147 (1951).
65. Blatt J. M., Biedenharn L. C., *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 258 (1952).
66. Biedenharn, Blatt, Rose, *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 249 (1952).
67. Teichmann T., *Phys. Rev.*, **77**, 506 (1950).
68. Teichmann T., Thesis, Princeton University, 1949 (не опубликовано).
69. Jackson J. L., Thesis, New York, 1950 (не опубликовано).

70. Wigner E. P., Proc. Camb. Phil. Soc., 47, 790 (1951).
71. Wigner E. P., Ann. Math., 53, 36 (1951).
72. Wigner E. P., Ann. Math., 55, 7 (1952).
73. Wigner E. P., Ann. Math., 59, 669 (1952).
74. Wigner E. P., Neumann J. V., Ann. Math., 59, 418 (1954).
75. Teichmann T., Wigner E. P., Phys. Rev., 87, 123 (1952).
76. Porter C. E., Thomas R. G., Phys. Rev., 104, 483 (1956).
77. Van Kampen N. G., Physica, 20, 115 (1954).
78. Van Kampen N. G., Phys. Rev., 91, 1267 (1953).
79. Van Kampen N. G., Rev. mex. fis., 2, 233 (1953).
80. Wigner E. P., Phys. Rev., 98, 145 (1955).
81. Blatt J. M., Jackson J. D., Phys. Rev., 86, 18 (1949).
82. Bethe H. A., Phys. Rev., 76, 38 (1949).
83. Teichmann T., Phys. Rev., 83, 141 (1951).
84. Jackson J. D., Blatt J. M., Rev. Mod. Phys., 22, 77 (1950).
85. Kohn W., Phys. Rev., 74, 1763 (1948).
86. Jackson J. L., Phys. Rev., 83, 301 (1951).
87. Wigner E. P., Proc. Natl. Acad. Sci. (U. S. A.), 32, 302 (1946).
88. Schiff L. I., Quantum Mechanics, New York, 1949 (см. перевод: Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957).
89. Simon A., Welton T. A., Phys. Rev., 90, 1036 (1953).
90. Simon A., Welton T. A., Phys. Rev., 94, 943 (1954).
91. Simon A., Phys. Rev., 92, 1050 (1953).
92. Satchler G. R., Proc. Phys. Soc., A68, 1041 (1955).
93. Wick G. C., Phys. Rev., 75, 1459 (1949).
94. Siegert A. J. F., Phys. Rev., 56, 750 (1939).
95. Humblert J., Thesis, Roy. soc. des sci. de Liège, Ser. 4, 7, No. 4 (1952).
96. Moshinsky M., Phys. Rev., 91, 984 (1953).
97. Moshinsky M., Acad. Bras. de cien., 25, No. 4 (1953).
98. Newton T. D., Canad. Journ. Phys., 30, 53 (1952).
99. Kalckar, Oppenheimer, Serber, Phys. Rev., 52, 273 (1937).
100. Bohr, Peierls, Placzek, Nature, 144, 200 (1939).
101. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953 (см. перевод: Ф. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, 1959/60).
102. Snowden S. C., Whitehead W. D., Phys. Rev., 94, 1267 (1954).
103. Weisskopf V. F., Helv. Phys. Acta, 23, 187 (1950).

104. Weisskopf V. F., *Science*, **113**, 101 (1951) [см. перевод в сборнике ПСФ, № 11, (1951)].
105. Oleska S., *Phys. Rev.*, **101**, 1034 (1956).
106. Bloch C., *Phys. Rev.*, **93**, 1094 (1954).
107. Hauser W., Feshbach H., *Phys. Rev.*, **87**, 366 (1952).
108. Wolfenstein L., *Phys. Rev.*, **82**, 690 (1951).
109. Coldberger N., *Phys. Rev.*, **74**, 1269 (1948).
110. Lane A. M., Wandel C. F., *Phys. Rev.*, **98**, 693 (1955).
111. Clementel E., Villi C., *Nuovo Cimento*, **10**, 176 (1955).
112. Morrison, Muirhead, Murdock, *Phil. Mag.*, **46**, 475 (1955).
113. Lane, Thomas, Wigner, *Phys. Rev.*, **98**, 693 (1955).
114. Cini M., Fubini S., *Nuovo Cimento*, **10**, 75 (1955).
115. Vogt E., *Phys. Rev.*, **101**, 1792 (1956).
116. Vogt E., Lascoux J., *Phys. Rev.*, **107**, 1028 (1957).
117. Lane A. M., Verlet L., *Phys. Rev.*, **100**, 956 (1955).
118. Wigner E. P., *Ann. Math.*, **62**, 548 (1955).
119. Ofstrosky, Breit, Johnson, *Phys. Rev.*, **49**, 22 (1936).
120. Freeman B. E., McHale J. L., *Phys. Rev.*, **89**, 223 (1953).
121. Johnson J. L., McHale J. L., *Phys. Rev.*, **91**, 87 (1953).
122. Johnson J. L., Jones H. M., *Phys. Rev.*, **93**, 1286 (1954).
123. Krotkov R., *Canad. Journ. Phys.*, **33**, 622 (1955).
124. Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **81**, 148 (1951).
125. Ehrman J. B., *Phys. Rev.*, **81**, 412 (1951).
126. Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **88**, 1109 (1952).
127. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **73**, 1002 (1948).
128. Breit G., *Phys. Rev.*, **107**, 1612 (1957).
129. Snow G., Thesis, Princeton University, 1950 (не опубликовано).
130. Jackson J. D., *Canad. Journ. Phys.*, **34**, 767 (1956).
131. Dirac P. A. M., *Principles of Quantum Mechanics*, New York, 1947, p. 188—204 (см. перевод: П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, М. — Л., 1960).
132. Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **84**, 1061 (1951).
133. Rose M. E., *Multipole Fields*, New York, 1955 (см. перевод: М. Роуз, *Поля мультиполей*, ИЛ, 1957).
134. MacDonald W. M., *Phys. Rev.*, **98**, 60 (1955).
135. Thomas R. G., *Progr. Theor. Phys.*, **12**, 253 (1954).
136. Adair R. K., *Phys. Rev.*, **86**, 155 (1952).
137. Christy R. F., *Phys. Rev.*, **89**, 839 (1953).
138. Morinaga H., *Phys. Rev.*, **97**, 444 (1954).
- ell-Mann M., Telegdi V. L., *Phys. Rev.*, **91**, 169 (1953).

140. Radicati L. A., Phys. Rev., **87**, 521 (1952).
141. Burcham W. E., Progress in Nuclear Physics, London, 1955.
142. Freemantle, Prowse, Rotblat, Phys. Rev., **96**, 1268 (1954).
143. Ajzenberg F., Franzen W., Phys. Rev., **94**, 409 (1954).
144. Sherr, Hornyak, Yoshiki, Bull. Am. Phys. Soc., **1**, 231 (1956).
145. Levinson, Banerjee, Albright, Tobaeman, Bull. Am. Phys. Soc., **1**, 194 (1956).
146. Levinson C., Banerjee M. K. (в печати).
147. Ajzenberg F., Lauritsen T., Rev. Mod. Phys., **24**, 321 (1952).
148. Ajzenberg F., Lauritsen T., Rev. Mod. Phys., **27**, 77 (1955).
149. Endt P. M., Kluyver J. C., Rev. Mod. Phys., **26**, 95 (1954).
150. Shire, Wormald, Lindsay-Jones, Lunden, Stanley, Phil. Mag., **44**, 1197 (1953).
151. Shire E. S., Edge R., Phil. Mag., **46**, 640 (1955).
152. Browne C. P., Phys. Rev., **100**, 1252 (1955).
153. Freemantle, Gibson, Prowse, Rotblat, Phys. Rev., **92**, 1268 (1953).
154. Carmichael, Sampson, Johnson, Phys. Rev., **91**, 473 (A) (1953).
155. Miller, Gupta, Rasmussen, Sampson, Phys. Rev., **98**, 1184 (A) (1955).
156. Miller, Carmichael, Gupta, Rasmussen, Sampson, Phys. Rev., **101**, 740 (1956).
157. Browne C. P., Cobb W. C., Phys. Rev., **99**, 644 (A) (1955).
158. Heydenberg N. P., Temmer G. M., Phys. Rev., **94**, 1252 (1954).
159. Moszkowski S. A., Peaslee D. C., Phys. Rev., **93**, 455 (1954).
160. Stahelin P., Helv. Phys. Acta, **26**, 691 (1953).
161. Stahelin P., Phys. Rev., **92**, 1076 (L) (1953).
162. Browne C. P., Phys. Rev., **95**, 860 (1954).
163. Sherr, Kavanagh, Mills, Phys. Rev., **98**, 1185 (1954).
164. Browne C. P., Bull. Am. Phys. Soc., **1**, 212 (1956).
165. Lee L. L., Mooring F. P., Phys. Rev., **104**, 1342 (1956).
166. Broude, Green, Singh, Wilmott, Phys. Rev., **101**, 1052 (1956).
167. Powell J. L., Phys. Rev., **72**, 626 (1947).

168. Langer R. E., Phys. Rev., 51, 669 (1937).
169. Beckerley J. G., Phys. Rev., 67, 11 (1945).
170. Watson G. N., The Theory of Bessel Functions, New York, 1948 (см. перевод: Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, М. — Л., 1955).
171. Christy R. F., Latter R., Rev. Mod. Phys., 20, 185 (1948).
172. Sharp, Gove, Paul, Chalk. River Report, TRI--70 (1953) (не опубликовано).
173. Bloch, Hull, Broyles, Bouricius, Freeman, Breit, Rev. Mod. Phys., 23, 147 (1951).
174. National Bureau of Standards Tables of Coulomb Wave Functions, Vol. 1, Appl. Math. Series, № 17 (1952).

ДОПОЛНЕНИЕ

І. ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИИ

Г. Фешбах

H. Feshbach, Ann. of Phys., 5, 357—390 (1958)

§ 1. Введение

В настоящее время хорошо известно, что различные стороны взаимодействия нуклона с ядром по-своему проявляются в ядерных реакциях и рассеянии. В соответствии с этим имеется и целый ряд методов описания ядерных реакций, о которых нам напоминают такие термины, как составное ядро, статистическая гипотеза, оптическая модель, прямое и поверхностное взаимодействия и т. д. Поскольку все явления, характеризующиеся указанными понятиями, обусловлены самыми общими свойствами системы многих тел [1], то следовало бы развить такую теорию ядерных реакций, из которой каждое из этих явлений можно было бы получить естественным и прямым путем. Именно такого рода формализм и предлагается в настоящей статье.

Частично эта программа была выполнена Томасом [2] и Блохом [3], которые использовали соответствующим образом модифицированную теорию ядерных резонансов Вигнера [4, 5], а также Брауном и Доминисисом [6], применявшими формализм Капура — Пайерлса [7]. Настоящая работа основывается на новой формулировке резонансной теории, в основе которой, как представляется по крайней мере автору, лежат значительно более простые понятия и метод решения и которая непосредственно приводит к оптической модели, прямым взаимодействиям и т. д. Некоторые элементы процедуры, которую мы будем применять, были уже использованы Ламаршем и Фешбахом [8], Иосидой [9, 10] и Ньютоном [11].

В оставшейся части введения дадим краткий обзор. С нашей точки зрения центральное место в теории ядерных реакций занимает концепция составного ядра [1, 12—16]. Наличие узких резонансов (например, в случае реакций под действием медленных нейтронов) непосредственно указывает на существование долгоживущих составных систем, образованных

из ядра-мишени и падающего нуклона. Энергетическая зависимость сечения вблизи резонанса дается знаменитой формулой Брейта — Вигнера [15], с помощью которой экспериментальные данные описываются с замечательной точностью. Например, сечение упругого рассеяния нейтронов с $l=0$ на ядре-мишени, имеющем спин I , равно

$$\sigma_e = 4\pi\lambda^2 \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)} \left| \sin \delta e^{i\delta} - \frac{\frac{1}{2} \Gamma_n^{(J)} e^{2i\delta}}{E - E_c + \frac{i}{2} \Gamma_c^{(J)}} \right|^2, \quad (1.1)$$

где λ — длина волны падающего нейтрона, деленная на 2π , а s — его спин ($s=1/2$). Уровень составного ядра в резонансе при энергии E_c имеет спин J , полную ширину $\Gamma_c^{(J)}$ и нейтронную ширину $\Gamma_n^{(J)}$. Величина δ представляет собой сдвиг фазы, обязанный так называемому потенциальному рассеянию. Соответствующая амплитуда $e^{i\delta} \sin \delta$, медленно меняющаяся с изменением энергии, описывает рассеяние в области между резонансами.

Формулу Брейта — Вигнера, разумеется, необходимо обобщить на случай перекрывающихся резонансов. Наиболее полное решение этой задачи было дано Вигнером, Айзенбудом и Тейхманом [4] и Капуром и Пайерлсом [7]. Полученные ими результаты слишком сложны, чтобы о них здесь можно было говорить; они, однако, довольно детально обсуждались Блаттом и Вайскопфом [12] и Саксом [13] в их книгах по теории ядра. Нам же достаточно будет указать здесь лишь некоторые из основных идей. В этих теориях все конфигурационное пространство делится на две части. Одна часть — это внутренняя область, в которой все нуклоны, сильно взаимодействуя друг с другом, образуют почти стабильные конфигурации — состояния составного ядра. Другая часть — внешняя область — состоит из каналов, соответствующих различным способам, которыми может распадаться составное ядро. Во внешней области продукты реакции разделяются, так что их единственным взаимодействием является взаимодействие неядерного типа (например, кулоновское). Поверхность, разделяющая внешнюю и внутреннюю области в канале α , расположена от центра ядра на расстоянии R_α (R_α — радиус канала), которое, грубо говоря, равно радиусу ядра R . Пол-

ный набор волновых функций для внутренней области получается из требования, что эти функции являются решениями уравнения Шредингера в задаче многих тел и удовлетворяют на поверхности (радиусе) канала однородным граничным условиям. Трактовки Вигнера и Пайерлса отличаются друг от друга лишь выбором граничных условий. Волновая функция, описывающая истинный процесс реакции, может тогда быть описана во внутренней области с помощью разложения по указанному полному набору, а во внешней — известными волновыми функциями каждого канала. Амплитуды различных допустимых реакций будут, очевидно, зависеть от радиусов каналов R_α , от собственных значений энергии составного ядра (в формализме Капура — Пайерлса эти собственные значения комплексны) и от перекрытия $u_{c\alpha}$ волновой функции составного ядра и волновой функции соответствующего канала α . Ширины Γ_n пропорциональны квадрату величин $u_{c\alpha}$. Широкая область применимости и эффективность этой теории хорошо известны. Она дает все „кинематические особенности“ теории реакций, т. е. те особенности, которые не зависят от деталей динамики нуклон-нуклонного взаимодействия (за исключением лишь такого качественного свойства, как его короткодействующий характер). Она не только описывает резонансы, но и является также исходной ступенью для теории оптической модели. Однако в этом формализме имеет место одна нежелательная особенность, заключающаяся в явной зависимости от радиусов каналов R_α . Радиус канала четко не может быть определен, так что в результате существует несколько наборов величин R_α , приводящих к одним и тем же амплитудам рассеяния и реакции. Однако такого рода инвариантность не является очевидным следствием теории. Эта трудность устраняется в формализме, представленном в настоящей работе.

Теория Вигнера — Пайерлса дает строгое выражение для случая, когда большое количество уровней перекрывается или же является одновременно существенным вследствие немонохроматичности падающего пучка. В этом случае различные сечения будут иметь плавную зависимость от энергии. Разложение по резонансам, очевидно, уже не будет удобным представлением. В этом пункте, для того чтобы получить сумму по резонансным членам, вводится *статистическая гипотеза* [17—19]. Для того чтобы пользоваться статистической теорией, необходимо сделать некоторое допущение

относительно распределения вероятности значений u_{ca} и уровней составного ядра E_c . В настоящее время известны некоторые эмпирические данные, касающиеся этих величин [20]. В первой части статистической гипотезы утверждается, что положительные и отрицательные значения величины u_{ca} одинаково вероятны. В этом случае все интерференционные члены автоматически обращаются в нуль, а матрицы переходов и сечения представляются в виде ряда резонансных членов, соответствующих каждому резонансу E_c в отдельности [21, 22]. Вторая часть статистической гипотезы содержит усреднение по энергии как следствие предположения, что энергетические уровни E_c распределены хаотически. Если обе части статистической гипотезы использовать для исследования сечения реакции, то можно получить выражения, представленные в работах Вулфенштейна [23] и Хаузера и Фешбаха [24]. Если же ее использовать при вычислении диагональных элементов матрицы переходов, относящихся к входному каналу, то можно получить амплитуду рассеяния „модели комплексного потенциала“ (оптической модели) [21], т. е. гладко меняющуюся среднюю амплитуду рассеяния. „Модель комплексного потенциала“ мы получим в том случае, если дополнительно предположим, что существует волновая функция, описывающая движение падающего нуклона, которая удовлетворяет одночастичному уравнению Шредингера с комплексным потенциалом. Этот потенциал подбирается так, чтобы он давал такую же среднюю амплитуду рассеяния, какую дает теория реакций. В работах Томаса [22], Блоха [25], Боукока [26] и Брауна и Доминисиса [6] было показано, каким образом все это можно проделать. Обзор указанных работ содержится в статье автора [27].

В упомянутых работах существование комплексного потенциала обычно постулируется, а затем уже определяются его свойства. В настоящей работе мы получим явное (хотя, быть может, ненужное в практическом отношении) выражение для комплексного потенциала, которое не только будет указывать на сам факт существования этого потенциала, но и поможет нам получить сведения о его свойствах.

Таким образом, статистическая гипотеза приводит нас как к статистической теории ядерных реакций, так и к „модели комплексного потенциала“. Важно отметить, что обычно в этих теориях рассматриваются лишь средние сечения. Для

более полной теории необходимо сделать некоторое предположение относительно флуктуаций около среднего значения [28], которые, как это легко можно видеть из распределения Портера — Томаса, могут быть велики.

Как известно [29, 30], статистическая теория ядерных реакций не находится в полном согласии с экспериментом. Например, в случае неупругого рассеяния нейтронов статистическая теория, по-видимому, вполне удовлетворительна, пока нейтроны теряют существенную часть своей начальной энергии. Крэнберг и Левин [31] измерили угловое распределение неупруго рассеянных нейтронов для ряда элементов и для энергий в интервале до нескольких *Мэв* и получили хорошее согласие с теорией, развитой в работе [24]. Аналогичный результат был получен Стюартом и Розеном [32], которые для больших энергий (14 *Мэв*) нашли, что те нейтроны, которые потеряли значительную часть своей энергии (количество таких нейтронов составляет около 90% от всех нейтронов, испытавших неупругое рассеяние), имеют изотропное угловое распределение. Никаких измерений по определению поляризации неупруго рассеянных нейтронов не производилось. Статистическая теория предсказывает, что в среднем не должно быть какой-либо поляризации. Однако, когда нейтроны теряют небольшую часть своей энергии или, другими словами, когда возбуждаются лишь низколежащие уровни ядра-мишени, статистическая теория оказывается несправедливой. Например, в экспериментах Стюарта и Розена [32] угловое распределение оставшихся 10% неупруго рассеянных нейтронов имело сильный пик в направлении вперед. Угловое распределение не было симметричным относительно угла 90° . Полный обзор по этому вопросу содержится в работах [29, 30].

Это явление, конечно, можно было бы объяснить частично упомянутыми выше флуктуациями около средних значений. Однако более правдоподобное объяснение (на основе представления о прямом взаимодействии) было предложено Остерном, Батлером и Мак-Манусом [33]. Эти авторы рассматривают процесс, при котором имеет место прямое столкновение между падающим нуклоном и нуклоном ядра-мишени и при котором последний покидает ядро, взаимодействуя с ним лишь как с целым; это взаимодействие описывается комплексной потенциальной ямой. Такая ситуация легко осуществляется, когда падающий нуклон находится вблизи поверхности

ядра-мишени, которое при этом должно быть сравнительно непрозрачным. Остерн и др. исследовали именно эту ситуацию. В работах [8, 34] рассматривались, кроме того, и объемные эффекты. Весьма тщательный анализ, произведенный Левинсоном и Банерджи, показал, что для понимания процесса неупругого рассеяния протонов на углероде необходимо сделать предположение не только о наличии прямого взаимодействия, но и о том, что неупруго рассеянные протоны (так же как и упруго рассеянные протоны) должны двигаться в комплексном потенциале. Более подробное обсуждение этого вопроса читатель может найти в статье Батлера [35] и в монографии Батлера [36].

Прямое взаимодействие другого рода приводит к возбуждению ротационных уровней остаточного ядра. В последнее время эта проблема была рассмотрена Иосидой [9, 10] и Чейзом, Уилетсом и Эдмондсом [37].

Возникает вопрос, почему в общей теории ядерных реакций до сих пор не учитывались прямые взаимодействия; ведь статистическая гипотеза, вообще говоря, несправедлива, и предположение о полной хаотичности является не совсем корректным. Между величинами u_{ca} , вероятно, должна иметь место определенная корреляция, в результате которой прямые взаимодействия оказываются возможными. Однако этот путь, по-видимому, является очень неудобным для описания прямых взаимодействий. Одна из задач настоящей статьи состоит именно в том, чтобы дать более удовлетворительную трактовку этой проблемы.

Коротко остановимся теперь на содержании настоящей работы. В § 2 получен обобщенный оптический потенциал и дисперсионное соотношение между его вещественной и мнимой частями. В § 3 показано, что этот потенциал приводит к резонансам. Получена формула Брейта—Вигнера и ее обобщение на случай перекрывающихся уровней. В § 4 построена модель комплексной ямы. В §§ 2—4 обсуждается случай, когда имеет место лишь чисто упругое рассеяние. В § 5 эти результаты обобщаются на случай реакций. Получен нерезонансный вклад в амплитуду реакций, причем этот вклад интерпретируется как описывающий эффекты прямого взаимодействия. В § 6 обсуждаются эффекты, связанные с твердой сердцевиной потенциала парного взаимодействия, и эффекты, обусловленные тождественностью частиц. Часть материала

из § 2 была уже опубликована автором в обзорной статье [27], где используется формализм проекционных операторов. Следует отметить, что легко (и по этой причине это здесь не сделано) изложить все содержание настоящей статьи в рамках указанного формализма.

§ 2. Обобщенный оптический потенциал

Рассмотрим волновую функцию Ψ , описывающую систему, состоящую из $A + 1$ нуклонов (ядро-мишень с массовым числом A плюс нуклон). Обозначим волновые функции, описывающие всевозможные состояния ядра-мишени, через $\psi_i(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)$, а соответствующие энергии — через ϵ_i . Переменные \mathbf{r}_k включают пространственную координату, спин и изотопический спин. Волновые функции ψ_i образуют полную ортонормированную систему. Разложим, как это делают многие авторы (например, Лейн, Томас и Вигнер [38]), волновую функцию Ψ по этой полной системе:

$$\Psi = \sum_i \psi_i(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) u_i(\mathbf{r}_0). \quad (2.1)$$

В этой сумме слагаемое с $i = 0$ описывает систему, состоящую из ядра-мишени в основном состоянии и нуклона с энергией E во входном канале. Другие значения индекса i соответствуют возбужденным каналам, в которых испускаемой частицей является нуклон, соответствующим образом отличающийся от падающего нуклона (например, энергией, спином, изотопическим спином и т. д.). Разложение (2.1) удобно для описания как упругого и неупругого рассеяния (n, n'), (p, p'), так и реакций (n, p) и (p, n). Оно неудобно для исследования таких реакций, как (n, α), где испускаемая частица является сложной. Тем не менее благодаря полноте системы функций ψ_i сумма (2.1) содержит в себе и эти процессы; но, чтобы записать их в явном виде, в разложении необходимо произвести определенную перегруппировку членов.

С разложением (2.1) связаны две фундаментальные трудности. Первая трудность связана с тем, что разложение волновой функции по указанной полной системе вообще не имеет смысла, если потенциал парных взаимодействий содержит твердую сердцевину. В этом случае условие того, что функция Ψ обращается в нуль всякий раз, когда \mathbf{r}_0 лежит внутри сердце-

вины, соответствующей \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и т. д., автоматически не выполняется. Вторая трудность связана с тождественностью нуклонов. В особенности следует принимать во внимание явление обменного рассеяния [39], при котором падающий нуклон захватывается ядром-мишенью, а испускается тождественный нуклон, принадлежащий ядру-мишени. Вклады в обменное рассеяние проистекают от тех членов ψ_i разложения (2.1), которые соответствуют непрерывному спектру; это те состояния ψ_i , которые имеют хотя бы одну несвязанную частицу. Вследствие обменного рассеяния амплитуды u_i не будут уже давать полное описание соответствующих каналов. Требование к волновой функции Ψ , следующее из тождественности частиц, состоит в том, что она должна быть антисимметричной. Разложение (2.1) не удовлетворяет этому требованию. В то же время нужно отметить, что функции ψ_i являются антисимметризованными. Будем пока пренебрегать указанными эффектами. К ним мы вернемся в § 6, где будет показано, что полученные нами ниже результаты будут правильны *по форме* и при учете указанных эффектов, хотя некоторые матричные элементы приобретут другой смысл.

Сделав эти оговорки, подставим выражение (2.1) в уравнение Шредингера

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi, \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{H} = H_A(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) + T_0 + V(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A); \quad (2.3)$$

здесь H_A представляет собой гамильтониан ядра-мишени; T_0 — оператор кинетической энергии, соответствующий переменной \mathbf{r}_0 , а V — потенциальная энергия нуклона в поле нуклонов ядра-мишени. Волновая функция ψ_i удовлетворяет уравнению

$$H_A\psi_i = \varepsilon_i\psi_i. \quad (2.4)$$

Используя ортонормированность функций ψ_i , получаем для амплитуд u_i систему связанных уравнений:

$$(T_0 + V_{ii} + \varepsilon_i - E)u_i = - \sum_{j \neq i} V_{ij}u_j, \quad (2.5)$$

где

$$V_{ij}(\mathbf{r}_0) = (\psi_i, V\psi_j), \quad (2.6)$$

$$V_{ji}^* = V_{ij}^*. \quad (2.7)$$

Круглые скобки в (2.6) означают интегрирование по всем переменным \mathbf{r}_k ($k=1, 2, \dots, A$). Уравнения (2.5) рассматривались Брейтом [40] и Чини и Фубини [41].

Получим теперь уравнение Шредингера для u_0 . Для этого нам понадобятся новые обозначения, в которых выделяется u_0 . Определим через Φ матрицу, состоящую из одного столбца:

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Введем также матричный оператор \mathbf{H} с элементами

$$H_{ij} = T_0 \delta_{ij} + V_{ij} + \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad i, j \neq 0. \quad (2.9)$$

Наконец, чтобы описать связь между Φ и u_0 , введем матрицы \mathbf{V}_0 и \mathbf{V}_0^\dagger :

$$\mathbf{V}_0 = (V_{01}, V_{02}, \dots), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{V}_0^\dagger = \begin{pmatrix} V_{01}^* \\ V_{02}^* \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (2.5) примет следующий простой вид:

$$(T_0 + V_{00} - E) u_0 = -\mathbf{V}_0 \Phi, \quad (2.11a)$$

$$(\mathbf{H} - E) \Phi = -\mathbf{V}_0^\dagger u_0, \quad (2.11b)$$

где $\mathbf{V}_0 \Phi$ представляет собой матричное произведение \mathbf{V}_0 и Φ . Для того чтобы получить уравнение для u_0 , нам необходимо исключить Φ . Решив формально уравнение (2.11b), мы получим выражение для Φ через u_0 :

$$\Phi = \frac{1}{E^{(+)} - \mathbf{H}} \mathbf{V}_0^\dagger u_0, \quad (2.12)$$

где

$$E^{(+)} = E + i\eta, \quad \eta \rightarrow 0^{(+)}. \quad (2.13)$$

Член $i\eta$ обеспечивает присутствие лишь выходящих волн в возбужденных каналах u_l ($l \geq 1$), содержащихся в выражении (2.12).

Подставляя соотношение (2.12) в (2.11a), получаем

$$\left[T_0 + V_{00} + V_0 \frac{1}{E^{(+)} - H} V_0^\dagger - E \right] u_0 = 0. \quad (2.14)$$

Эффективный потенциал, который мы теперь будем называть обобщенным оптическим потенциалом \mathcal{V} , определяется соотношением:

$$\mathcal{V} = V_{00} + V_0 \frac{1}{E^{(+)} - H} V_0^\dagger. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства потенциала \mathcal{V} , вытекающие из этого соотношения. Во-первых, вследствие присутствия в знаменателе (2.15) члена $i\eta$ потенциал \mathcal{V} оказывается комплексным. С физической точки зрения этот комплексный член обусловлен процессами, в которых благодаря взаимодействию V_0^\dagger частицы покидают входной канал u_0 и испускаются в одном из возбужденных каналов u_i , входящих в Φ . Конечно, все это имеет место при тех условиях, когда могут идти реакции, т. е. когда энергия E достаточно велика ($E > \varepsilon_1$).

Во-вторых, потенциал \mathcal{V} является нелокальным. Чтобы убедиться в этом, разложим обратный оператор правой части соотношения (2.15) по собственным функциям оператора H . В общем случае спектр оператора H будет состоять из дискретной и непрерывной частей. Пусть собственные функции и собственные значения дискретной части спектра будут соответственно Φ_n и \mathcal{E}_n , т. е.

$$H\Phi_n = \mathcal{E}_n\Phi_n. \quad (2.16)$$

Собственными функциями, соответствующими непрерывному спектру, являются функции $\Phi(\mathcal{E}', \alpha)$, где \mathcal{E}' — собственное значение, а α обозначает всевозможные состояния, имеющие одну и ту же энергию \mathcal{E}' :

$$H\Phi(\mathcal{E}', \alpha) = \mathcal{E}'\Phi(\mathcal{E}', \alpha). \quad (2.17)$$

Поскольку дискретные состояния Φ_n будут играть в нашем рассмотрении существенную роль, мы сделаем небольшое отступление с тем, чтобы обсудить их физический смысл. Его очень легко усмотреть в предельном случае слабой связи, определяемом следующим образом:

$$V_{ij} = 0, \quad i \neq j \neq 0 \quad (\text{предел слабой связи}). \quad (2.18)$$

Оператор \mathbf{H} становится при этом диагональным, так что собственные функции Φ_n принимают следующий вид:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ u_i^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{предел слабой связи}), \quad (2.19)$$

т. е. все u_i ($i \neq 0$) равны нулю, за исключением лишь функции $u_i^{(n)}$, которая в этом случае удовлетворяет простому уравнению Шредингера

$$[T_0 + V_{ii}] u_i^{(n)} = -(\epsilon_i - \mathcal{E}_n) u_i^{(n)}. \quad (2.20)$$

Эта волновая функция, а следовательно, и Φ_n , описывает связанное состояние нуклона, движущегося в поле возбужденного ядра-мишени. Такие связанные состояния существуют, очевидно, лишь в том случае, если V_{ii} является потенциалом притяжения; число их зависит от интенсивности и радиуса действия потенциала V_{ii} . Если же связь не является слабой, т. е. если $V_{ij} \neq 0$, то функция Φ_n уже не будет иметь простого вида (2.19). Все u_i , вообще говоря, будут отличны от нуля. Однако трактовка Φ_n как волновой функции, описывающей нуклон, который связан в возбужденном ядре-мишени, по-прежнему остается справедливой.

Мы можем теперь выразить потенциал \mathcal{V} через Φ_n и $\Phi(\mathcal{E}', \alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = V_{00} + \sum_n \frac{V_0 \Phi_n \langle \Phi_n V_0^\dagger}{E - \mathcal{E}_n} + \\ + \int d\alpha \int_{\epsilon_1}^{\infty} d\mathcal{E}' \frac{V_0 \Phi(\mathcal{E}', \alpha) \langle \Phi(\mathcal{E}', \alpha) V_0^\dagger}{E^{(+)} - \mathcal{E}'}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Нелокальный характер потенциала \mathcal{V} станет очевидным, когда мы им подействуем на функцию u_0 . Посмотрим, например, как действует второй член правой части (2.21). Мы получим

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{V_0 \Phi_n \langle \Phi_n V_0^\dagger u_0 \rangle}{E - \mathcal{E}_n} = \\ = \sum_n \sum_{i, j \neq 0} \frac{V_{0i}(\mathbf{r}_0) u_i^{(n)}(\mathbf{r}_0) \int [u_j^{(n)}(\mathbf{r}')]^* V_{j0} u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{E - \mathcal{E}_n} = \\ = \int K(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \end{aligned}$$

это соотношение является определением \bar{K} . Таким образом, рассмотренная нами сумма \bar{K} приводит к потенциалу, который в общем случае является нелокальным.

Из соотношения (2.21) могут быть получены некоторые общие свойства потенциала \mathcal{V} . Во-первых, отметим, что числители в разложении (2.21) являются положительно определенными:

$$\langle \chi V_0 \Phi_n \rangle \langle \Phi_n V_0^\dagger \chi \rangle = |\langle \chi V_0 \Phi_n \rangle|^2 \geq 0,$$

где χ — произвольная функция. Теперь мы легко получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{V} = & V_{00} + \sum_n \frac{V_0 \Phi_n \rangle \langle \Phi_n V_0^\dagger}{E - \mathcal{E}_n} + \\ & + P \int \frac{d\mathcal{E}'}{E - \mathcal{E}'} \int d\alpha V_0 \Phi(\mathcal{E}', \alpha) \langle \Phi(\mathcal{E}', \alpha) V_0^\dagger, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{V} = \begin{cases} -\pi \int d\alpha V_0 \Phi(E, \alpha) \langle \Phi(E, \alpha) V_0^\dagger & \text{при } E > \epsilon_1, \\ 0 & \text{при } E < \epsilon_1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь символ P перед знаком интеграла означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Отметим, что $\operatorname{Im} \mathcal{V}$ является отрицательно определенной величиной, как это и должно быть, если \mathcal{V} считать потенциалом притяжения. Вещественная часть \mathcal{V} имеет полюса при $E = \mathcal{E}_n$ и линию ветвления при $E > \epsilon_1$. Функция $\operatorname{Re} \mathcal{V}$ является монотонной:

$$\frac{\partial (\operatorname{Re} \mathcal{V})}{\partial E} \leq 0. \quad (2.24)$$

Наконец, заметим, что если мы подставим (2.23) в (2.22), то получим для величин $\operatorname{Re} \mathcal{V}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{V}$ соотношение дисперсионного типа:

$$\operatorname{Re} \mathcal{V}(E) = V_{00} + \sum_n \frac{V_0 \Phi_n \rangle \langle \Phi_n V_0^\dagger}{E - \mathcal{E}_n} - \frac{1}{\pi} P \int_{\epsilon_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \mathcal{V}(\mathcal{E}')}{E - \mathcal{E}'} d\mathcal{E}'. \quad (2.25)$$

Для бесконечной ядерной материи сумма в выражении (2.25) обращается в нуль, откуда получаем

$$\operatorname{Re} \mathcal{V}(E) = V_{00} - \frac{1}{\pi} P \int \frac{\operatorname{Im} \mathcal{V}(\mathcal{E}')}{E - \mathcal{E}'} d\mathcal{E}'. \quad (2.26)$$

Поскольку \mathcal{V} является нелокальным потенциалом, то это дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частями обобщенного оптического потенциала не есть дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частями квадрата коэффициента преломления ядерной материи. Квадрат коэффициента преломления связан с эмпирическим оптическим потенциалом, по-видимому, линейным соотношением. Если бы потенциал \mathcal{V} был локальным, то соотношение (2.26) было бы справедливым для вещественной и мнимой частей объемного интеграла от \mathcal{V} или от эмпирического оптического потенциала. Отклонение свойств эмпирического потенциала от свойств потенциала, описываемого соотношением (2.26), указывает на степень нелокальности потенциала \mathcal{V} . Исследование указанных отклонений могло бы показать, насколько энергетическая зависимость эмпирического потенциала определяется нелокальностью и насколько рассеивающими свойствами ядерной материи. (Дальнейшее обсуждение этого вопроса см. в обзоре [27].)

§ 3. Резонансная теория упругого рассеяния

Потенциал \mathcal{V} [см. соотношение (2.15) или (2.21)] должен давать узкие резонансы, описываемые формулой Брейта — Вигнера. В настоящем параграфе мы рассмотрим случай, когда все каналы, за исключением входного,³ закрыты, т. е. случай, когда реакции и неупругое рассеяние отсутствуют. Последние могут быть учтены, как мы увидим в § 5, с помощью простого обобщения метода, развиваемого в настоящем параграфе. Рассмотрим сначала случай изолированного резонанса.

а. Изолированный резонанс

Как мы увидим, резонансы будут появляться всякий раз, когда значение энергии E будет близко к одному из значений \mathcal{E}_n , т. е. когда E близко к одному из полюсов потенциала, заданного выражением (2.21). В предельном случае слабой связи [см. (2.18) — (2.20)] это сводится к утверждению, что резонансы появляются при энергиях, при которых нуклон в отсутствие связи со входным каналом мог бы находиться в связанном состоянии в поле возбужденного ядра-мишени.

Предположим, таким образом, что значение E настолько

близко к \mathcal{E}_n , что с изменением энергии E существенно изменяется только один-единственный член правой части выражения (2.21) для \mathcal{V} . Следовательно, после того как мы выделим n -й член, мы можем в оставшейся части положить E равным \mathcal{E}_n ; так что

$$\mathcal{V} = U_n + \frac{V_0 \Phi_n \langle \Phi_n V_0^\dagger \rangle}{E - \mathcal{E}_n}, \quad (3.1)$$

где

$$U_n \approx V_{00} + \int \frac{d\mathcal{E}'}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}'} \int d\alpha V_0 \Phi(\mathcal{E}', \alpha) \times \\ \times \langle \Phi(\mathcal{E}', \alpha) V_0^\dagger \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{V_0 \Phi_m \langle \Phi_m V_0^\dagger \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}.$$

Член $i\eta$ отсутствует, поскольку может происходить только упругое рассеяние. Когда E близко к \mathcal{E}_n , уравнение Шредингера принимает вид

$$(H_0 - E) u_0 = -\Lambda_n V_0 \Phi_n, \quad (3.2)$$

где Λ_n — константа, равная

$$\Lambda_n = \langle \Phi_n V_0^\dagger u_0 \rangle / (E - \mathcal{E}_n), \quad (3.3)$$

а

$$H_0 = T_0 + U_n. \quad (3.4)$$

Решая формально уравнение (3.2), получаем

$$u_0 = v_0^{(+)} + \Lambda_n \frac{1}{E^{(+)} - H_0} V_0 \Phi_n, \quad (3.5)$$

где $v_0^{(+)}$ — решение уравнения

$$(H_0 - E) v_0^{(+)} = 0, \quad (3.6)$$

соответствующее выходящей волне. Подставляя (3.5) в (3.3), получаем для Λ_n линейное уравнение, которое может быть решено и из которого следует

$$\Lambda_n = \frac{\langle \Phi_n V_0^\dagger v_0^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}_n - \langle \Phi_n V_0^\dagger \frac{1}{E^{(+)} - H_0} V_0 \Phi_n \rangle}. \quad (3.7)$$

Теперь из асимптотического поведения выражения (3.5) можно получить матрицу переходов \mathcal{J} [42]:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_p + \Lambda_n \langle v_0^{(-)} V_0 \Phi_n \rangle, \quad (3.8)$$

где \mathcal{J}_p — матрица переходов, которая определяется асимптотическим поведением функции $\psi_0^{(+)}$ и которое описывает рассеяние, обусловленное потенциалом U_n . Как мы увидим в дальнейшем, матрица \mathcal{J}_p приводит в формуле Брейта — Вигнера к члену, описывающему потенциальное рассеяние. Функция $\psi_0^{(-)}$ представляет собой решение уравнения (3.6), состоящее из плоской волны с импульсом, равным конечному импульсу нуклона, и из сходящейся волны. Подставляя величину Λ_n , даваемую выражением (3.7), в (3.8), получаем

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_p + \frac{\langle \psi_0^{(-)} \mathbf{V}_0 \Phi_n \rangle \langle \Phi_n \mathbf{V}_0^+ \psi_0^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}_n - \langle \Phi_n \mathbf{V}_0^+ \frac{1}{E^{(+)} - H_0} \mathbf{V}_0 \Phi_n \rangle}. \quad (3.9)$$

Это выражение для матрицы \mathcal{J} проявляет резонансный характер. Матричный элемент в знаменателе состоит из вещественной части, которая сдвигает положение резонанса относительно \mathcal{E}_n , и из мнимой части, описывающей ширину резонанса. В некотором смысле эта формула является более общей, чем обычная формула Брейта — Вигнера (хотя разница между ними не очень существенна), поскольку мы в ней еще не производили разделения по моментам количества движения. Более того, и в этом состоит главное преимущество вышеизложенного формализма, радиусы каналов не входят в конечный результат и не фигурировали в процессе самого вывода. Эффекты, связанные с размерами ядра, содержатся в матричных элементах $\langle \Phi_n \mathbf{V}_0^+ \psi_0^{(+)} \rangle$ и др. Радиус действия как потенциала U_n , так и потенциала \mathbf{V}_0 равен по порядку величины радиусу ядра. Волновые функции $\psi_0^{(\pm)}$ чувствительны к радиусу действия потенциала U_n и, разумеется, к виду потенциала за пределами ядра. Таким образом, эти функции описывают как эффекты проникновения, так и возможность резонансных эффектов, связанных с размерами ядра, которые возникают в случае, когда в пределах радиуса действия потенциала U_n амплитуда функций $\psi_0^{(\pm)}$ становится большой [43].

Выведем теперь формулу Брейта — Вигнера (1.1). Чтобы избежать усложняющих подробностей, связанных с моментом количества движения (в значительной степени соответствующие расчеты были проделаны Бете [17]), рассмотрим случай

бесспиновых частиц и возьмем в качестве единственной отличной от нуля компоненты функции v_0 решение уравнения (3.6) с $l=0$. Тогда

$$v_0 = e^{i\delta} f(r_0),$$

где

$$f(r_0) \rightarrow \left(\frac{2}{\pi} k^2 \frac{dk}{dE} \right)^{1/2} \frac{\sin(kr_0 + \delta)}{kr_0}.$$

Тогда

$$\mathcal{J}_p = -\frac{1}{\pi} e^{i\delta} \sin \delta, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n V_0^\dagger \frac{1}{E^{(+)} - H_0} V_0 \Phi_n \rangle &= \\ &= \langle \Phi_n V_0^\dagger P \frac{1}{E - H_0} V_0 \Phi_n \rangle - i\pi \langle \Phi_n V_0^\dagger f \rangle \langle f V_0 \Phi_n \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

и

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{\pi} \left[\sin \delta e^{i\delta} - \pi \frac{e^{2i\delta} \langle f V_0 \Phi_n \rangle \langle \Phi_n V_0^\dagger f \rangle}{E - \mathcal{E}_n - \Delta_n + i\pi \langle f V_0 \Phi_n \rangle \langle \Phi_n V_0^\dagger f \rangle} \right]. \quad (3.12)$$

В формуле (3.12) величина Δ_n представляет собой энергетический сдвиг:

$$\Delta_n = \langle \Phi_n V_0^\dagger P \frac{1}{E - H_0} V_0 \Phi_n \rangle.$$

Выражение (3.12) имеет вид формулы Брейта — Вигнера. В случае $l=0$ мы можем в качестве ширины рассматривать величину Γ , равную

$$\Gamma = 2\pi \left| \langle \Phi_n V_0^\dagger f \rangle \right|^2. \quad (3.13)$$

Мы уже обсуждали эффекты, связанные с размерами ядра, и эффекты проникновения, заключенные в V_0 и f_0 . Добавим еще, что благодаря нормировке функции f , заданной соотношением (3.10), ширина Γ пропорциональна волновому числу k .

б. Случай большого числа перекрывающихся резонансов

Приведенный выше анализ будет, конечно, некорректным, если резонансы перекрываются. В соответствии с нашим формализмом выделим из \mathcal{V} группу сингулярных членов, а остаток будем считать константой, когда энергия изменяется в пре-

делах выделенной группы. Предположим, что перекрываются N резонансов. Тогда

$$\mathcal{V} = U^{(N)} + \sum_{\nu} \frac{V_0 \Phi_{\nu}}{E - \mathcal{E}_{\nu}} \langle \Phi_{\nu} V_0^{\dagger} \rangle.$$

Сумма по ν содержит N членов. Теперь уравнение, которому удовлетворяет u_0 , может быть представлено в виде

$$(H_0^{(N)} - E) u_0 = - \sum \Lambda_{\nu} V_0 \Phi_{\nu}, \quad (3.14)$$

где

$$H_0^{(N)} = T_0 + U^{(N)},$$

а Λ_{ν} определяется соотношением (3.3). Повторим теперь выкладки пункта „а“. Решая уравнение (3.14) для u_0 , получаем

$$u_0 = v_0^{(+)} + \sum_{\nu} \Lambda_{\nu} \frac{1}{E^{(+)} - H_0^{(N)}} V_0 \Phi_{\nu}, \quad (3.15)$$

где $v_0^{(+)}$ — соответствующее решение уравнения

$$(H_0^{(N)} - E) v_0^{(+)} = 0.$$

Матрица переходов \mathcal{J}

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_p^{(N)} + \sum_{\nu} \Lambda_{\nu} \langle v_0^{(-)} V_0 \Phi_{\nu} \rangle. \quad (3.16)$$

Подставив (3.15) в определение величины Λ_{ν} , мы получим систему уравнений, определяющих Λ_{ν} :

$$\sum_{\nu} [(E - \mathcal{E}_{\mu}] \delta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}] \Lambda_{\nu} = \langle \Phi_{\mu} V_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle, \quad (3.17)$$

где

$$W_{\mu\nu} = \langle \Phi_{\mu} V_0^{\dagger} \frac{1}{E^{(+)} - H_0^{(N)}} V_0 \Phi_{\nu} \rangle. \quad (3.17')$$

Решение конечной системы уравнений (3.17) может быть получено обычным методом детерминантов. И действительно, все результаты, приведенные ниже, могут быть получены этими методами. Однако более удобно использовать другой метод. Пусть l -м решением задачи на собственные значения

$$\sum_{\nu} [(E - \mathcal{E}_{\mu}] \delta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}] X_{\nu} = 0 \quad (3.18)$$

будет функция $X_v^{(l)}$, а соответствующим собственным значением пусть будет E_i . Так как $W_{\mu\nu}$ комплексно, то энергия E_i будет, вообще говоря, также комплексна. Мы можем, следовательно, определить вектор $(X_v^{(l)})^\dagger$, сопряженный вектору $X_v^{(l)}$, со следующими свойствами ортогональности и нормировки:

$$\sum_v (X_v^{(i)})^\dagger X_v^{(j)} = \delta_{ij}, \quad \sum_i (X_v^{(i)})^\dagger X_\mu^{(i)} = \delta_{v\mu}. \quad (3.19)$$

Тогда решение уравнения (3.17) может быть представлено с помощью функции Грина [44]:

$$\Lambda_v = \sum_{\mu, i} \frac{X_v^{(i)} (X_\mu^{(i)})^\dagger}{E - E_i} \langle \Phi_\mu \mathbf{V}_0^\dagger v_0^{(+)} \rangle. \quad (3.20)$$

Матрица \mathcal{G} будет записываться в форме

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_p^{(N)} + \sum_i \frac{A_i}{E - E_i}, \quad (3.21)$$

где

$$A_i = \sum_{v, \mu} X_v^{(i)} (X_\mu^{(i)})^\dagger \langle \Phi_\mu \mathbf{V}_0^\dagger v_0^{(+)} \rangle \langle v_0^{(-)} \mathbf{V}_0 \Phi_v \rangle. \quad (3.22)$$

Мы видим, что матрица \mathcal{G} состоит из члена, описывающего потенциальное рассеяние, и из N резонансных членов. Однако каждый из резонансных членов не имеет вида формулы Брейта — Вигнера типа (3.12), где числитель резонансного члена пропорционален мнимой части знаменателя [в соотношении (3.12) константа пропорциональности равна $-e^{2i\delta}/\pi$]. Теперь, однако, покажем, что

$$\sum_i A_i = \sum_\mu \langle \Phi_\mu \mathbf{V}_0^\dagger v_0^{(+)} \rangle \langle v_0^{(-)} \mathbf{V}_0 \Phi_\mu \rangle \quad (3.23)$$

и что для случая $l=0$, ведущего к формуле (3.12),

$$\sum_i A_i = -\frac{1}{\pi} e^{2i\delta} \sum_i \text{Im } E_i. \quad (3.24)$$

Соотношение (3.24) показывает, что соотношение типа формулы Брейта — Вигнера возникает после усреднения, т. е. что среднее от числителя равно среднему от мнимой части знаменателя, умноженному на $-(1/\pi) e^{2i\delta}$. Ниже мы увидим,

что соотношение (3.23) является очень важным при обсуждении модели комплексного потенциала.

Доказательство состоит в следующем. Чтобы получить формулу (3.23), нам нужно только просуммировать соотношение (3.22) по i и воспользоваться вторым соотношением ортогональности (3.19). Чтобы получить соотношение (3.24), мы используем прежде всего правило сумм для собственных значений уравнения (3.18):

$$\sum_i E_i = \sum_{\mu} (\mathcal{E}_{\mu} + W_{\mu\mu}).$$

Поэтому

$$\sum_i \text{Im } E_i = \sum_{\mu} \text{Im } W_{\mu\mu} = -\pi \sum_{\mu} \langle \Phi_{\mu} \mathbf{V}_0^{\dagger} \delta(E - H_0^{(N)}) \mathbf{V}_0 \Phi_{\mu} \rangle. \quad (3.25)$$

Чтобы получить соотношение (3.24), нам остается лишь подставить (3.10) для v_0 в соотношения (3.23) и (3.25). Этим наше утверждение полностью доказано.

Для дальнейшего оказывается удобным ввести понятие „средней ширины“ $\langle \Gamma \rangle$

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{2\pi}{N} \sum_{\mu} \langle \Phi_{\mu} \mathbf{V}_0^{\dagger} \delta(E - H_0^{(N)}) \mathbf{V}_0 \Phi_{\mu} \rangle, \quad (3.26)$$

которое в случае $l=0$ [см. соотношение (3.12)] сводится к

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{2\pi}{N} \sum |\langle \Phi_{\mu} \mathbf{V}_0^{\dagger} f \rangle|^2. \quad (3.27)$$

Кроме того, заметим, что средняя ширина равна одному и тому же выражению независимо от того, производится усреднение по N перекрывающимся или по неперекрывающимся уровням¹⁾.

1) Укажем еще на один случай, когда соотношение (3.24) оказывается полезным. Для эмпирического определения изолированного резонанса нужны лишь две константы: положение резонанса и ширина. Если перекрываются два уровня, то, согласно (3.21), необходимо восемь констант, поскольку требуется определить четыре комплексные числа: A_1 , A_2 , E_1 и E_2 . Соотношение (3.24), дающее два соотношения между этими константами, сводит число необходимых констант до шести.

§ 4. Модель комплексного потенциала для чисто упругого рассеяния

Воспользуемся теперь результатами предыдущего параграфа для того, чтобы получить модель комплексного потенциала. По-прежнему будем предполагать, что энергия E мала, т. е. что возможно только упругое рассеяние.

Экспериментальными величинами, представляющими для нас интерес, являются средние по энергии $\langle \sigma \rangle$ от различных сечений σ :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \sigma dE. \quad (4.1)$$

Интегрирование производится по узкому энергетическому интервалу ΔE , который тем не менее достаточно широк, что ΔE содержит большое число резонансов. В настоящем параграфе мы будем иметь дело лишь со средним сечением упругого рассеяния $\langle \sigma_e \rangle$ и со средним полным сечением $\langle \sigma_t \rangle$. Эти средние по энергии сечения особенно хорошо описывают ситуацию, когда разброс энергии в падающем пучке велик по сравнению с расстоянием между резонансами D и когда резонансы перекрываются.

В модели комплексного потенциала [21] рассматривается усредненная матрица переходов $\langle \mathcal{J} \rangle$:

$$\langle \mathcal{J} \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \mathcal{J} dE. \quad (4.2)$$

Вводится комплексный потенциал \mathcal{U} . Его свойства проявляются через посредство волновой функции χ , удовлетворяющей соответствующему уравнению Шредингера:

$$(T_0 + \mathcal{U} - E)\chi = 0. \quad (4.3)$$

Поэтому комплексный потенциал \mathcal{U} должен определяться так, чтобы матрица переходов для рассеяния, описываемого этим уравнением, была как раз матрицей $\langle \mathcal{J} \rangle$. Другими словами, на больших расстояниях функция χ должна асимптотически приближаться к $\langle u_0 \rangle$ — средней по энергии волновой функции u_0 :

$$\chi \rightarrow \langle u_0 \rangle \quad \text{при} \quad r_0 \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Матрица переходов в модели комплексного потенциала есть как раз матрица $\langle \mathcal{J} \rangle$.

С уравнением (4.3) связаны полное сечение и сечение упругого рассеяния. Поскольку полное сечение прямо пропорционально мнимой части матрицы переходов, соответствующей рассеянию на нулевой угол, то из (4.4) немедленно следует, что полное сечение, определяемое уравнением (4.3), равно как раз $\langle \sigma_e \rangle$. Однако сечение упругого рассеяния в модели комплексного потенциала, которое обычно называется сечением „собственно упругого“ (shape elastic) рассеяния σ_{se} , пропорционально $[\langle \mathcal{J} \rangle]^2$, в то время как среднее сечение $\langle \sigma_e \rangle$ пропорционально $\langle \mathcal{J}^2 \rangle$. Эти сечения не равны между собой и

$$\langle \sigma_e \rangle - \sigma_{se} \sim \langle \mathcal{J}^2 \rangle - \langle \mathcal{J} \rangle^2 \geq 0. \quad (4.5)$$

Сечение „собственно упругого“ рассеяния и среднее сечение упругого рассеяния совпадают друг с другом, когда флуктуации матрицы переходов \mathcal{J} равны нулю. А это имеет место тогда, когда резонансы сильно перекрываются. В этом случае модель комплексного потенциала будет давать как $\langle \sigma_e \rangle$, так и $\langle \sigma_e \rangle$.

Найдем теперь выражение для комплексного потенциала \mathcal{U} . Предположим, что интервал энергий ΔE содержит N резонансов. Тогда \mathcal{J} будет определяться соотношением (3.21), а $\langle \mathcal{J} \rangle$ соотношением

$$\langle \mathcal{J} \rangle = \mathcal{J}_p^{(N)} + \frac{1}{\Delta E} \int \sum \frac{A_l}{E - E_l} dE. \quad (4.6)$$

Мы предполагаем, что ΔE достаточно мало, так что можно считать, что величины A_l и E_l в интервале интегрирования \mathcal{J}_p являются постоянными. Будем также предполагать, что N велико и что, наконец, мнимая часть величины E_l мала по сравнению с ΔE . Тогда в хорошем приближении имеем

$$\langle \mathcal{J} \rangle = \mathcal{J}_p^{(N)} - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum A_l. \quad (4.7)$$

Подставляя выражение (3.23) для $\sum A_l$ в (4.7), получаем

$$\langle \mathcal{J} \rangle = \mathcal{J}_p^{(N)} - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum \langle v_0^{(-)} \mathbf{v}_0 \Phi_v \rangle \langle \Phi_v, \mathbf{v}_0^+ v_0^{(+)} \rangle. \quad (4.8)$$

Заметим, что в процессе выкладок мы не пользовались никакими статистическими соображениями и не делали каких-либо предположений относительно величины $\langle \Gamma \rangle / D$.

Теперь нам нужно найти потенциал \mathcal{U} , который давал бы матрицу переходов (4.8). Из формы соотношения (4.8) видно, что функция χ должна удовлетворять соотношению

$$\chi = v_0^{(+)} - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\nu} \frac{1}{E^{(+)} - H_0^{(N)}} \mathbf{V}_0 \Phi_{\nu} \langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle \quad (4.9)$$

или

$$(H_0^{(N)} - E)\chi = \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\nu} \mathbf{V}_0 \Phi_{\nu} \langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle. \quad (4.10)$$

Следовательно,

$$[H_0^{(N)} + \sum \alpha_{\nu} \mathbf{V}_0 \Phi_{\nu}] \langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} - E \rangle \chi = 0, \quad (4.11)$$

где

$$\alpha_{\nu} \langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} \chi \rangle = - \frac{i\pi}{\Delta E} \langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle.$$

Подставляя сюда выражение (4.9) для χ , получаем

$$\alpha_{\nu} = - \frac{i\pi}{\Delta E} \left[1 - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\mu} W_{\nu\mu} \frac{\langle \Phi_{\mu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle}{\langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle} \right]^{-1}. \quad (4.12)$$

Подставив это выражение в уравнение (4.11), можно получить часть комплексного потенциала \mathcal{U} , обусловленную вкладом составного ядра. Комплексный потенциал \mathcal{U} можно, таким образом, записать в виде

$$\mathcal{U} = U^{(N)} + \mathcal{U}_{cN}, \quad (4.13)$$

где

$$\mathcal{U}_{cN} = - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum \left[1 - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\mu} W_{\nu\mu} \frac{\langle \Phi_{\mu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle}{\langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger} v_0^{(+)} \rangle} \right]^{-1} \mathbf{V}_0 \Phi_{\nu} \langle \Phi_{\nu} \mathbf{V}_0^{\dagger}, \quad (4.14)$$

$$U^{(N)} = V_{00} + \sum_{\nu \neq n} \frac{\mathbf{V}_0 \Phi_{\nu}}{E - \mathcal{E}_{\nu}} + \int \frac{d\mathcal{E}}{E - \mathcal{E}} \int d\alpha \mathbf{V}_0 \Phi(\mathcal{E}, \alpha) \langle \Phi(\mathcal{E}, \alpha) \mathbf{V}_0^{\dagger}, \quad (4.15)$$

а E — некоторая энергия, лежащая в интервале ΔE .

Потенциал \mathcal{U}_{cN} , соответствующий процессам с образованием составного ядра, обусловлен переходами из открытого входного канала в закрытые каналы и обратно. Заметим, что в случае слабого перекрытия уровней ($W_{\nu\mu}$ малы) знаменатель в правой части (4.12) или (4.14) равен единице, а \mathcal{U}_{cN} является, как и предполагалось [21], отрицательной чисто мнимой величиной. Вопрос о происхождении этого мнимого члена обсуждался в работах Эдера [45] и Фридмана и Вайскопфа [14]. Функция $\langle u_0 \rangle$, по существу, является волновым пакетом в энергетическом пространстве. Поэтому процесс рассеяния мы можем описать следующим образом. При рассеянии падающий волновой пакет делится на две части. Одна часть, соответствующая „собственно упругому“ рассеянию, при своем прохождении через ядро не испытывает ни искажения, ни запаздывания во времени. Другая же благодаря образованию сравнительно долгоживущих состояний составного ядра испытывает значительное временное запаздывание. Решение уравнения (4.3) не может содержать в себе части с запаздыванием, вследствие чего амплитуда волнового пакета оказывается уменьшенной и эффективный потенциал — комплексным¹⁾. Ясно также, что, если время жизни состояний составного ядра уменьшается, среднее время запаздывания также уменьшается вместе с соответствующим уменьшением поглощения. Поэтому мы ожидаем, что, если ширина ядерных резонансов увеличивается, мнимая часть потенциала \mathcal{U}_{cN} будет уменьшаться и постепенно обратится в нуль. В этом случае „собственно упругое“ рассеяние и среднее сечение упругого рассеяния должны совпадать или, что то же самое, флуктуации в матрице переходов \mathcal{J} должны, согласно (4.5), обращаться в нуль. Тогда матрица \mathcal{J} должна быть равна своему среднему значению $\langle \mathcal{J} \rangle$. Это происходит потому, что, когда ширина резонансов становится достаточно большой, резонансы перекрываются и флуктуации в сечениях уменьшаются.

1) Существует другая точка зрения, приводящая к тем же самым результатам, которая исходит из того, что функция u_0 , очевидно, не описывается полностью с помощью $\langle u_0 \rangle$. Для полного описания нам нужны еще и высшие моменты волновой функции u_0 . Эти высшие моменты и средние $\langle u_0 \rangle$ связаны между собой таким образом, что рассеяние начального пакета будет порождать высшие моменты при соответствующем уменьшении амплитуды $\langle u_0 \rangle$. Это „поглощение“ еще раз приводит нас к выводу, что потенциал \mathcal{U} должен быть комплексным.

Указанное поведение потенциала \mathcal{U}_{cN} в явном виде содержится в выражении (4.14). Это можно легко продемонстрировать для случая, когда функция v_0 соответствует волне с заданным моментом количества движения. Используя определение $W_{\mu\nu}$ (3.17') и определение $\langle \Gamma \rangle$ (3.27), получаем

$$\alpha_\nu = -\frac{i\pi}{\Delta E} \left[1 - \frac{\pi}{2} \frac{\langle \Gamma \rangle}{D} - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\mu} \left\langle \Phi_\nu V_0^\dagger P \frac{1}{E - H_0^{(N)}} V_0 \Phi_\mu \right\rangle \frac{\langle \Phi_\mu V_0^\dagger v_0^{(+)} \rangle}{\langle \Phi_\nu V_0^\dagger v_0^{(+)} \rangle} \right]^{-1}. \quad (4.16)$$

Покажем теперь, что сумма по μ в выражении (4.16) является вещественной величиной. Во-первых, поскольку система функций Φ_μ описывает связанные состояния, они могут быть выбраны вещественными. Поэтому первый множитель под знаком суммы можно считать вещественным. Во-вторых, фазовые множители в числителе и знаменателе дроби определяются функцией $v_0^{(+)}$. Однако, если момент количества движения нам задан, фазы числителя и знаменателя будут совпадать, что и требовалось доказать.

Теперь можно выяснить некоторые свойства потенциала \mathcal{U}_{cN} . Из условия, что мнимая часть \mathcal{U}_{cN} должна быть отрицательной, мы получаем известное неравенство

$$\frac{\langle \Gamma \rangle}{D} \leq \frac{2}{\pi}. \quad (4.17)$$

Если же отношение $\langle \Gamma \rangle/D$ становится равным $2/\pi$, потенциал \mathcal{U}_{cN} оказывается вещественным. Таким образом, мы видим, что предположения о поведении потенциала \mathcal{U}_{cN} как функции резонансной ширины, сделанные нами выше, полностью подтверждаются.

В другом крайнем случае, когда отношение $\langle \Gamma \rangle/D$ очень мало, потенциал \mathcal{U}_{cN} является чисто мнимым. Более того, из сравнения выражения (4.8) для $\langle \mathcal{J} \rangle$ с выражением (4.14) для \mathcal{U}_{cN} видно, что в этом предельном случае эффекты, связанные с \mathcal{U}_{cN} , могут быть рассчитаны с помощью теории возмущений, в которой в качестве невозмущенной волновой функции берется v_0 .

Этим мы заканчиваем рассмотрение модели комплексного потенциала. Наш подход допускает также возможность вывода соотношений для высших энергетических моментов функции u_0 , которые позволили бы полнее исследовать проблему, чем это допускает модель комплексного потенциала. Необходимо также подчеркнуть, что полученный нами комплексный потенциал является нелокальным. В процессе вывода мы не использовали ни статистические соображения, ни предположения относительно величины Γ/D .

§ 5. Неупругое рассеяние

Предположим, что энергия падающего нуклона достаточно велика, чтобы возбудить один или несколько уровней ядра-мишени. Отметим, что вследствие тождественности нуклонов, находящей свое выражение в формализме изотопического спина, возможными процессами являются не только неупругое рассеяние (n, n') или (p, p') , но также и зарядово-обменные реакции типа (n, p) и (p, n) . Теперь удобно разбить волновые функции каналов на группу функций открытых каналов u_0, u_1, \dots, u_p и группу функций закрытых каналов u_{p+1}, \dots . Таким образом мы вводим две матрицы, каждая из которых состоит из одного столбца:

$$\Phi_O = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\Phi_C = \begin{pmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Индексы O и C относятся соответственно к открытому и закрытому каналам. Нам нужно также переопределить матрицы

потенциала, связывающего эти группы каналов. Теперь они будут прямоугольными:

$$\mathbf{V}(O|C) = \begin{pmatrix} V_{0,p+1} & V_{0,p+2} \dots \\ V_{1,p+1} & V_{1,p+2} \dots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ V_{p,p+1} & V_{p,p+2} \dots \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Матрица $\mathbf{V}^\dagger(C|O)$, эрмитовски сопряженная матрице $\mathbf{V}(O|C)$, определяется соотношением:

$$[\mathbf{V}^\dagger(C|O)]_{ik} = [\mathbf{V}(O|C)]_{ki}^*. \quad (5.4)$$

Наконец, нам необходимы квадратные матрицы $\mathbf{V}(O|O)$ и $\mathbf{V}(C|C)$:

$$\mathbf{V}(O|O) = \begin{pmatrix} V_{00} & V_{01} & \dots & V_{0p} \\ V_{10} & V_{11} & & V_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{p0} & V_{p,1} & \dots & V_{p,p} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{V}(C|C) = \begin{pmatrix} V_{p+1,p+1} & V_{p+1,p+2} \dots \\ V_{p+2,p+1} & V_{p+2,p+2} \dots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

В этих обозначениях основные уравнения (2.5) принимают вид:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}'_O - E] \Phi_O &= -\mathbf{V}(O|C) \Phi_C, \\ [\mathbf{H}_C - E] \Phi_C &= -\mathbf{V}^\dagger(C|O) \Phi_O, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}'_O)_{ij} &= (T_0 + \epsilon_i) \delta_{ij} + V_{ij}, \quad i, j \leq p, \\ (\mathbf{H}_C)_{ij} &= (T_0 + \epsilon_i) \delta_{ij} + V_{ij}, \quad i, j > p. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Наконец, такие произведения, как $\mathbf{V}(O|C) \Phi_C$, являются матричными произведениями:

$$[\mathbf{V}(O|C) \Phi_C]_i = \sum_{j=p+1} V_{ij} \mu_j, \quad i \leq p. \quad (5.9)$$

Форма уравнений (5.7) совпадает с формой уравнений (2.11), поэтому мы можем воспользоваться тем же самым методом решения:

$$\Phi_C = \frac{1}{E - H_C} V^\dagger (C|O) \Phi_O, \quad (5.10)$$

так что

$$\left[H'_O + V(O|C) \frac{1}{E - H_C} V^\dagger (C|O) - E \right] \Phi_O = 0. \quad (5.11)$$

Это уравнение является аналогом уравнения (2.14). Аналогия может быть проведена вплоть до соотношения (2.21). Соответствующее соотношение имеет вид

$$V(O|C) \frac{1}{E - H_C} V^\dagger (C|O) = \sum_n \frac{V(O|C) \Phi_{Cn} \langle \Phi_{Cn} V^\dagger (C|O) \rangle}{E - \mathcal{E}_n} + \int d\alpha \int_{\epsilon_{p+1}} \frac{V(O|C) \Phi_C(\mathcal{E}, \alpha) \langle \Phi_C(\mathcal{E}, \alpha) V^\dagger (C|O) \rangle}{E - \mathcal{E}} d\mathcal{E}. \quad (5.12)$$

Функции Φ_{Cn} и $\Phi_C(\mathcal{E}, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям на собственные значения:

$$\begin{aligned} H_C \Phi_{Cn} &= \mathcal{E}_n \Phi_{Cn}, \\ H_C \Phi_C(\mathcal{E}, \alpha) &= \mathcal{E} \Phi_C(\mathcal{E}, \alpha). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Мы можем теперь вывести выражение для матрицы переходов, повторяя по существу выкладки § 3. Рассмотрим сначала случай изолированных резонансов.

а. Изолированные резонансы

Снова предположим, что энергия E близка к \mathcal{E}_n , и запишем соотношение (5.12) в виде

$$\begin{aligned} V(O|O) + V(O|C) \frac{1}{E - H_C} V^\dagger (C|O) &= \\ &= U_n + \frac{V(O|C) \Phi_{Cn} \langle \Phi_{Cn} V^\dagger (C|O) \rangle}{E - \mathcal{E}_n}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где определение потенциала U_n полностью аналогично (2.28). Тогда Φ_0 удовлетворяет уравнению

$$(H_0 - E)\Phi_0 = -\Lambda_n V(O|C)\Phi_{Cn}, \quad (5.15)$$

где

$$(H_0)_{ij} = (T_0 + \varepsilon_i)\delta_{ij} + (U_n)_{ij},$$

а Λ_n есть число, равное

$$\Lambda_n = \frac{\langle \Phi_{Cn} V^+(C|O)\Phi_0 \rangle}{E - \mathcal{E}_n}. \quad (5.16)$$

Мы можем найти Λ_n , воспользовавшись методом, описанным в § 3; в результате получим

$$\Lambda_n = \frac{\langle \Phi_{Cn} V^+(C|O)v_0^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}_n - \langle \Phi_{Cn} V^+(C|O) \frac{1}{E^{(+)} - H_0} V(O|C)\Phi_{Cn} \rangle}. \quad (5.17)$$

Матрица $v_0^{(+)}$ является решением уравнения

$$(H_0 - E)v_0^{(+)} = 0, \quad (5.18)$$

подчиненным условием, что $v_0^{(+)}$ на больших расстояниях состоит из падающей и расходящихся волн. Во входном канале падающая плоская волна Π_0 имеет вид (мы опять рассматриваем случай бесспиновых частиц):

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Выходящая волна обычно имеет несколько отличных от нуля компонент, соответствующих каждому из допустимых открытых каналов. Таким образом, потенциал U_n вызывает переходы из входного канала в другие открытые каналы, т. е. приводит к неупругому рассеянию. Пусть β — номер открытого канала. Тогда матрица $\mathcal{J}_\beta(\beta|0)$, описывающая переходы из входного канала в канал β , обусловленные потенциалом U_n , имеет вид

$$\mathcal{J}_\beta(\beta|0) = \langle \Pi_\beta U_n v_0^{(+)} \rangle. \quad (5.20)$$

Относительно индекса p мы скажем несколько ниже. Функция Π_β описывает плоскую волну в канале β , в то время как функция Π_0 [см. соотношение (5.19)] описывает случай, когда имеется только один-единственный входной канал.

Возвращаясь теперь к основной проблеме, мы можем, используя выражение (5.17) для Λ_n , получить матрицу $\mathcal{J}(\beta|0)$, соответствующую уравнению (5.15). (См. аналогичный вывод в § 3). Мы находим

$$\mathcal{J}(\beta|0) = \mathcal{J}_p(\beta|0) + \frac{\langle v_\beta^{(-)} v(O|C) \Phi_{Cn} \rangle \langle \Phi_{Cn} v^+(C|O) v_0^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}_n - \langle \Phi_{Cn} v^+(C|O) \frac{1}{E^{(+)} + H_0} v(O|C) \Phi_{Cn} \rangle}. \quad (5.21)$$

Матрица $\mathcal{J}_p(\beta|0)$ определяется соотношением (5.20); матрица $v_\beta^{(-)}$ является решением уравнения (5.18), которое на больших расстояниях состоит из падающей волны Π_β в канале β с импульсом, равным конечному импульсу в этом канале β , и из сходящейся волны. Матрица переходов для упругого рассеяния имеет вид

$$\mathcal{J}(0|0) = \mathcal{J}_p(0|0) + \frac{\langle v_0^{(-)} v(O|C) \Phi_{Cn} \rangle \langle \Phi_{Cn} v^+(C|O) v_0^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}_n - \langle \Phi_{Cn} v^+(C|O) \frac{1}{E^{(+)} - H_0} v(O|C) \Phi_{Cn} \rangle}. \quad (5.22)$$

Мы получили выражение с характерным резонансным знаменателем. Возможно, более примечательным является появление члена $\mathcal{J}_p(\beta|0)$, отвечающего нерезонансному неупругому рассеянию. Матрица $\mathcal{J}_p(\beta|0)$ играет в неупругом рассеянии ту же роль, какую играет матрица $\mathcal{J}_p(0|0)$ в упругом. Последняя же описывает потенциальное рассеяние, на что как раз и указывает индекс p . В матрице $\mathcal{J}_p(\beta|0)$ содержится так называемое прямое неупругое рассеяние. Поскольку в исходном разложении (2.1) содержатся все уровни, которые могут быть возбуждены при неупругом рассеянии, матрица $\mathcal{J}_p(\beta|0)$ описывает возбуждение одночастичных уровней, возбуждение ротационных уровней, равно как и прямые реакции типа (n, p) и (p, n) . И действительно, уравнения

(5.18) весьма сходны с уравнениями, используемыми обычно в теории прямых взаимодействий. Более отчетливо это можно усмотреть на следующем специальном примере. Предположим, что, кроме входного, имеется только один открытый канал. Тогда система (5.18) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} [T_0 + (\mathbf{U}_n)_{00} - E] v_{00} &= -(\mathbf{U}_n)_{01} v_{01}, \\ [T_0 + (\mathbf{U}_n)_{11} - E] v_{01} &= -(\mathbf{U}_n)_{10} v_{00}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где мы положили

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_{00} \\ v_{01} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Уравнения (5.23) сходны с уравнениями, используемыми в работах [8, 34]. В этих работах делается ряд предположений относительно свойств потенциала \mathbf{U}_n ; в частности, предполагается, что он является комплексным. Мы обсудим этот вопрос позднее, когда будем производить усреднение по резонансам, аналогичное тому, какое производили в § 4. Здесь же мы изучаем прямое неупругое рассеяние в присутствии резонансного рассеяния.

Рассмотрим теперь резонансные члены. Полная ширина Γ может быть получена из мнимой части резонансного знаменателя в соотношении (5.21). Она равна

$$\Gamma = 2\pi \sum_{\beta} |\langle \Phi_{Cn} \mathbf{V}^{\dagger} (C | O) \mathbf{v}_{\beta}^{(+)} \rangle|^2, \quad (5.25a)$$

или

$$\Gamma = 2\pi \sum_{\beta} |\langle \mathbf{v}_{\beta}^{(-)} \mathbf{V} (O | C) \Phi_{Cn} \rangle|^2. \quad (5.25b)$$

Это сразу же подсказывает нам определение парциальных ширин:

$$\Gamma_{\beta} = 2\pi |\langle \Phi_{Cn} \mathbf{V}^{\dagger} (C | O) \mathbf{v}_{\beta}^{(+)} \rangle|^2 = 2\pi |\langle \mathbf{v}_{\beta}^{(-)} \mathbf{V} (O | C) \Phi_{Cn} \rangle|^2. \quad (5.26)$$

Мы видим, что соотношения (5.21) и (5.22) имеют тогда вид формулы Брейта — Вигнера [46]. Отклонение от формулы Брейта — Вигнера связано с присутствием в этих выражениях добавочных членов $\mathcal{J}_{\rho}(\beta | 0)$ ($\beta \neq 0$) и неизвестных фаз между резонансными членами и членами прямого взаимодействия.

б. Случай большого числа перекрывающихся резонансов

Совершенно ясно, что соответствующий этому случаю формализм будет в точности соответствовать формализму, развитому в § 3, б, так что достаточно привести здесь лишь результаты. Соотношение, аналогичное соотношению (3.21), имеет вид

$$\mathcal{J}(\beta|0) = \mathcal{J}_p(\beta|0) + \sum_i \frac{A_i(\beta|0)}{E - E_i}, \quad (5.27)$$

где [см. (3.22)]

$$A_i(\beta|0) = \sum_{\nu, \mu} X_\nu^i (X_\mu^i)^\dagger \langle \mathbf{v}_\beta^{(-)} \mathbf{V}(O|C) \Phi_{C\nu} \rangle \langle \Phi_{C\mu} \mathbf{V}^\dagger(O|C) \mathbf{v}_0^{(+)} \rangle. \quad (5.28)$$

Функции $X_\nu^{(i)}$ являются собственными функциями, а E_i — комплексными собственными значениями уравнений [см. (3.18)]

$$\sum_\nu [(E - \mathcal{E}_\mu) \delta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}] X_\nu = 0, \quad (5.29)$$

где теперь

$$W_{\mu\nu} = \left\langle \Phi_{C\mu} \mathbf{V}^\dagger(C|O) \frac{1}{E^{(+)} - \mathbf{H}_O^{(N)}} \mathbf{V}(O|C) \Phi_{C\nu} \right\rangle. \quad (5.30)$$

Функции \mathbf{v}_β являются соответствующими решениями уравнения

$$(\mathbf{H}_O^{(N)} - E) \mathbf{v}_\beta = 0, \quad (5.31)$$

где

$$(\mathbf{H}_O^{(N)})_{ij} = (T_0 + \varepsilon_i) \delta_{ij} + \mathbf{U}_{ij}^{(N)}. \quad (5.32)$$

Наконец, потенциал $\mathbf{U}^{(N)}$ состоит из $\mathbf{V}(O|O)$ и членов в правой части соотношения (5.12), из которой вычеркнуты N слагаемых, содержащих функции $\Phi_{C\nu}$, фигурирующих в соотношениях (5.30) и (5.28).

Соотношение (5.27), как и следовало ожидать, состоит из члена, отвечающего нерезонансному рассеянию, и из типичных резонансных членов, которые, однако, не имеют вида формулы Брейта — Вигнера. Однако, как и в § 3, б, имеет место соотношение:

$$\sum A_i(\beta|0) = \sum_\mu \langle \mathbf{v}_\beta^{(-)} \mathbf{V}(O|C) \Phi_{C\mu} \rangle \langle \Phi_{C\mu} \mathbf{V}^\dagger(C|O) \mathbf{v}_0^{(+)} \rangle. \quad (5.33)$$

Из правила сумм имеем также

$$\text{Im} \sum E_l = \text{Im} \sum W_{\mu\mu} = -\pi \sum_{\mu, \beta} |\langle \Phi_{C\mu} \mathbf{V}^+(O|C) \mathbf{v}_\beta^{(+)} \rangle|^2.$$

Таким образом, мы опять приходим к выводу, что в среднем имеет место формула типа Брейта — Вигнера.

в. Модель комплексного потенциала

Здесь мы намерены развить теорию комплексного потенциала, применимую при наличии неупругого рассеяния. При этом в нашем рассмотрении мы в значительной степени будем дублировать метод, применявшийся в § 4. Определим сначала среднюю матрицу переходов $\langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle$:

$$\langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \mathcal{J}(\beta|0) dE. \quad (5.34)$$

На интервал ΔE наложены те же условия, что и в § 4. Матрица $\langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle$ опять полезна в общем случае лишь для расчета среднего полного сечения. Поскольку зависимость сечения упругого и неупругого рассеяния от $\mathcal{J}(\beta|0)$ является квадратичной, то матрица $\langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle$ окажется полезной, если только флуктуации матрицы $\mathcal{J}(\beta|0)$ в ее зависимости от энергии будут пренебрежимо малы. Это, по-видимому, имеет место при больших энергиях, когда резонансы сильно перекрываются. Используя для вычисления матрицы $\langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle$ соотношение (5.33), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle &= \mathcal{J}_p(\beta|0) - \\ &- \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\mu} \langle \mathbf{v}_\beta^{(-)} \mathbf{V}(O|C) \Phi_{C\mu} \rangle \langle \Phi_{C\mu} \mathbf{V}^+(C|O) \mathbf{v}_0^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Теперь мы требуем, чтобы потенциал \mathbf{U}_{CN} был таким, что матрица переходов, соответствующая уравнению

$$[\mathbf{H}_O^{(N)} + \mathbf{U}_{CN} - E] \chi = 0, \quad (5.36)$$

как раз равнялась бы матрице $\langle \mathcal{J}(\beta|0) \rangle$.

Определение потенциала \mathbf{U}_{CN} совпадает с определением, данным в § 4. Из соотношения (5.35), например, следует, что функция χ должна удовлетворять уравнению типа (4.10):

$$(\mathbf{H}_O^{(N)} - E) \chi = \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\nu} \mathbf{V}(O|C) \Phi_{C\nu} \langle \Phi_{C\nu} \mathbf{V}^+(C|O) \mathbf{v}_0^{(+)} \rangle. \quad (5.37)$$

Расчеты, аналогичные расчетам § 4, дают

$$U_{cN} = -\frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\nu} \left[1 - \frac{i\pi}{\Delta E} \sum_{\mu} W_{\nu\mu} \frac{\langle \Phi_{C\mu} \mathbf{V}^{\dagger} (C|O) \mathbf{v}_0^{(+)} \rangle}{\langle \Phi_{C\nu} \mathbf{V}^{\dagger} (C|O) \mathbf{v}_0^{(+)} \rangle} \right]^{-1} \times \\ \times \mathbf{V}(O|C) \Phi_{C\nu} \langle \Phi_{C\nu} \mathbf{V}^{\dagger} (C|O) \rangle, \quad (5.38)$$

где $W_{\nu\mu}$ определяется соотношением (5.30). Свойства потенциала U_{cN} настолько совпадают со свойствами потенциала U_{cN} , полученного в § 4, что нет необходимости здесь о них говорить.

Уравнение (5.36) еще не соответствует модели комплексного потенциала. Чтобы получить ее, необходимо исключить все открытые каналы, кроме входного. С этой целью мы перепишем уравнение (5.36) в следующем виде:

$$(T_0 + U - E)\chi = 0, \quad (5.39)$$

где

$$U_{ij} = (U^{(N)})_{ij} + (U_{cN})_{ij} + \varepsilon_i \delta_{ij}. \quad (5.40)$$

Выделим теперь волновую функцию χ_0 , соответствующую входному каналу, из χ

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_I \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (5.39) приобретает вид

$$(T_0 + U_{00} - E)\chi_0 = -U_{0I}\chi_I, \quad (5.41)$$

$$(T_0 + U_{II} - E)\chi_I = -U_{I0}\chi_0, \quad (5.42)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{0I} \\ U_{I0} & U_{II} \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Комплексный потенциал \mathcal{U} может быть получен из уравнения (5.41) путем исключения функции χ_I ; мы находим тогда

$$(T_0 + \mathcal{U} - E)\chi_0 = 0, \quad (5.44)$$

где

$$\mathcal{U} = U_{00} + U_{0I} \frac{1}{E^{(+)} - T_0 - U_{II}} U_{I0}. \quad (5.45)$$

Здесь U_{00} состоит из потенциала V_{00} и из членов, соответствующих виртуальным переходам из входного канала

в закрытые каналы и обратно. По переходам, которые в энергетическом интервале ΔE приводят к резонансам, производится усреднение и тем самым образуется мнимая часть потенциала U_{00} . Второй член в соотношении (5.45) обусловлен несколькими эффектами. Например, имеют место виртуальные переходы через закрытые каналы, при которых открытые каналы I , соответствующие неупругому рассеянию, были промежуточными состояниями либо для перехода из входного канала в закрытый, либо для перехода из закрытого канала обратно во входной, либо для обоих сразу. Кроме того, благодаря существованию неупругого рассеяния имеется вклад от той части функции Грина $[E^{(+)} - T_0 - U_{II}]^{-1}$, которая берется на энергетической поверхности. Если влияние резонансных состояний мало (U вещественно), то этот член является чисто мнимой величиной и описывает, конечно, реальное поглощение.

Мы можем воспользоваться этими уравнениями также и для того, чтобы описать неупругое рассеяние. Из уравнения (5.42) находим матрицу переходов

$$\langle \mathcal{J}_I(\beta | 0) \rangle = \langle \mathbf{v}_{I\beta}^{(-)} U_{I0} \chi_0^{(+)} \rangle, \quad (5.46)$$

где функция $\chi_0^{(+)}$ должна быть получена из (5.44), а функция $(\mathbf{v}_{I\beta}^{(-)})^*$ является решением уравнения

$$(T_0 + U_{II} - E) (\mathbf{v}_{I\beta}^{(-)})^* = 0, \quad (5.47)$$

состоящим на больших расстояниях из плоской волны в канале β , имеющей импульс $(-\mathbf{k}_\beta)$, и из расходящейся волны. Величина \mathbf{k}_β есть как раз импульс частицы, неупруго рассеянной в канале β . Соотношение (5.46) может быть записано в ином виде:

$$\langle \mathcal{J}_I(\beta | 0) \rangle = \langle \mathbf{w}_{I\beta}^{(-)} U_{I0} v_0^{(+)} \rangle, \quad (5.48)$$

где

$$\left[T_0 + U_{II} + U_{I0} \frac{1}{E^{(+)} - T_0 - U_{00}} U_{0I} - E \right] (\mathbf{w}_{I\beta}^{(-)})^* = 0$$

и

$$(T_0 + U_{00} - E) v_0^{(+)} = 0.$$

Граничные условия для $(\mathbf{w}_{I\beta}^{(-)})^*$ совпадают с граничными условиями для функции $(\mathbf{v}_{I\beta}^{(-)})^*$. Соотношения (5.46) и (5.48) должны,

конечно, совпадать с соотношением (5.35). Однако они являются гораздо более удобными, поскольку влияние переходов в резонансные состояния и обратно, обусловленное закрытыми каналами, на волновые функции в них проявляется явно. Соотношения типа (5.46) вместе с (5.44), (5.41), (5.42) использовались в работах [8] и [34].

В заключение напомним пределы применимости результатов этого параграфа. Соотношения типа (5.46) дают среднюю матрицу переходов для неупругого рассеяния. Среднее сечение неупругого рассеяния или реакций может быть получено из усредненного, если только флуктуации в энергетической зависимости сечения неупругого рассеяния достаточно малы. Это имеет место в двух случаях. В одном случае доминирует прямое неупругое рассеяние, т. е. преобладает нерезонансное рассеяние. В другом случае резонансы столь широки, что перемешиваются друг с другом, образуя гладкую зависимость сечения от энергии. С другой стороны, правильное среднее полное сечение может быть получено из уравнения (5.44).

Усредненная матрица переходов содержит в себе одновременно и прямое неупругое рассеяние и неупругое рассеяние, идущее через составное ядро. Точное разделение матрицы $\langle \mathcal{J}_I \rangle$ на независимые слагаемые, соответствующие каждому из этих процессов, по-видимому, невозможно. Однако если для расчета потенциала $(U^{(N)})_{I0}$ или потенциала $(U_{cN})_{I0}$ можно применять теорию возмущений, матрица переходов для прямого рассеяния принимает вид

$$\langle \mathbf{v}_{I\beta}^{(-)}(U^{(N)})_{I0} \chi_0^{(+)} \rangle \approx \langle \mathbf{w}_{I\beta}^{(-)}(U^{(N)})_{I0} \psi_0^{(+)} \rangle, \quad (5.49)$$

в то время как усредненная матрица переходов для неупругого рассеяния, идущего через составное ядро, будет

$$\langle \mathbf{v}_{I\beta}^{(-)}(U_{cN})_{I0} \chi_0^{(+)} \rangle \approx \langle \mathbf{w}_{I\beta}^{(-)}(U_{cN})_{I0} \psi_0^{(+)} \rangle. \quad (5.50)$$

§ 6. Влияние твердой сердцевины потенциала парного взаимодействия и тождественности частиц; приближение высоких энергий

Как было уже показано в § 2, теория, развитая в §§ 2—5, является некорректной, когда потенциал V , входящий в выражение (2.3), содержит твердые сердцевины и когда падающая частица тождественна частицам ядра-мишени.

Цель настоящего параграфа заключается в том, чтобы показать, что и в этом случае результаты, полученные в §§ 2—5, будут правильны по форме, хотя возникающие матричные элементы приобретут другой смысл. Все дальнейшее изложение основано на том факте, что результаты, полученные в § 2—5, зависят в принципе лишь от существования системы уравнений типа системы (2.5). Следовательно, если после учета твердых сердцевин и принципа Паули мы сможем полученные уравнения преобразовать в систему, по форме совпадающую с (2.5), и если интерпретация волновых функций, подобных функциям u_i , на больших расстояниях, останется неизменной, тогда все выкладки предыдущих параграфов могут быть повторены и здесь. Проиллюстрируем эти замечания одним важным примером.

Недавно на основе теории Бракнера было показано [47—51], что потенциалы с твердой сердцевиной и принцип Паули приводят к корреляциям на малых расстояниях между нуклонами. Подобные корреляции можно учесть с самого начала путем модификации разложения (2.1). Например, можно положить

$$\Psi = \sum_i \psi_i(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) u_i(\mathbf{r}_0) \prod_{k=1}^A g_k(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_k), \quad (6.1)$$

где функции g отличаются от единицы только тогда, когда величина $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_k|$ достаточно мала. Если такого рода волновую функцию подставить в уравнение Шредингера (2.2), структура системы (2.5) изменится следующим образом:

$$(T_0 + V'_{ii} + \varepsilon_i \mathcal{N}_{ij} - EN_{ij}) u_i = - \sum_{j \neq i} V'_{ij} u_j. \quad (6.2)$$

Матричные элементы V'_{ij} включают не только матричные элементы потенциала V относительно набора волновых функций $\psi_i \prod g_i$, но также и члены, соответствующие операторам кинетической энергии T_i . Коэффициенты \mathcal{N}_{ij} и N_{ij} отличаются от δ_{ij} , поскольку этот набор не является ортогональным. Они являются функциями \mathbf{r}_0 . Важно отметить, что вследствие короткодействующего характера функций g_i коэффициенты \mathcal{N}_{ij} и N_{ij} на больших расстояниях \mathbf{r}_0 быстро приближаются к значениям функции δ_{ij} . Следовательно, интерпретация функции u_0 как волновой функции входного канала по-прежнему остается

справедливой. Нам нужно только привести уравнение (6.2) к виду (2.5), чтобы результаты, полученные в § 2—5, оставались справедливыми и в этом случае.

Определим функцию Ψ' следующим образом:

$$\Psi' \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ \Phi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Тогда уравнение (6.2) примет вид

$$(\mathbf{H}' - E\mathbf{N}) \Psi' = 0, \quad (6.4)$$

где

$$(\mathbf{N})_{ij} = N_{ij}.$$

Поскольку матрица \mathbf{N} является эрмитовой, мы можем диагонализировать ее с помощью унитарного преобразования \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{S}^{-1} = \Delta. \quad (6.5)$$

Здесь матрица Δ диагональна и вещественна. Матрица \mathbf{S} , так же как и матрица Δ , является функцией \mathbf{r}_0 , причем обе они при больших \mathbf{r}_0 приближаются к единичной матрице. Преобразование \mathbf{S} превращает функцию Ψ' в Ψ'' :

$$\Psi'' = \mathbf{S}^{-1}\Psi'.$$

Уравнение (6.4) принимает вид

$$(\mathbf{H}'' - E\Delta) \Psi'' = 0. \quad (6.6)$$

Наконец, полагая

$$\Psi''' = \Delta^{1/2}\Psi'', \quad (6.7)$$

получаем

$$(\mathbf{H}''' - E) \Psi''' = 0, \quad (6.8)$$

где

$$\mathbf{H}''' = \Delta^{-1/2}\mathbf{H}'\Delta^{-1/2}.$$

Мы привели уравнение (6.4) к виду (2.5). Кроме того, интерпретация волновых функций каналов u_i осталась неизменной. Преобразование (6.5), конечно, создает огромные трудности для получения матричных элементов, таких, как ширины, из двухчастичных нуклон-нуклонных взаимодействий, задаваемых потенциалом V . Отметим, что \mathbf{S} и Δ не зависят от энергии E ,

а. Потенциалы с твердой сердцевиной; приближение высоких энергий

Сделаем несколько предварительных замечаний. Разложение (2.1) обычно считается некорректным, если в теории фигурируют потенциалы с твердой сердцевиной, поскольку в этом случае матричные элементы V_{ij} будут неограниченными. Однако введение твердой сердцевины нужно рассматривать просто как некоторый искусственный прием, обеспечивающий обращение волновой функции в нуль всякий раз, когда величина $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_k|$ меньше радиуса сердцевины. Именно такого рода поведение, поскольку речь идет о зависимости волновой функции от \mathbf{r}_0 , и обнаруживает потенциал, сконструированный из δ -функции и ее производных, взятых на поверхности сердцевины. Матричные элементы V_{ij} тогда не будут обращаться в бесконечность, и мы получаем возможность использовать разложение (2.1) в качестве пробной функции в вариационном принципе по E . Однако разложение (2.1) не является достаточно полным, так что получающиеся из вариационного принципа уравнения не будут уже точными. Таким образом, мы должны обратиться к разложению (6.1). Соответствующие функции g_i , по-видимому, можно было бы получить, решая уравнение Бете — Голдстоуна.

Другой способ, более удобный для наших целей и непосредственно связанный с методом Бракнера, состоит не в изменении разложения для волновой функции, а в преобразовании потенциала V . Этот метод является прямым следствием теоремы Кермана [52, 27]. Условия теоремы гласят: 1) потенциал $V(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)$ действует только на волновые функции, антисимметричные относительно координат $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A$, и 2) потенциал V может быть записан в виде суммы двух-частичных взаимодействий

$$V(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \sum_i v(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i). \quad (6.9)$$

Разложение (2.1) удовлетворяет первому условию, так как функции ψ_i антисимметризованы. Введем, наконец, оператор τ с помощью соотношения

$$\tau = v \left[1 + \frac{1}{E^{(+)} + \mathcal{E}_0} \tau \right], \quad (6.10)$$

где v — функция двух переменных: $v = v(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)$ и

$$\mathcal{H}_0 = H_A + T_0. \quad (6.11)$$

Теперь становится возможным определить эффективный много-частичный потенциал

$$V_e = (A - 1)\tau \quad (6.12)$$

и соответствующий эффективный гамильтониан \mathcal{H}_e

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_0 + V_e.$$

Можно показать, что матрица переходов \mathcal{J} , соответствующая истинному гамильтониану \mathcal{H} , и матрица \mathcal{J}_e , соответствующая эффективному гамильтониану \mathcal{H}_e , связаны простым соотношением

$$\mathcal{J} = \frac{A}{A-1} \mathcal{J}_e. \quad (6.13)$$

Таким образом, во всех выкладках § 2—3 мы можем пользоваться потенциалом V_e вместо V , введя в конечном результате только небольшую поправку — множитель $A(A-1)$, чтобы получить матрицу \mathcal{J} [см. (6.13)].

Использование V_e вместо V имеет два преимущества. Во-первых, оператор τ и, следовательно, потенциал V_e должны быть менее сингулярными, чем V . Это предположение основано на тесной связи, существующей между τ и t — двухчастичной матрицей переходов, удовлетворяющей соотношению

$$t = v \left[1 + \frac{1}{E^{(+)} - T_0} t \right]. \quad (6.14)$$

Когда v содержит твердую сердцевину, матрица t оказывается менее сингулярной, чем v . Соотношения (6.14) и (6.10) имеют столь сходную структуру, что можно ожидать, что τ , так же как и t , будет менее сингулярной, чем v .

Второе преимущество, возникающее при использовании потенциала V_e вместо потенциала V , обусловлено связью, которую можно установить с „приближением многократного рассеяния“ Ватсона [52, 27], справедливым при больших энергиях падающего нуклона. Согласно (2.15), обобщенным потенциалом, описывающим эффективное взаимодействие нуклона с ядром, является $\mathcal{V}^{(e)}$:

$$\mathcal{V}^{(e)} = \dot{V}_{00}^{(e)} + \mathbf{V}_0^{(e)} \frac{1}{E^{(+)} - \mathbf{H}^{(e)}} \mathbf{V}_0^{(e)\dagger}. \quad (6.15)$$

Здесь индекс e указывает, что в (2.15) потенциал V всюду заменяется на V^e . Приближение Ватсона состоит в следующем. Во-первых, в этом приближении пренебрегается вкладом возбужденных состояний, т. е. полагается, что

$$\mathcal{V}^{(e)} \approx V_{00}^{(e)} = (A - 1)(\psi_0, \tau\psi_0). \quad (6.16)$$

Это приближение можно было бы назвать „приближением многократного рассеяния“. Во-вторых, оператор τ заменяется на t :

$$\mathcal{V}^{(e)} \approx (A - 1)(\psi_0, t\psi_0). \quad (6.17)$$

Обсуждение справедливости приближения Ватсона читатель может найти в оригинальных статьях [53—56] и в обзоре [27]. Таким образом, потенциал $\mathcal{V}^{(e)}$ описывает резонансные явления при низких энергиях и процесс многократного рассеяния при высоких энергиях; все эти явления имеют место при взаимодействии нуклона с ядром.

б. Учет тождественности частиц

Обратимся теперь к учету тождественности падающего нуклона с нуклонами ядра-мишени. Разложение (2.1) должно быть антисимметризовано, так как нуклоны подчиняются статистике Ферми. Функции ψ_l являются уже антисимметризованными, так что дополнительную антисимметризацию необходимо произвести только по отношению к парам координат $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k)$. Подставив полученную таким образом волновую функцию в уравнение Шредингера (2.2), мы получим уравнение типа (6.4); появляются характерные обменные потенциалы, и матрица \mathbf{N} не является уже диагональной, поскольку после антисимметризации ортогональность не имеет места.

Докажем теперь следующую важную теорему. Если энергия E столь мала, что возбужденные каналы могут содержать только один нуклон [отсутствуют реакции типа $(n, 2n)$, (n, α) и т. д.], то: 1) при \mathbf{r}_0 , стремящемся к бесконечности, разность между функцией Ψ''' , удовлетворяющей уравнению (6.8), и функцией Ψ' , удовлетворяющей уравнению (6.4), стремится к нулю быстрее, чем $1/r_0$; 2) асимптотическое поведение функций u_l описывает процессы в соответствующих каналах. Во второй части теоремы подразумевается, что эффекты обменного рассеяния содержатся в u_l в качестве авто-

матического следствия антисимметризации. Ниже мы увидим, что обе части теоремы тесно связаны друг с другом.

Рассмотрим сначала коэффициент при E в i -м уравнении системы (6.4)

$$\begin{aligned}
 (N\Psi')_i = & u_i(\mathbf{r}_0) + \sum_{j, k} (\pm) \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A \psi_i^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) u_j(\mathbf{r}_k) \times \\
 & \times \psi_j(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{k+1} \dots \mathbf{r}_A). \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

Здесь содержится указание на знак каждого слагаемого, который вследствие перестановки \mathbf{r}_0 с \mathbf{r}_k может быть либо положительным, либо отрицательным. Посмотрим теперь, как ведет себя сумма в соотношении (6.18) при \mathbf{r}_0 , стремящемся к бесконечности. Ясно, что те члены, в которых функция ψ_j описывает состояние дискретного спектра ядра-мишени, стремятся к нулю экспоненциально, когда \mathbf{r}_0 стремится к бесконечности. Однако, когда ψ_j соответствует непрерывному спектру, ряд слагаемых суммы будут вести себя уже иначе. Это обстоятельство, конечно, теснейшим образом связано с возможностью обменного рассеяния. Тем не менее сумма таких состояний по j все же быстро стремится к нулю¹⁾. Рассмотрим поведение функции ψ_j при r_0 , стремящемся к бесконечности:

$$\begin{aligned}
 \psi_j(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{k+1} \dots \mathbf{r}_A) \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} \\
 \varphi_\alpha(\boldsymbol{\kappa}; \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_{k+1} \dots \mathbf{r}_A) \omega_\alpha(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}_0), \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

где мы индекс j заменили непрерывной переменной $\boldsymbol{\kappa}$ ($\boldsymbol{\kappa}$ — импульс) и индексом α . Наконец,

$$\omega_\alpha(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}_0) \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}_0} + \text{Расходящиеся волны}. \quad (6.20)$$

Таким образом, нам нужно исследовать выражение

$$\begin{aligned}
 J = \int d\boldsymbol{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}_0} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A \psi_i^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \times \\
 \times u_j(\mathbf{r}_k) \varphi_\alpha(\boldsymbol{\kappa}; \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_{k+1} \dots \mathbf{r}_A). \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

Интеграл J описывает целую группу членов, содержащуюся в выражении (6.18) под знаком суммы, в котором мы, однако, заменили функцию ω_α ее асимптотическим выражением (6.20). Исследуем теперь асимптотическое поведение интеграла J .

1) На это обстоятельство наше внимание обратил проф. Ф. Лоу.

Определив асимптотическое поведение интеграла J , мы сможем относительно асимптотического поведения интеграла, соответствующего расходящимся волнам в выражении (6.20), сделать даже более сильное утверждение. Вспомним условие теоремы, касающееся энергии. Оно приводит нас к тому факту, что для каждого вещественного значения величины κ функции $u_j(\mathbf{r}_k)$ и φ_α экспоненциально стремятся к нулю, если хотя бы один из векторов \mathbf{r}_i ($i=1, 2, \dots, A$) стремится к бесконечности. Если бы это было не так, то оказалось бы возможным найти на бесконечности две свободные частицы, что противоречило бы энергетическому условию теоремы. Поэтому для каждого вещественного значения κ интеграл по $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A$ в выражении (6.21) сходится и для больших значений κ стремится к нулю. Отсюда сразу следует, что для больших значений r_0 интеграл J стремится к нулю быстрее, чем $1/r_0$. Этот результат означает, что для больших r_0 матрица \mathbf{N} диагональна и, следовательно, уравнения (6.4) и (6.8) совпадают друг с другом. Таким образом, первая часть теоремы, гласящая, что для больших r_0 функция Ψ' стремится к Ψ''' , доказана и появляется возможность определять асимптотическое поведение функций u_i прямо из решения уравнения (6.8).

Обратимся теперь к доказательству второй части теоремы. Для того чтобы получить амплитуду процесса, при котором ядро-мишень остается в состоянии i , нужно вычислить следующее выражение:

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int \psi_i^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \Psi(\mathbf{r}_0 \dots \mathbf{r}_A) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A, \quad (6.22)$$

где Ψ является антисимметризованным вариантом разложения (2.1). Выражение (6.22), как мы показали выше, есть

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} (N\Psi)_i \rightarrow \lim_{r_0 \rightarrow \infty} u_i(\mathbf{r}_0). \quad (6.23)$$

Резюмируем теперь содержание этого пункта, посвященного учету тождественности падающего (или испускаемого) нуклона с нуклонами ядра-мишени. Наши результаты справедливы, когда энергия E столь мала, что в процессе принимают участие только один падающий и испускаемый нуклоны. Для этого случая мы показываем, что после антисимметризации функции Ψ , описываемой разложением (2.1), урав-

нения для функций u_i могут быть приведены к виду (6.8), для которого будут справедливы результаты §§ 2—5. Далее, для больших значений r_0 имеем

$$\Psi''' \rightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Наконец, мы показываем, что асимптотическое выражение функции u_i дает полную амплитуду процесса, при котором ядро-мишень остается в состоянии i . Таким образом, результаты, полученные в §§ 2—5, не изменятся, если даже принять в расчет принцип Паули и обменное рассеяние, считая при этом, конечно, что энергия E подчиняется условию, указанному выше.

Автор приносит благодарность проф. Вилларсу и проф. Лоу за ряд ценных замечаний, а также д-ру Мак-Манусу и д-ру Талеру, тщательно просмотревшим рукопись этой статьи.

Добавление автора при корректуре

Кёстер и Кюммель в одном из препринтов исследуют модель комплексного потенциала с помощью теории, зависящей от времени. Часть полученных ими результатов содержится в § 2 нашей статьи. Их доказательство справедливости модели для случая, когда принимается в расчет принцип Паули, является более общим, чем доказательство, приведенное в § 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wigner E. P., Am. Journ. Phys., **23**, 371 (1955).
2. Thomas R. G., Phys. Rev., **97**, 224; **100**, 25 (1955).
3. Bloch C., Nucl. Phys., **4**, 503 (1957) (см. статью II настоящего Дополнения).
4. Teichman T., Wigner E. P., Phys. Rev., **87**, 123 (1952).
5. Lane A. N., Thomas R. D., Rev. Mod. Phys., **30**, 257 (1958). (Перевод см. основной текст настоящей книги. — *Ред.*)
6. Brown G. E., Dominicus C. T., Proc. Phys. Soc., **A70**, 668 (1957).
7. Kapur P. I., Peierls R., Proc. Roy. Soc., **A166**, 277 (1937).
8. Lamarsh J. T., Feshbach H., Phys. Rev., **104**, 1633 (1956).
9. Yoshida S., Proc. Phys. Soc., **A69**, 668 (1956).
10. Sano M., Yoshida S., Terasawa T., Nucl. Phys., **6**, 20 (1958).

11. Newton R. G., *Ann. Phys.*, **4**, 29 (1958).
12. Blatt J. M., Weisskopf V. F., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952 (см. перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).
13. Sachs R. G., *Nuclear Theory*, Cambridge, 1953.
14. Friedman F. L., Weisskopf V. F. в книге „Niels Bohr and the Development of Physics“, London, 1955 (см. перевод: „Нильс Бор и развитие физики“, ИЛ, 1958).
15. Breit G., Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **49**, 519, 642 (1936).
16. Feshbach H., Peaslee D. C., Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **71**, 145 (1947).
17. Bethe H. A., *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 69 (1937) (см. перевод: Г. Бете, Физика ядра, М.—Л., 1947).
18. Bethe H. A., *Phys. Rev.*, **57**, 1125 (1940).
19. Ewing D. H., Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **57**, 472, 935 (1940).
20. Porter C. F., Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **104**, 483 (1956).
21. Feshbach H., Porter C. F., Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **96**, 448 (1954).
22. Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **97**, 224 (1955).
23. Wolfenstein L., *Phys. Rev.*, **82**, 690 (1951).
24. Hauser W., Feshbach H., *Phys. Rev.*, **87**, 366 (1952).
25. Bloch C., *Journ. phys. rad.*, **17**, 510 (1956); *Nucl. Phys.*, **3**, 137 (1957).
26. Bowcock J., *Proc. Phys. Soc.*, **A70**, 515 (1957).
27. Feshbach H., *Ann. Rev. Nucl. Sci.* (Stanford), **8**, 44 (1958).
28. Feshbach H., *Proceedings of Brookhaven Conference, January, 1955* (BNL Report-331); Lane A. M., Lynn J. E., *Harwell report A. E. R. E. T/R 2210*, не опубликовано.
29. *Proceedings of the Brookhaven Conference, January, 1955* (BNL Report-331).
30. Gugelot P. C., *Physica*, **22**, 1019 (1956).
31. Cranberg L. C., Levin J., *Phys. Rev.*, **103**, 343 (1956).
32. Rosen L., Stewart L., *Phys. Rev.*, **107**, 829 (1957).
33. Austern N., Butler S., McManus H., *Phys. Rev.*, **92**, 350 (1953).
34. Levinson C., Banerjee M., *Ann. of Phys.*, **2**, 471, 499 (1957); **3**, 67 (1958).
35. Butler S. T., *Phys. Rev.*, **106**, 276 (1957).
36. Butler S. T., *Nuclear Stripping Reactions*, New York, 1957 (см. перевод: С. Батлер, Ядерные реакции срыва, ИЛ, 1958).
37. Chase O. M., Willets L., Edmonds A. R., *Phys. Rev.*, **110**, 1080 (1958).
38. Lane A. N., Thomas R. G., Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **98**, 18 (1955).
39. Mott N. F., Massey H. S. W., *Theory of Atomic Collisions*, London and New York, 1949 (см. перевод: Н. Мотт, Г. Мессси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951).
40. Breit G., *Phys. Rev.*, **69**, 472 (1946).
41. Cini M., Fubini S., *Nuovo Cimento*, **2**, 75 (1955).
42. Gell-Mann M., Goldberger M. L., *Phys. Rev.*, **91**, 398 (1958).

43. Ostrofsky M., Breit G., Johnson D. P., Phys. Rev., **49**, 22 (1936).
44. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953 (см. перевод: Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, т. I, 1958, т. II, 1960).
45. Adair R. K., Darden S. E., Fields R. E., Phys. Rev., **96**, 503 (1954).
46. Blatt J. M., Biedenharn L. C., Rev. Mod. Phys., **24**, 258 (1952).
47. de-Shalit A., Weisskopf V. F., Ann. of Phys., **5**, 282 (1958).
48. Jastrow R., Phys. Rev., **98**, 1479 (1955).
49. Bethe H. A., Phys. Rev., **103**, 1353 (1956) (см. перевод: в сборнике „Вопросы квантовой теории многих тел“, ИЛ, 1959).
50. Bethe H. A., Goldstone J., Proc. Roy. Soc., **A233**, 551 (1956).
51. Brueckner K. A., Gammel J. L., Phys. Rev., **109**, 1023 (1958).
52. Керман А., МсМанус Н., Тхалер Р., Ann. of Phys. (в печати).
53. Watson K. M., Phys. Rev., **89**, 575 (1953); **105**, 1388 (1957).
54. Francis N. C., Watson K. M., Phys. Rev., **92**, 291 (1953).
55. Takeda G., Watson K. M., Phys. Rev., **94**, 1087 (1954); **97**, 1336 (1955).
56. Riesenfeld W. B., Watson K. M., Phys. Rev., **102**, 1157 (1956).

II. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

К. Блох

C. Bloch, Nucl. Phys., 4, 503—528 (1957)

§ 1. Введение

Существующие формулировки теории ядерных реакций можно разделить на два различных класса.

а) Формулировки Вигнера — Айзенбуда [1—4] и Капура — Пайерлса [5]. Эти теории, особенно хорошо приспособленные для описания изолированных резонансов, имеют тот недостаток, что они оказываются непригодными в случае, когда существенную роль играет большое число резонансов. Действительно, в этом случае нам понадобится большое число параметров — энергий уровней и парциальных ширин, — относительно которых весьма трудно делать какие-либо предсказания. Большинство этих параметров связано с ядерным взаимодействием неявным и сложным образом. По этой причине в этих теориях представляется весьма затруднительным явное описание прямых взаимодействий, недавно обнаруженных экспериментально [6, 7].

б) Формулировки, основанные на интегральном уравнении рассеяния [8]. В этих формулировках устанавливается непосредственная связь вида взаимодействия между нуклонами с матрицей столкновений или с сечениями. Такие формулировки пригодны для расчетов по теории возмущений и легко обобщаются на случай прямых взаимодействий. Они справедливы главным образом в области высоких энергий, но оказываются весьма громоздкими при исследовании резонансов, возникающих при низких энергиях.

Как резонансные процессы, так и процессы прямых взаимодействий играют важную роль в ядерных реакциях; имеется область энергий, где одновременно оказываются существенными и интерферируют между собой оба типа процессов. Чтобы исследовать такого рода случаи, необходим некоторый единый формализм.

Излагаемая в настоящей статье формулировка теорий ядерных реакций сохраняет характерные для теорий типа „а“ понятия *внутренней области* и *области каналов* конфигурационного пространства $3A$ измерений. Напомним, что областью каналов является та часть конфигурационного пространства, где нуклоны разделены на две группы (или на несколько групп), удаленные друг от друга на достаточно большое расстояние, на котором между группами отсутствует взаимодействие ядерного типа. Внутренняя область Ω конфигурационного пространства — это область, где все нуклоны взаимодействуют друг с другом. Ограничивающая внутреннюю область поверхность Σ представляет собой совокупность точек конфигурационного пространства, где образующие канал частицы приходят в соприкосновение друг с другом. Эту поверхность можно рассматривать как обобщение понятия поверхности ядра. Для нас представляется важным сохранить различие между внутренней зоной и зоной каналов, ибо в зоне каналов мы можем точно решить радиальное волновое уравнение и рассчитать факторы проницаемости, которые играют важную роль в теории реакций с участием заряженных частиц низкой энергии.

Во внутренней области задача состоит в решении уравнения Шредингера с граничными условиями на поверхности ядра. Эти условия определяются начальными условиями столкновения, т. е. заданием падающего пучка.

Представленный здесь метод основывается на формальном решении этой краевой задачи. Существенным пунктом расчета является построение функции Грина, отвечающей задаче ядерных столкновений. Это построение сводится к отысканию оператора, обратного сумме гамильтониана системы и *оператора граничных условий*, определенного на поверхности Σ . Выбирая соответствующим образом этот оператор граничных условий, можно путем одного-единственного обращения оператора получить общее формальное выражение для матрицы столкновений.

Это выражение может служить отправным пунктом различных приближенных методов. Например, вводя во внутренней области некоторые специальные системы ортонормированных базисных функций, можно получить как результаты Вигнера, так и результаты Капура — Пайерлса.

Гамильтониан системы можно также представить в виде

суммы модельного гамильтониана H_0 и потенциала \mathcal{V} , равного разности истинного ядерного взаимодействия и среднего взаимодействия, введенного в H_0 . Матрица рассеяния в этом случае может быть разложена по степеням \mathcal{V} , и может быть сделана перегруппировка главных членов. Это лежит в основе метода расчета *прямых взаимодействий* в ядерных реакциях.

§ 2. Простой пример

Рассмотрим сначала случай рассеяния частицы с энергией ϵ в состоянии s в поле центрального потенциала $V(r)$, обладающего конечным радиусом действия R . Во *внутренней области*,

$$0 \leq r \leq R,$$

волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(\epsilon - H)\psi(r) = 0, \quad (1)$$

где гамильтониан записывается в виде ¹⁾

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V(r).$$

Во *внешней области*,

$$R \leq r,$$

волновая функция представляет собой линейную комбинацию входящей волны $\psi^{(-)}$ и выходящей волны $\psi^{(+)}$:

$$\psi(r) = \psi^{(-)}(r) - \psi^{(+)}(r), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \psi^{(-)} r &= \frac{1}{r} e^{-ikr}, \\ \psi^{(+)} r &= \frac{S}{r} e^{+ikr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Амплитуда входящей волны определяется падающим пучком. Амплитуда S выходящей волны позволяет рассчитать сечение рассеяния; именно величину S и нужно вычислить.

1) Здесь через $(d^2/dr^2) r$ обозначен оператор

$$\frac{d^2}{dr^2} r \psi(r) = \frac{d^2}{dr^2} [r \psi(r)].$$

Задача, в сущности, состоит в том, чтобы во внутренней области решить уравнение Шредингера (1) с тем граничным условием при $r = R$, что амплитуда входящей волны должна быть равна единице.

Оператор H , рассматриваемый во внутренней области, которая, таким образом, будет играть важную роль в нашем рассмотрении, имеет тот существенный недостаток, что он не является эрмитовским. В самом деле, если $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ — две произвольные функции, то имеем ¹⁾

$$\int_0^R r^2 dr [\psi_1^*(H\psi_2) - (H\psi_1)^* \psi_2] = \\ = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[r\psi_1^* \frac{d(r\psi_2)}{dr} - \frac{d(r\psi_1^*)}{dr} r\psi_2 \right]_R. \quad (4)$$

Обычно эта трудность устраняется тем, что функции ψ , на которые действует оператор H , подчиняют определенным граничным условиям при $r = R$. В самом деле, если мы потребуем, чтобы при $r = R$ все функции ψ обращались в нуль или чтобы их логарифмические производные равнялись одной и той же заданной величине, то мы можем быть уверены, что выражение (4) обращается в нуль. Этот метод не может быть использован в интересующем нас случае, так как мы не можем знать наперед значения при $r = R$ логарифмической производной функции $\psi(r)$, являющейся решением задачи.

Оператор H можно сделать эрмитовым с помощью следующего, хорошо приспособленного к рассматриваемой задаче метода. Метод заключается в добавлении к оператору H поверхностного члена специального вида, компенсирующего выражение (4). Так, полагая

$$\mathcal{H} = H + \frac{\hbar^2}{2MR} \delta(r - R) \frac{d}{dr} r,$$

¹⁾ Элемент объема в действительности должен иметь вид $4\pi r^2 dr$. Следовало бы также выражение (3) умножить на нормированную сферическую гармонику $Y_{00} = (4\pi)^{-1/2}$. Так как все эти множители, содержащие 4π , исключаются при вычислении матричного элемента, их всюду можно опустить.

сразу же убеждаемся, что, каковы бы ни были функции ψ_1 и ψ_2 ¹⁾, имеет место соотношение

$$\int_0^R r^2 dr [\psi_1^* (\mathcal{H}\psi_2) - (\mathcal{H}\psi_1)^* \psi_2] = 0. \quad (5)$$

В поверхностном члене множители $\delta(r-R)$, d/dr и r не коммутируют друг с другом, однако легко убедиться, что указанный порядок сомножителей обеспечивает справедливость равенства (5).

Несмотря на свой сингулярный характер, оператор \mathcal{H} обладает вполне определенными матричными элементами для двух произвольных волновых функций:

$$\int_0^R r^2 dr \psi_1^* \mathcal{H}\psi_2 = \int_0^R r^2 dr \left[\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d(r\psi_1^*)}{dr} \frac{d(r\psi_2)}{dr} + \psi_1^* V\psi_2 \right].$$

Это показывает, что сингулярный вид оператора \mathcal{H} связан с тем, что мы имеем дело с координатным представлением и что сингулярный вид исчезает в других представлениях.

Если $\psi(r)$ является непрерывной и дифференцируемой функцией, то функция $\mathcal{H}\psi(r)$ непрерывна при $r < R$, но при $r = R$ может иметь сингулярность типа δ -функции:

$$\frac{\hbar^2}{2MR} \delta(r-R) \left[\frac{d}{dr} (r\psi) \right]_R.$$

Равенство двух величин такого вида, т. е. имеющих вид суммы непрерывной на интервале $(0, R)$ функции и сингулярной δ -функции при $r = R$:

$$f(r) + A\delta(r-R) = g(r) + B\delta(r-R),$$

означает равенство между собой отдельно сингулярных и непрерывных частей:

$$f(r) = g(r), \quad A = B.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$(\varepsilon - \mathcal{H})\psi(r) = F(r),$$

1) Мы всюду предполагаем, что все рассматриваемые волновые функции, так же как и их первые производные, непрерывны и что существуют их вторые производные.

в котором правая часть имеет вид

$$F(r) = f(r) + A\delta(r - R), \quad (6)$$

где функция $f(r)$ непрерывна при $r = R$, эквивалентно дифференциальному уравнению с некоторым граничным условием:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - H)\psi(r) &= f(r) \quad (r < R), \\ -\frac{\hbar^2}{2MR} \left[\frac{d}{dr}(r\psi) \right]_R &= A \quad (r = R). \end{aligned}$$

Поскольку полученное здесь граничное условие не соответствует рассматриваемой проблеме, мы заменим оператор \mathcal{H} другим, несколько отличным от него оператором:

$$\mathcal{H} = H + \frac{\hbar^2}{2MR} \delta(r - R) \left(\frac{d}{dr} - ik \right) r. \quad (7)$$

Обозначив через \mathcal{L} оператор граничных условий

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2MR} \delta(r - R) \left(\frac{d}{dr} - ik \right) r \quad (8)$$

и взяв в качестве $\psi^{(+)}$ выходящую волну (3), получим

$$\mathcal{L}\psi^{(+)} = \frac{\hbar^2}{2MR} \delta(r - R) \left(\frac{d}{dr} - ik \right) S e^{ikr} = 0. \quad (9)$$

Это свойство указывает на то, какую важную роль играет оператор \mathcal{L} . В самом деле, из него вытекает уравнение

$$(\varepsilon - \mathcal{H})\psi(r) = -\mathcal{L}\psi^{(-)}(r), \quad (10)$$

которое для $r < R$ сводится к уравнению Шредингера (1), а для $r = R$ — к уравнению

$$\mathcal{L}\psi(r) = \mathcal{L}\psi^{(-)}(r),$$

являющемуся следствием соотношения (9). В уравнении (10) правая часть является известной величиной, поскольку она зависит лишь от входящей волны.

Если для оператора $\varepsilon - \mathcal{H}$ существует обратный оператор, указывающий, в частности, на то, что уравнение

$$(\varepsilon - \mathcal{H})\psi(r) = 0 \quad (11)$$

не имеет решений, отличных от тождественного нуля, то мы можем решение уравнения (10) записать в виде

$$\psi(r) = -\frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} \mathcal{L}\psi^{(-)}(r). \quad (12)$$

Используя это выражение при $r = R$ и вводя сумму (2), мы сразу же получаем амплитуду выходящей волны при $r = R$:

$$\psi^{(+)}(R) = \psi^{(-)}(R) + \left[\frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} \mathcal{L}\psi^{(-)} \right]_R. \quad (13)$$

Это соотношение вместе с (2) позволяет в принципе рассчитать величину S . Таким образом, задача формально решена.

Теперь необходимо проверить законность произведенных формальных операций. Это сделать особенно легко для одномерного случая.

Рассмотрим уравнение типа (10):

$$(\varepsilon - \mathcal{H})\psi(r) = F(r), \quad (14)$$

где правая часть $F(r)$ имеет вид (6). Случай, который нас особенно интересует, соответствует $f(r) = 0$. В противоположном случае, когда $A = 0$, решение уравнения (10) сводится к системе дифференциального уравнения с правой частью и граничным условием:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - H)\psi(r) &= f(r) \quad (r < R), \\ \left[\left(\frac{d}{dr} - ik \right) r\psi \right]_R &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение этой задачи выражается в виде

$$\psi(r) = \int_0^R r'^2 dr' G(r, r') f(r'), \quad (16)$$

где $G(r, r')$ представляет собой функцию Грина дифференциального уравнения с граничным условием. Построение этой функции для одномерного случая приводится в Приложении. Там приведено также решение уравнения (14) с правой частью, имеющей самый общий вид (6). Такое уравнение эквивалентно уравнению

$$(\varepsilon - H)\psi(r) = f(r) \quad (r < R), \quad (17)$$

с граничным условием

$$-\frac{\hbar^2}{2MR} \left[\left(\frac{d}{dr} - ik \right) r\psi \right]_R = A, \quad (17)$$

и его решение выражается в виде

$$\psi(r) = \int_0^R r'^2 dr' G(r, r') F(r'). \quad (18)$$

Мы можем получить этот результат другим способом, внося сингулярность правой части во внутреннюю область, т. е. заменяя $F(r)$ на

$$F(r) = f(r) + A\delta(r - R + \eta),$$

где η — бесконечно малая положительная величина. В таком случае обычная теория функций Грина показывает, что (18) дает решение уравнения

$$(\varepsilon - H)\psi(r) = F(r)$$

с граничным условием (15). В окрестности $R - \eta$ это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением (15). Оно показывает, что в этой точке функция $\psi(r)$ непрерывна, но ее первая производная испытывает разрыв, величина которого сразу же вычисляется, например, путем интегрирования уравнения в бесконечно малом интервале $(R - 2\eta, R)$. Это дает

$$\left[\frac{\hbar^2}{2Mr} \frac{d}{dr} r\psi \right]_{R-2\delta}^R = A.$$

Мы видим, что при $r = R$ функция $\psi(r)$ удовлетворяет граничному условию (15), а при $r = R - 2\delta$ удовлетворяет граничному условию (17). Остается только устремить величину δ к нулю, чтобы убедиться в том, что (18) также является решением системы (17).

Эти рассуждения дают оправдание формального решения (12) уравнения (11). Подставляя выражения (3) и (8) в (13), получаем выражение для S в форме

$$S = e^{2ikR} \left[1 - \frac{i\hbar^2 k R}{M} G(R, R) \right], \quad (19)$$

а подставляя сюда значение функции Грина, приведенное в Приложении, мы приходим к известному результату

$$S = e^{2ikR} \frac{\left[\left(\frac{d}{dr} + ik \right) r\psi \right]_R}{\left[\left(\frac{d}{dr} - ik \right) r\psi \right]_R}, \quad (20)$$

где $\psi(r)$ является решением уравнения Шредингера, конечным при $r=0$.

Формулу (13) можно использовать для приближенных расчетов, которые для одномерного случая обсуждаться нами не будут.

§ 3. Общая теория

В дальнейшем мы будем для простоты учитывать только двухчастичные каналы, которые, как мы считаем, играют существенную роль в рассматриваемых процессах.

Для четкого определения канала нам необходимо уточнить природу частиц, составляющих канал, уровни энергии, на которых находятся эти частицы, орбитальный момент относительного движения частиц и связь их спинов с орбитальным моментом. Обозначим через λ совокупность квантовых чисел, характеризующих канал. В области конфигурационного пространства, где образующие канал λ частицы полностью разделены, т. е. когда расстояние между их центрами масс r_λ превышает радиус канала R_λ , волновая функция системы может быть представлена в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_\lambda |\lambda\rangle \psi_\lambda(r_\lambda) \quad (r_\lambda \geq R_\lambda), \quad (21)$$

где ψ_λ — радиальная часть волновой функции, а $|\lambda\rangle$ представляет собой произведение волновых функций двух частиц канала и сферической гармоники, описывающей угловую зависимость движения частиц. Функции $|\lambda\rangle$ ортогональны между собой. Мы предполагаем также, что они нормированы.

Символ $|\)$ будем использовать всюду для обозначения полных волновых функций, зависящих от всех координат, а символ $|)$ для обозначения неполных волновых функций, зависящих от всех координат, кроме координаты r_λ — расстояние между центрами масс двух частиц канала. Скалярное произведение полной и неполной волновых функций удобно

обозначить через $(\lambda | \Psi)$. При вычислении скалярного произведения мы должны положить координату r_λ равной константе, большей или равной R_λ , и проинтегрировать по всем другим координатам, включая углы, определяющие направление вектора \mathbf{r}_λ , соединяющего центры частиц. Следовательно, определенное таким способом скалярное произведение является функцией r_λ , например

$$(\lambda | \Psi) = \psi_\lambda(r_\lambda) \quad (r_\lambda \geq R_\lambda). \quad (22)$$

Не следует забывать, что элемент объема в пространстве \mathbf{r}_λ равен $r_\lambda^2 dr_\lambda d\omega_\lambda$, где $d\omega_\lambda$ представляет собой элемент телесного угла в скалярном произведении (22). Следовательно, если неполное скалярное произведение (22) нужно превратить в полное скалярное произведение, то мы должны добавить интегрирование по r_λ , предварительно домножив подынтегральное выражение на $r_\lambda^2 dr_\lambda$.

При заданном значении энергии существует определенное число открытых каналов и определенное число закрытых каналов. В открытом канале функция ψ_λ представляет собой линейную комбинацию входящей и выходящей волн:

$$\psi_\lambda(r_\lambda) = \psi_\lambda^{(-)}(r_\lambda) - \psi_\lambda^{(+)}(r_\lambda), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_\lambda^{(-)}(r_\lambda) &= (\lambda | -) \frac{u_\lambda^{(-)}(r_\lambda)}{r_\lambda V_\lambda^{1/2}}, \\ \psi_\lambda^{(+)}(r_\lambda) &= (\lambda | +) \frac{u_\lambda^{(+)}(r_\lambda)}{r_\lambda V_\lambda^{1/2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Функция $u_\lambda^{(+)}$ является решением радиального волнового уравнения для частиц канала λ , асимптотическая форма которого при $r_\lambda \rightarrow \infty$, например для нейтронов, имеет вид

$$u_\lambda^{(+)} \rightarrow e^{i(k_\lambda r_\lambda - \frac{1}{2} l_\lambda \pi)},$$

где k_λ — волновое число и l_λ — орбитальный момент, соответствующие каналу λ . Если для канала λ частицы обладают зарядами Z_λ и z_λ , то при $r_\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$u_\lambda^{(+)} \rightarrow e^{i(k_\lambda r_\lambda - \frac{1}{2} l_\lambda \pi - \gamma_\lambda \ln 2k_\lambda r_\lambda)},$$

где

$$\gamma_\lambda = \frac{Z_\lambda z_\lambda e^2}{\hbar V_\lambda}. \quad (25)$$

В (24) и (25) через V_λ обозначена относительная скорость частиц канала λ . Функции $u_\lambda^{(-)}$ и $u_\lambda^{(+)}$ связаны между собой соотношением

$$u_\lambda^{(-)} = u_\lambda^{(+)*}.$$

Для дальнейшего нам необходимо знать поведение функций $u_\lambda^{(+)}$ и $u_\lambda^{(-)}$ в окрестности поверхности ядра, т. е. при $r_\lambda = R_\lambda$. Следуя Блатту и Вайскопфу [9], полагаем

$$u_\lambda^{(+)}(R_\lambda) = v_\lambda^{-1/2} e^{-i\xi_\lambda}, \quad (26)$$

$$\left[\frac{r_\lambda}{u_\lambda^{(+)}} \frac{\partial u_\lambda^{(+)}}{\partial r_\lambda} \right]_{R_\lambda} = \Delta_\lambda + ik_\lambda R_\lambda v_\lambda = L_\lambda^{(+)},$$

где v_λ — фактор проницаемости для канала λ , а ξ_λ — сдвиг фазы, отвечающий рассеянию от непроницаемой сферы.

Для закрытых каналов имеется только одна-единственная радиальная волновая функция, которая при $r_\lambda \rightarrow \infty$ остается ограниченной. Мы обозначим ее через $w_\lambda(r_\lambda)$ и положим

$$\left[\frac{r_\lambda}{w_\lambda} \frac{\partial w_\lambda}{\partial r_\lambda} \right]_{R_\lambda} = L_\lambda^f. \quad (27)$$

Эта величина всегда вещественна.

Комплексные числа $(\lambda | -)$ и $(\lambda | +)$ в (24) представляют собой амплитуды входящих и выходящих волн. Если в качестве нормировочного множителя для функций $u_\lambda^{(-)}$ и $u_\lambda^{(+)}$ ввести $V_\lambda^{-1/2}$, то единичная амплитуда будет соответствовать единичному потоку.

Амплитуда входящей волны $(\lambda | -)$ определяется падающим потоком. Так как уравнение Шредингера является линейным, то амплитуды выходящих волн зависят линейным образом от амплитуд входящих волн. Следовательно, мы можем написать

$$(\lambda | +) = \sum_{\mu} (\lambda | S | \mu) (\mu | -). \quad (28)$$

Это соотношение можно рассматривать в качестве определения матрицы рассеяния S . Если известна матрица S , то могут быть найдены все физические наблюдаемые величины.

Чтобы найти матрицу S , нужно решить во внутренней области уравнение Шредингера

$$(\epsilon - H) |\Psi\rangle = 0, \quad (29)$$

где гамильтониан H имеет вид

$$H = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2M_i} \Delta_i + V. \quad (30)$$

Здесь M_i — масса i -го нуклона, Δ_i — оператор Лапласа, действующий на i -й нуклон, и V — энергия взаимодействия нуклонов.

Здесь вновь необходимо отметить, что во внутренней области Ω гамильтониан H не является эрмитовым оператором. В самом деле, применяя теорему Грина, получаем для двух произвольных функций Ψ_1 и Ψ_2 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\Psi_1^* (H\Psi_2) - (H\Psi_1)^* \Psi_2] d\tau = \\ &= - \int_{\Omega} \sum_i \frac{\hbar^2}{2M_i} [\Psi_1^* (\Delta_i \Psi_2) - (\Delta_i \Psi_1)^* \Psi_2] d\tau = \\ &= - \sum_{\lambda} \frac{\hbar^2}{2M_{\lambda}} \left[r_{\lambda} \psi_{1\lambda}^* \frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} (r_{\lambda} \psi_{2\lambda}) - \frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} (r_{\lambda} \psi_{1\lambda})^* r_{\lambda} \psi_{2\lambda} \right]_{R_{\lambda}}, \quad (31) \end{aligned}$$

где M_{λ} — приведенная масса для канала λ , $\psi_{1\lambda}(r_{\lambda})$ и $\psi_{2\lambda}(r_{\lambda})$ — радиальные функции канала λ , соответствующие функциям Ψ_1 и Ψ_2 и определяемые с помощью (21) или (22).

Для того чтобы сделать H эрмитовым оператором, нужно к нему добавить член, определенный на поверхности Σ . Поэтому оператор

$$\mathcal{H} = H + \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \frac{\hbar^2}{2M_{\lambda} R_{\lambda}} \delta(r_{\lambda} - R_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} r_{\lambda} \langle \lambda| \quad (32)$$

уже является эрмитовым. В самом деле, легко проверить, что вклад добавочного члена в точности компенсирует величину (31), так что

$$\int_{\Omega} [\Psi_1^* (\mathcal{H}\Psi_2) - (\mathcal{H}\Psi_1)^* \Psi_2] d\tau = 0. \quad (33)$$

Введенный таким образом поверхностный оператор равен нулю всюду, кроме поверхности Σ . Для каждого из каналов он имеет определенные значения. Этот факт описывается с помощью проекционного оператора $|\lambda\rangle\langle\lambda|$, который выбирает соответствующие части поверхности Σ .

Чтобы во внутренней области получить формальное решение уравнения Шредингера с граничными условиями, соответствующими рассеянию, т. е. с заданной амплитудой входящей волны $(\lambda| -)$, мы определим оператор \mathcal{H} , несколько отличный от \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = H + \mathcal{L}, \quad (34)$$

где \mathcal{L} — оператор граничных условий:

$$\mathcal{L} = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \frac{\hbar^2}{2M_{\lambda}R_{\lambda}} \delta(r_{\lambda} - R_{\lambda}) \left(\frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} - \frac{L_{\lambda}}{r_{\lambda}} \right) r_{\lambda} \langle\lambda|, \quad (35)$$

причем

$$\begin{aligned} L_{\lambda} &= L_{\lambda}^{(+)} \text{ для открытых каналов,} \\ L_{\lambda} &= L_{\lambda}^f \text{ для закрытых каналов,} \end{aligned} \quad (36)$$

где $L_{\lambda}^{(+)}$ и L_{λ}^f определены согласно (26) и (27). Величины L_{λ} выбираются так потому, что в этом случае мы получим соотношения

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} - \frac{L_{\lambda}}{r_{\lambda}} \right) u_{\lambda}^{(+)} \right]_{R_{\lambda}} &= 0, \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} - \frac{L_{\lambda}}{r_{\lambda}} \right) w_{\lambda} \right]_{R_{\lambda}} &= 0, \end{aligned}$$

показывающие, что $\mathcal{L}|\Psi\rangle$ зависит только от амплитуд входящих волн. Таким образом, $\mathcal{L}|\Psi\rangle$ оказывается известной величиной

$$\mathcal{L}|\Psi\rangle = \mathcal{L} \sum_{\lambda}^0 |\lambda\rangle \psi_{\lambda}^{(-)}, \quad (37)$$

где суммирование производится только по открытым каналам.

Во внутренней области Ω мы имеем уравнение (29); на поверхности Σ выполняется соотношение (37). Следовательно, мы можем записать уравнение

$$(\epsilon - \mathcal{H})|\Psi\rangle = -\mathcal{L} \sum_{\lambda}^0 |\lambda\rangle \psi_{\lambda}^{(-)}, \quad (38)$$

справедливое в области $\Omega + \Sigma$. В § 5, п. 2, мы покажем, что оператор \mathcal{K} не имеет вещественных собственных значений, другими словами, уравнение

$$(\varepsilon - \mathcal{K})|\Psi\rangle = 0 \quad (39)$$

обладает лишь решениями, тождественно равными нулю. Это свойство, так же как аналогичное свойство в одномерном случае, рассмотренном в § 2, приводит нас к утверждению, что оператор $\varepsilon - \mathcal{K}$ имеет строго определенный обратный оператор.

Таким образом, мы можем решение уравнения (38) записать в виде

$$|\Psi\rangle = - \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{K}} \mathcal{L} \sum_{\lambda}^0 |\lambda\rangle \psi_{\lambda}^{(-)}. \quad (40)$$

Это выражение определяет $|\Psi\rangle$ во всей области $\Omega + \Sigma$. Используя его на поверхности Σ , мы можем найти амплитуды $\psi_{\lambda}(R_{\lambda})$. Согласно (22), можно записать

$$\psi_{\lambda}(R_{\lambda}) = - \sum_{\mu}^0_{R_{\lambda}} \left(\lambda \left| \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{K}} \mathcal{L} \right| \mu \right) \psi_{\mu}^{(-)}. \quad (41)$$

Здесь мы пользуемся обозначением

$${}_{R_{\lambda}}(\lambda|\Psi) = [(\lambda|\Psi)]_{R_{\lambda}}, \quad (42)$$

так как мы должны помнить, что скалярные произведения, такие, как $(\lambda|\Psi)$, являются функциями r_{λ} при $r_{\lambda} \geq R_{\lambda}$. Так как формула (40) не может применяться вне области $\Omega + \Sigma$, мы обязаны положить $r_{\lambda} = R_{\lambda}$.

Из соотношений (23) и (41) мы можем, наконец, получить амплитуды выходящих волн для открытых каналов, так что на поверхности ядра имеем

$$\psi_{\lambda}^{(+)}(R_{\lambda}) = \psi_{\lambda}^{(-)}(R_{\lambda}) + \sum_{\mu}^0_{R_{\lambda}} \left(\lambda \left| \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{K}} \mathcal{L} \right| \mu \right) \psi_{\mu}^{(-)}. \quad (43)$$

Это соотношение вместе с (24) дает амплитуды $(\lambda|+)$ как функции $(\lambda|-)$, т. е. определяет матрицу рассеяния,

§ 4. Введение базиса во внутренней области

Чтобы сделать выражение (43) определенным, введем во внутренней области полный ортонормированный базис

$$|s\rangle, |t\rangle, \dots,$$

который в остальном является *полностью произвольным*.

С помощью этого базиса мы можем записать

$$\frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} = \sum_{s, t} |s\rangle \langle s | \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} |t\rangle \langle t|. \quad (44)$$

Подставим (44) в (43); для появляющихся при этом величин $(\lambda | s)$ введем обозначения

$$g_s^{(\lambda)} = \left(\frac{\hbar^2 R_\lambda}{2M_\lambda} \right)^{1/2} R_\lambda (\lambda | s). \quad (45)$$

Если же функции $|s\rangle$ в окрестности поверхности Σ записываются в виде, соответствующем (21),

$$|s\rangle = \sum_\lambda |\lambda\rangle \varphi_s^{(\lambda)}(r_\lambda), \quad (46)$$

то можно в равной мере говорить, что $g_s^{(\lambda)}$ определяются соотношением

$$g_s^{(\lambda)} = \left(\frac{\hbar^2 R_\lambda}{2M_\lambda} \right)^{1/2} \varphi_s^{(\lambda)}(R_\lambda). \quad (47)$$

Величина $g_s^{(\lambda)}$, пропорциональная взятой на поверхности ядра амплитуде базисной функции, называется *приведенной амплитудой* базисной функции. Квадрат этой величины имеет размерность энергии и называется *приведенной шириной* базисной функции. Величина $g_s^{(\lambda)}$ зависит, очевидно, только от внутренней области и от выбора базисных функций.

При вычислении выражения (43) нам понадобятся также величины ¹⁾

$$\langle t | \mathcal{L} | \mu \rangle \psi_\mu^{(-)} = \langle t | \mu \rangle (\mu | -) \frac{\hbar^2 R_\mu}{2M_\mu V_\mu^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_\mu} - \frac{L_\mu^{(+)}}{r_\mu} \right) u_\mu^{(-)} \right]_{R_\mu}.$$

¹⁾ Не следует забывать, что в скалярном произведении при интегрировании по r_λ имеется множитель $r_\lambda^2 dr_\lambda$.

Выражение в квадратных скобках легко вычисляется с помощью соотношений (26) и комплексно сопряженных им соотношений. Таким образом, получаем

$$\langle t | \mathcal{L} | \mu \rangle \psi_{\mu}^{(-)} = \frac{\hbar^{1/2}}{i} (\mu | -) G_t^{(\mu)*} e^{i\epsilon_{\mu}}, \quad (48)$$

где мы положили

$$G_s^{(\lambda)} = g_s^{(\lambda)} (2k_{\lambda} R_{\lambda} v_{\lambda})^{1/2}. \quad (49)$$

Величина $G_s^{(\lambda)}$, содержащая фактор проницаемости, представляет собой *парциальную амплитуду* базисной функции, отвечающую каналу λ . Квадрат ее имеет размерность энергии и называется *парциальной шириной* базисной функции.

Подставляя (24), (44) и (48) в (43), получаем для амплитуд выходящих волн, выраженных через амплитуду входящих волн, соотношение

$$\begin{aligned} (\lambda | +) = \\ = \sum_{\mu}^0 e^{i\epsilon_{\lambda}} \left[\delta_{\lambda\mu} - i \sum_{s, t} \langle s | \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}} | t \rangle G_s^{(\lambda)} G_t^{(\mu)*} \right] e^{i\epsilon_{\mu}} (\mu | -). \end{aligned}$$

Отсюда сразу же получаем матрицу S . Мы можем записать ее в виде

$$S = e^{i\epsilon} \left[1 - i \sum_{s, t} \langle s | \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}} | t \rangle \mathbf{G}_s \times \mathbf{G}_t^* \right] e^{i\epsilon}, \quad (50)$$

где мы через \mathbf{G}_s обозначили вектор в *символическом пространстве открытых каналов*, компоненты которого равны $G_s^{(\lambda)}$; символом \times обозначено прямое матричное произведение двух векторов, а через $e^{i\epsilon}$ — матрица, диагональная в пространстве открытых каналов, элементы которой равны $e^{i\epsilon_{\lambda}}$. Матрица S , очевидно, сама является матрицей в пространстве открытых каналов.

§ 5. Резонансные реакции; два частных базиса

Чтобы найти оператор, обратный оператору $\epsilon - \mathcal{H}$, следует найти базис, при котором расчеты облегчаются. Для этой цели удобно взять базис, который диагонализует \mathcal{H} ; этим базисом пользовались Капур и Пайерлс [5]. К сожалению, с введением оператора \mathcal{H} возникают определенные

трудности. С одной стороны, оператор \mathcal{K} не является эрмитовым, так как фигурирующие в операторе \mathcal{L} числа $L_\lambda^{(+)}$, отвечающие открытым каналам, являются комплексными. С другой стороны, что более существенно, величины L_λ и, следовательно, оператор \mathcal{K} зависят от энергии ϵ . Отсюда следует, что базисные функции и, следовательно, приведенные ширины и собственные значения будут сложным образом зависеть от энергии.

Чтобы избежать этих трудностей, мы должны, следуя Вигнеру, ввести базис, который диагонализует не \mathcal{K} , а оператор

$$\mathcal{K}_W = H + \mathcal{L}(b), \quad (51)$$

где $\mathcal{L}(b)$ представляет собой оператор, который получается из \mathcal{L} путем замены в нем величин L_λ для всех каналов, открытых и закрытых, на произвольные постоянные вещественные числа b_λ . В явном виде оператор \mathcal{K}_W записывается как

$$\mathcal{K}_W = H + \sum_\lambda |\lambda\rangle \frac{\hbar^2}{2M_\lambda R_\lambda} \delta(r_\lambda - R_\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial r_\lambda} - \frac{b_\lambda}{r_\lambda} \right) r_\lambda \langle \lambda|. \quad (52)$$

Таким образом, мы сформулировали задачу на собственные значения, в которой отсутствует зависимость от энергии, так что приведенные амплитуды и собственные значения оказываются постоянными, характерными для внутренней области. К сожалению, в этом случае оператор $\epsilon - \mathcal{K}$ полностью не диагонализуется, и отыскание обратного ему оператора по-прежнему остается трудной задачей, которая может быть решена только приближенно.

В обоих методах имеются свои преимущества и свои недостатки. Рассмотрим их по порядку.

1. Базис Вигнера

Так как оператор \mathcal{K}_W является эрмитовым, то его собственные значения являются вещественными числами, а совокупность собственных функций образует полную ортонормированную систему. Обозначим через ϵ_s и $|s\rangle$ собственные значения и собственные функции оператора \mathcal{K}_W

$$\mathcal{K}_W |s\rangle = \epsilon_s |s\rangle. \quad (53)$$

Это уравнение эквивалентно системе:

$$H|s\rangle = \varepsilon_s |s\rangle, \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_\lambda} - \frac{b_\lambda}{r_\lambda} \right) r_\lambda \varphi_s^{(\lambda)}(r_\lambda) \right]_{R_\lambda} = 0, \quad (54)$$

где $\varphi_s^{(\lambda)}$ — радиальная часть волновой функции канала λ , соответствующая функции $|s\rangle$ [см. разложение (46)].

Если предположить, что гамильтониан системы H инвариантен относительно обращения времени, то можно доказать, что в базисе Вигнера путем подходящего выбора фаз функций $|s\rangle$ и $|\lambda\rangle$ приведенные амплитуды $g_s^{(\lambda)}$ всегда можно сделать вещественными. Тогда амплитуды $G_s^{(\lambda)}$ также будут вещественными величинами, положительными или отрицательными.

Затем мы должны рассмотреть оператор

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_w + [\mathcal{L} - \mathcal{L}(b)], \quad (55)$$

где последнее слагаемое не является диагональным. Используя (35), получаем

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}(b) = \sum_\lambda |\lambda\rangle \frac{\hbar^2}{2M_\lambda R_\lambda} \delta(r_\lambda - R_\lambda) (b_\lambda - L_\lambda) \langle \lambda|, \quad (56)$$

где суммирование производится по всем каналам. Используя определение (45) приведенных амплитуд $g_s^{(\lambda)}$, получаем

$$\langle s | \mathcal{L} - \mathcal{L}(b) | t \rangle = \sum_\lambda g_s^{(\lambda)} (b_\lambda - L_\lambda) g_t^{(\lambda)} = \\ = \sum_\lambda g_s^{(\lambda)} (b_\lambda - \text{Re } L_\lambda) g_t^{(\lambda)} - \frac{i}{2} \sum_\lambda^0 G_s^{(\lambda)} G_t^{(\lambda)}, \quad (57)$$

где вещественная часть L_λ равна величине L_λ^f для закрытых каналов и величине Δ_λ , определяемой соотношением (26), для открытых каналов. В соотношении (57) суммирование во втором слагаемом производится только по открытым каналам. Удобно ввести матрицы E , ΔE и Γ , определяемые соотношениями

$$\langle s | E | t \rangle = \varepsilon_s \delta_{st}, \\ \langle s | \Delta E | t \rangle = \sum_\lambda g_s^{(\lambda)} (b_\lambda - \text{Re } L_\lambda) g_t^{(\lambda)}, \quad (58) \\ \langle s | \Gamma | t \rangle = \sum_\lambda^0 G_s^{(\lambda)} G_t^{(\lambda)}.$$

Тогда имеем

$$\mathcal{H}_W = E, \quad \mathcal{L} - \mathcal{L}(b) = \Delta E - \frac{1}{2} i\Gamma. \quad (59)$$

Подставляя полученные соотношения в (50), получаем установленное Томасом [4] выражение для матрицы S в теории Вигнера:

$$S = e^{i\xi} \left[1 - i \sum_{s, t} \langle s | \frac{1}{\varepsilon - E - \Delta E + \frac{1}{2} i\Gamma} | t \rangle \mathbf{G}_s \times \mathbf{G}_t \right] e^{i\xi}. \quad (60)$$

Полностью пренебрегая в (60) недиагональными членами в ΔE и Γ , получаем формулу Брейта — Вигнера для многих уровней:

$$S = e^{i\xi} \left[1 - i \sum_s \frac{\mathbf{G}_s \times \mathbf{G}_s}{\varepsilon - \varepsilon_s - \Delta \varepsilon_s + \frac{1}{2} i\Gamma_s} \right] e^{i\xi}, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_s &= \sum_{\lambda} [g_s^{(\lambda)}]^2 (b_{\lambda} - \text{Re } L_{\lambda}), \\ \Gamma_s &= \sum_{\lambda} [G_s^{(\lambda)}]^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Можно оценить вклад недиагональных членов в ΔE и Γ с помощью разложения матрицы S по степеням этих членов.

В теории Вигнера соотношение (60) получается в несколько этапов. Сначала рассчитывается производная матрица, что равносильно отысканию оператора, обратного $\varepsilon - \mathcal{H}_W$. От производной матрицы переходят к приведенной производной матрице, получающейся путем исключения закрытых каналов. Эта новая матрица связана с оператором, обратным оператору

$$\varepsilon - \mathcal{H}_W - \sum_{\lambda}^f |\lambda\rangle \frac{\hbar^2}{2M_{\lambda} R_{\lambda}} \delta(r_{\lambda} - R_{\lambda}) (b_{\lambda} - L_{\lambda}) \langle \lambda|,$$

где суммирование производится только по закрытым каналам. Иначе говоря, в оператор включается вклад величины $\mathcal{L} - \mathcal{L}(b)$, проистекающий от закрытых каналов. Наконец, от приведенной производной матрицы переходят к матрице S , что равносильно, в конечном счете, отысканию оператора, обратного полному оператору $\varepsilon - \mathcal{H}$.

2. Базис Капура и Пайерлса; диагонализация оператора \mathcal{H} .

Базис Капура — Пайерлса строится из решений задачи на собственные значения

$$\mathcal{H} |s\rangle = E_s |s\rangle, \tag{63}$$

причем предполагается, что эти решения образуют *полную систему*. Уравнение (63) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} H |s\rangle &= E_s |s\rangle, \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_\lambda} - \frac{L_\lambda}{r_\lambda} \right) r_\lambda \varphi_s^{(\lambda)}(r_\lambda) \right]_{R_\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Так как оператор \mathcal{H} зависит от энергии через величины L_λ , то вся система собственных функций и собственных значений оказывается также зависящей от энергии и претерпевает изменения при изменении энергии. Эти граничные условия равносильны требованию, чтобы базисные функции для закрытых каналов сшивались с функциями $\psi_\lambda(r_\lambda)$, а для открытых каналов состояли *только из выходящих волн*.

Покажем прежде всего, что *все собственные значения E_s являются комплексными*, если существует, по крайней мере, хотя бы один открытый канал, и что все E_s расположены на комплексной плоскости *ниже вещественной оси*. В самом деле, из (63) и из комплексно-сопряженного уравнения

$$\langle s | \mathcal{H}^+ = \langle s | E_s^*$$

получаем

$$\begin{aligned} (E_s - E_s^*) \langle s | s \rangle &= \langle s | \mathcal{H} - \mathcal{H}^+ | s \rangle = \langle s | \mathcal{L} - \mathcal{L}^+ | s \rangle = \\ &= \sum_\lambda^0 \frac{\hbar^2 R_\lambda}{2M_\lambda} (L_\lambda^{(-)} - L_\lambda^{(+)}) |\langle \lambda | s \rangle|^2 = -i \sum_\lambda^0 |G_s^{(\lambda)}|^2. \end{aligned}$$

Положив

$$E_s = \varepsilon_s - \frac{1}{2} i \Gamma_s, \tag{65}$$

находим

$$\Gamma_s = \sum_\lambda^0 \frac{|G_s^{(\lambda)}|^2}{\langle s | s \rangle}. \tag{66}$$

Оператор \mathcal{K} не является эрмитовым, так как в слагаемом \mathcal{L} фигурируют комплексные числа $L_\lambda^{(+)}$. Однако он обладает следующим свойством:

$$\mathcal{K}^+ = K \mathcal{K} K^{-1}, \quad (67)$$

где K — оператор обращения времени [10]. В самом деле, предполагая, что оператор \mathcal{H} инвариантен относительно направления времени, получаем

$$K \mathcal{H} K^{-1} = \mathcal{H} = \mathcal{H}^+,$$

учитывая, что \mathcal{H} — эрмитов оператор. С другой стороны, поверхностный оператор \mathcal{K} — \mathcal{H} удовлетворяет соотношению типа (67). Действительно, оба оператора $(\mathcal{K} - \mathcal{H})^+$ и $K(\mathcal{K} - \mathcal{H})K^{-1}$ получаются из оператора $\mathcal{K} - \mathcal{H}$ путем замены величин L_λ^+ на $L_\lambda^{(-)}$. Таким образом, соотношение (67) доказано.

Применяя оператор K к (63) и принимая во внимание (67), получаем соотношение

$$\mathcal{K}^+ K |s\rangle = E_s^* K |s\rangle, \quad (68)$$

которое показывает, что $K |s\rangle$ является собственной функцией оператора \mathcal{K}^+ , принадлежащей собственному значению E_s^* . Собственные функции оператора \mathcal{K}^+ для открытых каналов обладают *только входящими* волнами.

Покажем, что если $E_s \neq E_t$, функции $K |s\rangle$ и $|t\rangle$ ортогональны друг другу. В самом деле, напишем для $|t\rangle$ уравнение, комплексно-сопряженное (63):

$$\langle t | \mathcal{K}^+ = E_t^* \langle t |.$$

Умножая это уравнение справа на $K |s\rangle$, а уравнение (63) слева на $\langle t |$ и вычитая второе из первого, получаем

$$(E_t^* - E_s^*) \langle t | (K |s\rangle) = 0,$$

откуда следует наше утверждение.

Собственные значения E_s чаще всего оказываются вырожденными благодаря наличию момента количества движения, отличного от нуля. Для простоты мы будем считать, что отсутствует всякое другое вырождение. Чтобы учесть момент

количества движения, мы для обозначения функций введем символ $|sjm\rangle$ и добавим к ним функции

$$\overline{|sj-m\rangle} = (-)^{m-j} K |sjm\rangle. \quad (69)$$

Так как оператор K меняет направление моментов количества движения, то функции (69) соответствует компонента момента количества движения, равная $-m$. Далее видно, что функция $\overline{|sjm\rangle}$ ортогональна всем функциям $|s'j'm'\rangle$, отличным от $|sjm\rangle$, либо потому, что $E_s \neq E_{s'}$, либо вследствие того, что $m \neq m'$. Если мы предположим, что система базисных функций является полной, то $\overline{|sjm\rangle}$ не может быть ортогональной всем функциям. Следовательно, эта функция не может быть ортогональной функции $|sjm\rangle$. Тогда, умножая функцию $|sjm\rangle$ на подходящую константу, условие нормировки можно записать в виде

$$\langle \overline{|sjm\rangle} | s'j'm'\rangle = \delta_{ss'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (70)$$

Функции $|sjm\rangle$ и $\overline{|sjm\rangle}$ образуют так называемый *биортогональную систему*.

В сокращенных обозначениях соотношение (70) имеет вид

$$\langle \tilde{s} | s'\rangle = \delta_{ss'}.$$

Отметим, что для всей ортонормированной системы имеет место соотношение

$$\sum_s |s\rangle \langle \tilde{s}| = 1.$$

Оператор \mathcal{H} можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \sum_s |s\rangle E_s \langle \tilde{s}|,$$

а оператор, обратный $\varepsilon - \mathcal{H}$, принимает форму

$$\frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} = \sum_s |s\rangle \frac{1}{\varepsilon - E_s} \langle \tilde{s}|. \quad (71)$$

При подстановке этого выражения в (50) возникают величины

$$\langle \lambda | s\rangle \quad \text{и} \quad \langle \tilde{s} | \lambda\rangle.$$

Эти величины благодаря определению (69) функций $|\tilde{s}\rangle$ оказываются равными друг другу, если фазы величин $|\lambda\rangle$ выбираются в соответствии с обычным условием, которое принимается в теории при рассмотрении обращения времени

$$K|\lambda jm\rangle = (-1)^{m-j}|\lambda j - m\rangle.$$

В самом деле, из свойств оператора K (антилинейность и унитарность) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{sjm} | \lambda jm \rangle &= (\lambda jm | \widetilde{sjm})^* = (-1)^{-m-j} (\lambda jm | (K | sj - m \rangle))^* = \\ &= (-1)^{-m-j} ((\lambda jm | K) | sj - m) = \\ &= (\lambda j - m | sj - m) = (\lambda jm | sjm), \end{aligned}$$

поскольку полученное скалярное произведение не зависит от m .

Тогда, определяя амплитуды \mathbf{G}_s соотношениями (45) и (49) и подставляя (71) в (50), получаем формулу Капура — Пайерлса:

$$S = e^{i\epsilon} \left[1 - i \sum_s \frac{\mathbf{G}_s \times \mathbf{G}_s}{\epsilon - \epsilon_s + \frac{1}{2} i\Gamma_s} \right] e^{i\epsilon}; \quad (72)$$

при выводе формуль (72) мы воспользовались соотношением (65). Формула (72), напоминающая формулу Брейта — Вигнера для многих уровней (61), является точной. Величины $G_s^{(\lambda)}$ в формуле (72) являются комплексными числами, которые, как и величины ϵ_s и Γ_s , зависят от энергии более сложным образом, чем соответствующие величины в теории Вигнера.

Отметим, наконец, что в случае частиц с нулевым спином определение (69) функций, образующих вместе с функциями $|sjm\rangle$ биортогональную систему, принимает вид

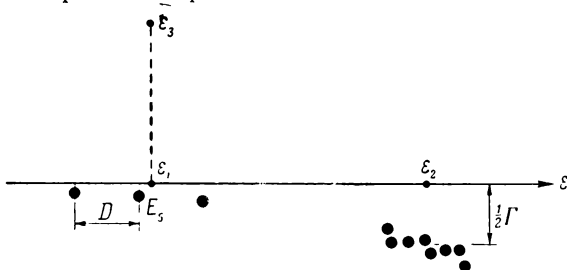
$$\tilde{\phi}_s = \phi_s^* \quad (69')$$

и что условие нормировки (70) записывается в виде

$$\int \phi_s \phi_{s'} d\tau = \delta_{ss'}. \quad (70')$$

§ 6. Оптическая модель и прямые взаимодействия

Методы, основанные на диагонализации оператора \mathcal{K} (или же оператора \mathcal{K}_W), являются плодотворными лишь в тех случаях, когда можно ограничиться рассмотрением одного или нескольких уровней составного ядра, фигурирующего в этих теориях. Именно такой является ситуация при низких энергиях, когда среднее расстояние между уровнями D много больше их средней ширины Γ .



Фиг. 1. Полюса оператора $(\epsilon - K)^{-1}$ на комплексной плоскости энергии.

Рассмотрим на комплексной плоскости энергии спектр E_s оператора \mathcal{K} , рассчитанный при энергии ϵ . Если значение энергии ϵ_1 оказывается близким к некоторому собственному значению (см. фиг. 1), то это собственное значение будет давать основной вклад в разложениях Вигнера и Капура — Пайерлса для матрицы S . Следовательно, в этом случае проявляется в сущности только один четкий уровень составного ядра, и сечение принимает резко выраженный резонансный вид.

При больших энергиях ширина Γ может стать больше величины D . На комплексной плоскости собственных значений оператора \mathcal{K} такая ситуация осуществляется в точке ϵ_2 , расположенной от начала отсчета на том же расстоянии по порядку величины, на каком расположено большое число уровней E_s . В этом случае сечение не обнаруживает больше резонансов — мы находимся в нерезонансной области.

Наконец, при низких энергиях мы можем интересоваться только средним сечением. Оно может быть представлено в виде суммы „мгновенного“ сечения и „запаздывающего“

сечения [11, 12]. Мгновенное сечение рассчитывается с помощью средних по энергии значений элементов матрицы столкновений. Можно показать также [13], что это среднее значение может быть рассчитано путем прибавления к энергии чисто мнимого числа, в результате чего энергия отходит от полюсов на расстояние, большее D . Таким образом, среднее значение S в окрестности точки ε_1 (см. фиг. 1) равно значению матрицы S , рассчитанному в точке типа ε_3 .

Итак, мы видим, что при расчете мгновенных сечений, так же как и при расчете сечения в нерезонансной области, задача состоит в *вычислении матрицы столкновений в точке, расположенной от ряда собственных значений оператора \mathcal{K} на расстоянии, большем D .*

Разложения Вигнера и Капура — Пайерлса не могут в этом случае служить в качестве удовлетворительного исходного пункта, ибо мы должны производить суммирование большого числа слагаемых, т. е. должны учитывать большое число резонансов составного ядра. Эти суммирования можно выполнить путем введения статистических предположений, относящихся к приведенным ширинам $g_s^{(\lambda)}$; однако представляется разумным отказаться от использования весьма специальных разложений Вигнера и Капура — Пайерлса и обратиться к рассмотрению приближенного метода расчета оператора $(\varepsilon - \mathcal{K})^{-1}$, приспособленного специально к рассматриваемому случаю. Успех модели независимых частиц указывает следующий путь.

Ограничимся упругим и неупругим рассеянием частиц. Запишем гамильтониан в форме

$$H = H_0 + \mathcal{V}, \quad (73)$$

где H_0 — гамильтониан ядра-мишени и падающей частицы, на которую во внутренней области действует средний (вещественный) потенциал, порождаемый ядром, а \mathcal{V} представляет собой разность между истинным взаимодействием падающей частицы с ядром и средним взаимодействием, включенным в H_0 . Аналогично запишем

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{V}, \quad (74)$$

где

$$\mathcal{K}_0 = H + \mathcal{L} \quad (75)$$

является оператором, который фигурирует в расчете матрицы столкновений, соответствующей рассеянию падающей частицы

на потенциальной яме, описывающей ядро-мишень. При энергии, удаленной от полюсов оператора $(\epsilon - \mathcal{H}_0)^{-1}$, можно считать, что разложение по степеням \mathcal{V}

$$\frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}} = \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} + \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} \mathcal{V} \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} + \\ + \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} \mathcal{V} \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} \mathcal{V} \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} + \dots \quad (76)$$

хорошо сходится и может служить исходным пунктом для приближенного расчета оператора $(\epsilon - \mathcal{H})^{-1}$.

Для оператора \mathcal{H}_0 мы выберем базис Капура — Пайерлса $|a\rangle, |b\rangle \dots$. Составляющие этот базис функции являются просто произведениями волновой функции ядра-мишени в определенном состоянии и волновой функции падающей частицы, движущейся в потенциальной яме¹⁾. Эти функции, естественно, подчиняются граничным условиям Капура — Пайерлса. Поскольку здесь мы рассматриваем только каналы упругого и неупругого рассеяния, то каждый канал будет связан с отдельным уровнем ядра-мишени, и индексы λ могут служить для того, чтобы перенумеровать уровни этого ядра-мишени. Если мы обозначим через χ индекс, относящийся к волновым функциям Капура — Пайерлса падающей частицы, движущейся в потенциальной яме, то мы сможем заменить индекс a совокупностью индексов

$$a = (\lambda, \chi). \quad (77)$$

Таким образом, амплитуды $G_a^{(\lambda)}$ запишутся в виде $G_{\mu, \chi}^{(\lambda)}$, и мы, очевидно, будем иметь

$$G_{\mu, \chi}^{(\lambda)} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \mu. \quad (78)$$

С помощью базиса Капура — Пайерлса мы можем написать

$$\frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} = \sum_a |a\rangle \frac{1}{\epsilon - E_a} \langle \tilde{a}|, \quad (79)$$

1) Ситуация оказывается несколько более сложной, если мы будем производить антисимметризацию волновой функции по падающему нуклону и нуклонам ядра-мишени.

где E_a, E_b, \dots — собственные значения оператора \mathcal{H}_0 . Подставляя (79) в разложение (76), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} = \sum_a |a\rangle \frac{1}{\varepsilon - E_a} \langle \tilde{a}| + \sum_{a,b} |a\rangle \frac{\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | b \rangle}{(\varepsilon - E_a)(\varepsilon - E_b)} \langle \tilde{b}| + \dots \quad (80)$$

Теперь нам необходимо предпринять систематическое исследование главных членов этого разложения и перегруппировать их в соответствии с идеями Бракнера. Пока мы ограничимся введением чрезвычайно простой статистической гипотезы, касающейся элементов матрицы \mathcal{V} . Ее нужно рассматривать исключительно лишь как рабочую гипотезу, справедливость которой может быть установлена путем детального анализа. Однако мы увидим, что эта гипотеза очень быстро приводит нас к оптической модели и понятию прямого взаимодействия.

В дальнейшем мы будем предполагать, что величины $\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | b \rangle$ меняются случайным образом при переходе от уровня a или b к какому-нибудь соседнему уровню и что по этой причине недиагональные элементы в разложении (80) могут в первом, очень грубом, приближении рассматриваться как независимые случайные величины, которые принимают некоторое заданное значение с той же самой вероятностью, что и другое значение, отличающееся от первого только знаком. Диагональные же элементы $\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | a \rangle$ равны нулю, поскольку \mathcal{V} представляет собой разность между истинным и средним взаимодействием.

Эта гипотеза позволяет [14] определенным образом классифицировать члены разложения типа (80). Рассмотрим сначала *диагональные* элементы оператора $(\varepsilon - \mathcal{H})^{-1}$. Можно показать, что главными членами порядка $2p$ по \mathcal{V} являются те члены, в которых фигурирует ряд промежуточных уровней, таких, как

$$a, n_1, a, n_2, a, n_3, \dots, n_p, a.$$

Сумма этих членов записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{a} \left| \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} \right| a \rangle &\approx \frac{1}{\varepsilon - E_a} + \frac{W_a}{(\varepsilon - E_a)^2} + \\ &+ \frac{W_a^2}{(\varepsilon - E_a)^3} + \dots = \frac{1}{\varepsilon - E_a - W_a}, \quad (81) \end{aligned}$$

где мы положили

$$W_a = \sum_n \frac{\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | n \rangle^2}{\epsilon - E_n} = \langle \tilde{a} | \mathcal{V} \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0} \mathcal{V} | a \rangle, \quad (82)$$

воспользовавшись соотношением

$$\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | n \rangle = \langle \tilde{n} | \mathcal{V} | a \rangle,$$

вытекающим из инвариантности оператора \mathcal{V} относительно обращения времени. Если мы положим

$$W_a = \Delta_a - iV_a, \quad (83)$$

то в первом приближении получим

$$V_a \approx \frac{\pi}{D_\epsilon} \operatorname{Re} [\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | n \rangle^2]_\epsilon, \quad (84)$$

где D_ϵ означает среднее расстояние между уровнями при энергии ϵ , а квадратная скобка представляет собой среднее значение квадрата матричного элемента $\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | n \rangle$, относящегося к энергии E_n , близкой к ϵ .

Подставляя (81) в общее выражение (50) для матрицы столкновений, получаем

$$S^{(0)} = e^{i\zeta} \left[1 - i \sum_a \frac{\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a}{\epsilon - E_a - W_a} \right] e^{i\zeta}. \quad (85)$$

Условия (77) и (78), которым удовлетворяют величины $G_a^{(\lambda)}$, показывают, что определяемая соотношением (85) матрица $S^{(0)}$ является диагональной и, следовательно, соответствует исключительно *упругому рассеянию*. Если в (85) положить $W_a = 0$, то получим формулу Капура — Пайерлса для матрицы столкновений, описывающей рассеяние падающей частицы в среднем потенциале, создаваемом ядром-мишенью. Формула (85) показывает, что в присутствии взаимодействия \mathcal{V} , ответственного за смешивание конфигураций модели независимых частиц, падающая частица подвергается во внутренней области действию *дополнительного комплексного потенциала* W_a . Таким образом, мы пришли к *оптической модели*, описывающей процесс упругого рассеяния.

В случае упругого рассеяния нас интересует лишь одно значение λ , соответствующее основному состоянию ядра-мишени. Следовательно, суммирование по a в (85) производится

лишь по различным состояниям χ падающей частицы, движущейся в среднем потенциале. Каждое состояние χ соответствует „гигантскому“ резонансу, ширина которого дается соотношением

$$-\operatorname{Im}(E_a + W_a) = \frac{1}{2} \Gamma_a + V_a. \quad (86)$$

Рассмотрим теперь один *недиагональный* элемент оператора $(\epsilon - \mathcal{H})^{-1}$. Рассуждая так же, как и раньше, можно показать, что главными членами в разложении (80) являются члены, в которых фигурируют промежуточные состояния

$$a, n_1, a, n_2, \dots, a, n_p, a, b, n_{p+1}, b, \dots, b, n_{p+q}, b.$$

В обозначениях (82) сумма таких членов записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a} | \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}} | b \rangle &\approx \frac{\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | b \rangle}{(\epsilon - E_a)(\epsilon - E_b)} \sum_{p, q=0}^{\infty} \left(\frac{W_a}{\epsilon - E_a} \right)^p \left(\frac{W_b}{\epsilon - E_b} \right)^q = \\ &= \frac{\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | b \rangle}{(\epsilon - E_a - W_a)(\epsilon - E_b - W_b)}. \end{aligned} \quad (87)$$

Это приводит к дополнительному члену в матрице столкновений

$$S^{(1)} = e^{i\kappa} \left[-i \sum_{a, b} \frac{\langle \tilde{a} | \mathcal{V} | b \rangle}{(\epsilon - E_a - W_a)(\epsilon - E_a - W_b)} \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_b \right] e^{i\kappa}, \quad (88)$$

который необходимо добавить к $S^{(0)}$.

Теперь мы покажем, что $S^{(1)}$ есть не что иное, как *прямое взаимодействие*, пропорциональное элементу матрицы \mathcal{V} , определенному для двух волновых функций оптической модели, описывающих начальное и конечное состояния системы.

Начнем с того, что во внутренней области определим волновую функцию $|\Phi_\alpha\rangle$ оптической модели, для которой амплитуды входящих волн равны нулю во всех каналах, кроме канала α :

$$\begin{aligned} (\alpha | -) &= 1, \\ (\lambda | -) &= 0 \quad \text{при } \lambda \neq \alpha. \end{aligned} \quad (89)$$

Выражения (40) и (48), записанные с помощью базиса $|a\rangle, |b\rangle, \dots$, если в них подставить выражение (81) для оператора $(\varepsilon - \mathcal{H}^0)^{-1}$, соответствующее оптической модели, приводятся к виду:

$$\begin{aligned} |\Phi_\alpha\rangle &= i\hbar^{1/2} \sum_{a,b} |a\rangle \langle \tilde{a} | \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} |b\rangle G_b^\alpha e^{i\varepsilon a} = \\ &= i\hbar^{1/2} \sum_a |a\rangle \frac{1}{\varepsilon - E_a - W_a} G_a^\alpha e^{i\varepsilon a}. \end{aligned} \quad (90)$$

По аналогии с (69) положим

$$|\overline{\Phi_\alpha}, j, -m\rangle = (-1)^{m-j} K |\Phi_\alpha, j, m\rangle, \quad (91)$$

где мы момент количества движения состояния $|\Phi_\alpha\rangle$ (т. е. момент количества движения для канала α) записали в явном виде.

Функции $|\overline{\Phi_\alpha}\rangle$, получающиеся из $|\Phi_\alpha\rangle$ путем изменения знака времени, имеют амплитуды выходящих волн, равные нулю всюду, кроме канала α , и эти функции соответствуют оптическому потенциалу с измененным знаком.

Из (90) и (91) получаем

$$\langle \overline{\Phi_\alpha} | = i\hbar^{1/2} \sum_a \langle \tilde{a} | \frac{1}{\varepsilon - E_a - W_a} G_a^{(\alpha)} e^{i\varepsilon a}. \quad (92)$$

Действительно, переход от $|\Phi_\alpha\rangle$ к $|\overline{\Phi_\alpha}\rangle$ и от $|\overline{\Phi_\alpha}\rangle$ к $\langle \overline{\Phi_\alpha} |$ приводит к двукратной замене всех чисел их комплексно-сопряженными. Соотношения (88), (90) и (92) позволяют, в конце концов, записать $S^{(1)}$ в форме

$$\langle \lambda | S^{(1)} | \mu \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \overline{\Phi_\lambda} | \mathcal{V}^0 | \Phi_\mu \rangle, \quad (93)$$

т. е. получить требуемое соотношение.

Вид матрицы столкновений (88) для прямого взаимодействия показывает, что мы можем наблюдать „гигантские“ резонансы либо при энергии

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \Delta_a, \quad (94)$$

либо при энергии

$$\varepsilon = \varepsilon_b + \Delta_b, \quad (94')$$

где ε и Δ определяются соотношениями (65) и (83). В первом случае мы имеем *резонанс падающей частицы*

в комплексном потенциале, создаваемом ядром-мишенью. Наоборот, во втором случае мы имеем *резонанс испускаемой частицы* в комплексном потенциале, создаваемом остаточным ядром. В той степени, в какой мы можем считать потенциал, создаваемый остаточным ядром, не зависящим от состояния возбуждения этого остаточного ядра, резонансы испускаемой частицы возникают при определенных энергиях *испускаемой частицы*, и мы будем наблюдать интенсивные группы неупруго рассеянных частиц, энергия которых практически не будет зависеть от энергии падающей частицы и будет медленно меняться с изменением атомного номера [15, 16].

Автор считает своим долгом поблагодарить С. Де Доминиса за многочисленные и полезные обсуждения и советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение в одномерном случае

Если ввести обозначения

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r}, \quad f(r) = \frac{\varphi(r)}{r}, \quad A = \frac{a}{R}, \quad (\text{П. 1})$$

то система (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 u}{dr^2} + (\varepsilon + V)u &= \varphi \quad (r < R), \\ -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{du}{dr} - iku \right)_R &= a, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П. 2})$$

Обозначим через $u_1(r)$ и $u_2(r)$ решения дифференциального уравнения без правой части, которые подчиняются следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0, \quad \left(\frac{du_1}{dr} \right)_0 = 1, \\ u_2(R) &= 1, \quad \left(\frac{du_2}{dr} \right)_R = ik. \end{aligned} \quad (\text{П. 3})$$

Известно, что если $V(r)$ удовлетворяет определенным (весьма широкого класса) условиям регулярности, решения

уравнения существуют. Пусть W — вронскиан (не зависящий от r):

$$W = u_1 \frac{du_2}{dr} - u_2 \frac{du_1}{dr}. \quad (\text{П. 4})$$

В частности, при $r = R$ имеем

$$W = \left[\left(ik - \frac{d}{dr} \right) u_1 \right]_R. \quad (\text{П. 5})$$

Для вещественных ϵ вронскиан W всегда отличен от нуля; иначе говоря, u_1 и u_2 линейно независимы. Действительно, для вещественных ϵ функция $u_1(r)$ является, очевидно, вещественной при любых значениях r . Ее логарифмическая производная при $r = R$ не может быть равной ik . Это свидетельствует о том, что однородная система, т. е. уравнение (11), не имеет решений, отличных от тривиального (тождественного нуля).

Запишем теперь решение системы с правой частью в виде

$$u(r) = c_1(r) u_1(r) + c_2(r) u_2(r). \quad (\text{П. 6})$$

Согласно классическому методу вариации постоянных, величины c_1 и c_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} c_1' u_1 + c_2' u_2 &= 0, \\ \frac{\hbar^2}{2M} (c_1' u_1' + c_2' u_2') &= \varphi \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} c_2(0) &= 0, \\ -c_1(R) \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{du_1}{dr} - ik u_1 \right)_R &= a. \end{aligned} \quad (\text{П. 8})$$

Отсюда, используя (П. 4) и (П. 5), получаем

$$\begin{aligned} c_1(r) &= \frac{2M}{\hbar^2 W} \left[a u_2(R) + \int_r^R u_2(r') \varphi(r') dr' \right] = \\ &= \frac{2M}{\hbar^2 W} \int_r^R u_2(r') [\varphi(r') + a \delta(r' - R)] dr', \\ c_2(r) &= \frac{2M}{\hbar^2 W} \int_0^r u_1(r') \varphi(r') dr'. \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

И, наконец,

$$\psi(r) = \int_0^R r'^2 dr' G(r, r') F(r'), \quad (\text{П. 10})$$

где

$$G(r, r') = \frac{2M}{\hbar W} \frac{u_1(r_{<}) u_2(r_{>})}{rr'}. \quad (\text{П. 11})$$

В этом выражении $r_{<}$ и $r_{>}$ означают соответственно наименьшую и наибольшую из величин r и r' . Отметим, что формула (П. 10) справедлива в интервале $(0, R)$, включая точку R . Но, поскольку первые производные от функции $G(r, r')$ разрывны при $r = r'$, мы не можем формулу (П. 10) дифференцировать по r без определенных предосторожностей. Впрочем, во всех приведенных здесь выкладках нам не пришлось ни разу дифференцировать формул типа (П. 10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wigner E. P., Phys. Rev., 70, 606 (1946); 73, 1002 (1948).
2. Wigner E. P., Eisenbud L., Phys. Rev., 72, 29 (1947).
3. Teichman T., Wigner E. P., Phys. Rev., 87, 123 (1952).
4. Thomas R. G., Phys. Rev., 97, 224 (1955).
5. Карун P. L., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., A166, 277 (1938).
6. Lane A. M., Thomas R. G., Wigner E. P., Phys. Rev., 98, 693 (1955).
7. Lane A. M., Сообщение на конференции в Сиэтле (сентябрь, 1956).
8. Lippman B. A., Schwinger J., Phys. Rev., 79, 469 (1950).
9. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics. New York, 1952 (см. перевод: Д. Ж. Блатт и В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).
10. Wigner E. P., Zs. f. Phys., 32, 546 (1932).
11. Feshbach H., Porter C., Weisskopf V., Phys. Rev., 96, 448 (1954).
12. Friedman F. L., Weisskopf V. F., в сборнике: "Niels Bohr and the Development of Physics" London, 1955 (см. перевод: "Нильс Бор и развитие физики", ИЛ, 1958).
13. Wigner E. P., Ann. Math., 53, 36 (1951); 55, 7 (1952).
14. Bloch C., Nucl. Phys., 3, 137 (1957).
15. Cohen B. L., Phys. Rev., 103, 1549 (1958).
16. Gugelot P. C., Physica, 22, 1019 (1956).

III. ОБОСНОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА И ПРЯМЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Дж. Браун

G. E. Brown, Rev. Mod. Phys., **31**, 893—919 (1959)

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье излагается теория рассеяния частиц (с энергиями в интервале от нескольких *кэв* до нескольких *Мэв*) сложными ядрами. Исходя из точных формул для амплитуды рассеяния, соответствующих многим уровням, показано, что некоторые явления, недопустимые с точки зрения старой теории составного ядра, следуют в нашем случае из фазовых соотношений между уровнями ядра, в то время как слагаемые, в которых фазовые соотношения, по видимому, не играют роли, соответствуют рассеянию, предсказываемому старой теорией составного ядра, дополненной статистическими предположениями.

Настоящую статью можно рассматривать как изложение теории ядерных реакций в такой области энергий, где в процессе рассеяния участвует большое число ядерных уровней. Таким образом, настоящая работа является дополнением к обстоятельной работе Лейна и Томаса [1], в которой представлена теория, особенно удобная для исследования реакций при энергиях, когда принимает участие небольшое число уровней. Лейн и Томас используют *R*-матричную теорию Вигнера и Айзенбуда [2], которая наилучшим образом описывает случай малых энергий, поскольку во всех соотношениях этой теории зависимость от энергии записана в наиболее явном виде. Мы же используем формализм Капура и Пайерлса [3], важное преимущество которого в случае многих уровней заключается в том, что в амплитуду рассеяния сумма по уровням входит линейно. Используемый формализм является лишь промежуточным этапом в процессе получения конечных результатов, и, следовательно, мы должны выбрать такой формализм, который представляется наиболее простым для рассматриваемого здесь случая.

Рассмотрим сначала старую теорию составного ядра и отметим те места теории, в которых она должна быть пересмотрена. То, что эта теория является неполной, было известно уже давно. Действительно, уже Н. Бор [4,5] в 1938 г. высказал мысль, что частица, попав в ядро, может перейти прямо в конечное состояние, не образовав составного ядра. Однако большинство расчетов проводилось для одного и того же предельного случая, и многие физические явления описывались подобным же образом. Упомянутым предельным случаем является случай, при котором предполагается, что фазы вкладов от разных уровней составного ядра являются случайными и что, следовательно, они не интерферируют между собой. Такие предположения обычно неявно делаются в статистических расчетах.

Теория составного ядра, сформулированная Н. Бором [6,7], объяснила очень узкие резонансы, наблюдаемые при упругом рассеянии медленных нейтронов, в предположении, что падающий нейтрон сразу же после попадания внутрь ядра благодаря сильному взаимодействию с нуклонами отдает часть своей энергии нуклонам ядра; получившееся в результате этого составное ядро имеет довольно большое время жизни, пока один из нуклонов не получит энергию, достаточную для того, чтобы покинуть ядро. Из принципа неопределенности следует, что благодаря большому времени жизни этого состояния энергия состояния может быть хорошо определена и что, следовательно, ширина соответствующего этому состоянию уровня мала. Оказалось, что наблюдаемые резонансы имеют ширину порядка нескольких электронвольт, т. е. почти в миллион раз меньшую, чем ширины одночастичных уровней, образуемых при рассеянии частиц потенциальной ямой, относительно которой предполагалось, что именно она описывает ядро.

Поскольку время жизни наблюдаемых резонансов составного ядра было столь велико, то обычно предполагалось, что их характеристики не зависят от способа образования этих состояний, за исключением ограничений, накладываемых законами сохранения, и не зависят также от характеристик соседних состояний. Таким образом, представлялось вполне естественным ввести статистические предположения, при которых пренебрегается интерференцией между рассеянием на различных уровнях. В этом случае для частицы, падаю-

шей в канале α и испускаемой в канале β (позднее мы дадим точное определение всех терминов), в окрестности составного состояния можно было написать выражение для сечения $\sigma_{\alpha\beta,j}$, полагая, что остаточное ядро находится в возбужденном состоянии j :

$$\sigma_{\alpha\beta,j} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) \frac{\gamma_{p\alpha}\gamma_{p\beta j}}{(\epsilon_p - E)^2 + \frac{\alpha_p^2}{4}}.$$

Здесь индекс p относится к состоянию составного ядра $\gamma_{p\alpha}$ — парциальная ширина образования составного ядра частицей, падающей в канале α^1), $\gamma_{p\beta j}$ — парциальная ширина, соответствующая распаду составного ядра, α_p — полная ширина уровня, ϵ_p — вещественная часть энергии составного ядра. Формула такого типа, справедливая в области изолированного уровня, была получена Брейтом и Вигнером [8] и носит их имя. Приведенное выше выражение для σ указывает на то, что процессы образования и распада состояния не зависят друг от друга и от свойств соседних состояний.

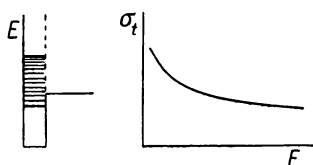
Ясно, что число состояний составного ядра на единичный интервал энергий быстро возрастает с энергией падающей частицы. Уже при энергиях в киловольтной области плотность уровней, наблюдаемых при рассеянии медленных нейтронов на средних и тяжелых ядрах, оказывается порядка 10^4 — 10^6 уровней на 1 Мэв. Таким образом, при рассеянии нейтронных пучков, в котором вследствие экспериментальных трудностей, связанных с получением моноэнергетических нейтронов произвольной энергии, имеется разброс по энергии порядка нескольких Мэв, мы можем ожидать, что с ростом энергии нейтрона сечение будет приближаться к сечению, отвечающему рассеянию полностью поглощающей системой. Такого рода модель, характеризующаяся указанными чертами, была сформулирована Фешбахом, Пизли и Вайскопфом [9] и известна под названием „нерезонансной модели“ (continuum model). В этой модели волновая функция падающего нейтрона подчиняется тому условию,

¹⁾ Обычно ширины обозначаются большими буквами Γ , например $\Gamma_{p\alpha}$. Однако мы этими буквами будем обозначать ширины одночастичных уровней в потенциальной яме.

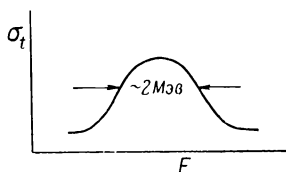
что на поверхности ядра она имеет только часть, соответствующую входящей волне:

$$\frac{d}{dr} [r\psi(r)] \Big|_{r=R} = -iKR\psi(R),$$

где $\psi(r)$ — волновая функция падающего нейтрона, R — радиус ядра, K — „внутреннее“ волновое число, которым, как предполагается, нейтрон обладает внутри ядра; волновое число K возникает в результате взаимодействия падающего нуклона с остальными нуклонами. Результаты этой теории, относящиеся к полному сечению, представлены на фиг. 1,



Фиг. 1. Возрастающая с увеличением энергии возбуждения E плотность ядерных уровней (слева) и теоретическая кривая зависимости полного сечения σ_t от энергии возбуждения, вычисленная в нерезонансной теории (справа).



Фиг. 2. Схематический график гигантского резонанса в полном сечении типа, наблюдаемого при рассеянии нейтронов сложными ядрами.

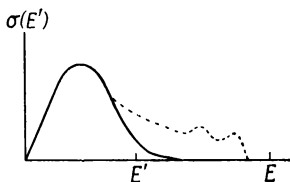
где одновременно показано, как возрастает число состояний составного ядра с ростом энергии возбуждения. Состояния с отрицательной энергией показаны схематически как связанные состояния в потенциальной яме. При высоких энергиях полное сечение принимает значения, близкие к $2\pi R^2$. Подъем кривой при низких энергиях обусловлен тем фактом, что в этой модели частица вследствие квантовомеханических эффектов как бы „чувствует“ ядро уже на расстоянии $R + \lambda$, где $\lambda = \lambda/2\pi$, λ — длина волны.

Вопреки ожиданиям, в экспериментальных сечениях для пучков, в которых нейтроны имеют разброс по энергии, проявляются „гигантские“ максимумы с шириной порядка 1—2 Мэв, что схематически показано на фиг. 2. Эти сече-

ния были воспроизведены теоретически в более поздней работе Фешбаха, Портера и Вайскопфа [10], где рассматривалось рассеяние нуклона на комплексной потенциальной яме, вещественная часть которой представляет собой некоторое среднее взаимодействие падающего нуклона с ядерными частицами, а мнимая часть описывает процесс выбывания частиц из падающего пучка и переход их в составные состояния. В рамках представлений о составном ядре не существует естественного объяснения указанных „гигантских“ резонансов. Представление ядра комплексной потенциальной ямой и является главной особенностью новой теории.

В неупругом рассеянии нуклонов сложными ядрами были обнаружены некоторые явления, которые также потребовали изменения теории составного ядра. Результаты, полученные в теории составного ядра и дополненные статистической гипотезой, показаны на фиг. 3 сплошной линией. В этой теории вероятность оставить ядро в любом возбужденном состоянии предполагается для всех уровней одинаковой, если отвлечься, конечно, от кинематических факторов. Поэтому кривая

возбуждения возрастает, когда энергия, уносимая рассеянной частицей, уменьшается (а энергия, остающаяся у ядра, увеличивается), и обращается в нуль только тогда, когда волновое число вылетающего нуклона (или нуклонов) становится столь малым, что он будет отражаться от поверхности ядра. Экспериментально наблюдалось аномально большое число быстрых частиц; на фиг. 3 это изображается пунктирной линией. Процессы, ответственные за появление частиц с высокой энергией, были хорошо описаны качественно Остерном, Батлером и Мак-Манусом [11] с помощью формализма прямых взаимодействий. В работе этих авторов предполагается, что падающая частица „вырывает“ частицы с поверхности ядра, не образуя при этом составного состояния. Например, матричный элемент перехода для ядра



Фиг. 3. Типичные предсказания статистической модели для спектра неупруго рассеянных нейтронов (сплошная кривая) (E' — энергия-испущенного нейтрона) и типичный экспериментальный спектр нейтронов (пунктирная кривая).

из состояния i в состояние f записывается в виде

$$M_{if} = -\frac{2M}{\hbar^2} \int_{r_0}^{\infty} \chi_f(\xi) e^{-ik_f \cdot r} V(r - \xi) e^{ik_i \cdot r} \chi_i(\xi) d^3\xi d^3r,$$

где $\exp ik_i \cdot r$ и $\exp ik_f \cdot r$ — волновые функции падающего и рассеянного нуклонов, а $\chi_i(\xi)$ и $\chi_f(\xi)$ — волновые функции начального и конечного состояний ядра. Здесь и в дальнейшем r представляет собой координату падающего нуклона, а ξ — совокупность координат ядра. Предполагается, что радиус r_0 определяет радиус „поверхности“. Его величина выбиралась такой, чтобы правильно описать экспериментальные данные по угловым распределениям.

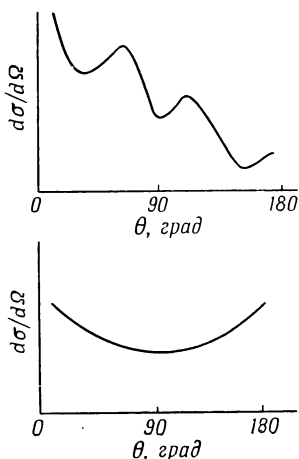
В такой форме теория была предложена Батлером [12] для описания реакций срыва с участием дейтрона, которая представляет собой пример „прямого взаимодействия“. Однако для простоты мы будем рассматривать рассеяние нуклонов, поскольку в связи со сложной структурой дейтронов и α -частиц рассмотрение процессов с участием этих частиц оказалось бы довольно затруднительным.

Многие эксперименты показали, что в этих неупругих процессах частицы с высокой энергией имеют угловое распределение, имеющее обычно резкий максимум, соответствующий направлению вперед, в то время как нуклоны с малой энергией имеют сравнительно гладкое, симметричное угловое распределение, предсказываемое статистической теорией. Эти факты также указывают на то, что процессы с высокой энергией являются по своей природе прямыми процессами.

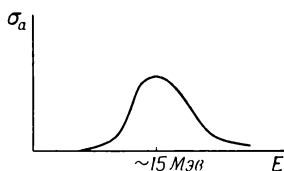
В дипольном фотоэффекте наблюдается другое явление, которое также противоречит картине составного ядра. В дипольном фотоэффекте сечение поглощения для всех сложных ядер показывает „гигантский“ максимум, который, например для тяжелых ядер, лежит в области 15 Мэв . Объяснение этого максимума на основе представления о коллективных колебаниях протонной плотности было дано Голдгабером и Теллером [13] и Штейнведем и Йенсенем [14]. Однако распад такой системы, в которой энергия почти равномерно распределена между всеми частицами, должен адекватно описываться статистической теорией. В случае средних и тяжелых ядер число наблюдаемых протонов с большой энергией сильно превышает число таких протонов, предсказы-

ваемое статистической теорией (иногда даже на несколько порядков). Наличие протонов с такой высокой энергией самым естественным образом вытекает из теории гигантского дипольного резонанса при фотоэффекте, данной Уилкинсом [15]. Согласно этой теории, γ -квант поглощается нуклоном, который затем переходит в одночастичное состояние

в комплексной яме с полной энергией, равной энергии γ -кванта и получает, таким образом, заметную вероятность



Ф и г. 4. Схематическое изображение углового распределения неупруго рассеянных нейтронов для части спектра, отвечающей высокой энергии (см. фиг. 3) (верхний график), и углового распределения неупруго рассеянных нейтронов для низкоэнергетической части спектра (нижний график).



Ф и г. 5. Сечение поглощения γ -квантов, проявляющее гигантский дипольный резонанс.

вылететь раньше, чем он сможет захватиться в составные состояния. (Указанный переход в составные состояния по-прежнему описывается мнимой частью потенциала.)

Таким образом, хотя старая картина составного ядра и должна была быть видоизменена, новые явления оказались возможным воспроизвести с помощью простых физических

моделей, использующих комплексную потенциальную яму. Однако это описание не было полным, поскольку из экспериментов, в которых сечения могли исследоваться детально, было известно, что в действительности гигантские резонансы состоят из тысяч, или даже миллионов, составных состояний, так что необходимо было прояснить связь между детальным поведением (которое часто нельзя было исследовать

экспериментально, но о котором тем не менее можно было делать некоторые заключения) и усредненным поведением, даваемым потенциальной ямой. Далее, необходимо было установить связь параметров оптического потенциала с более фундаментальными характеристиками, такими, как характеристики нуклон-нуклонного взаимодействия.

Единое описание вышеуказанных явлений начинается с точного описания явлений на основе ядерной дисперсионной теории. Амплитуда рассеяния разделяется на слагаемые, соответствующие прямым процессам и процессам, идущим через составное ядро. Однако перед тем как перейти к такому описанию, мы дадим обзор дисперсионной теории Капура — Пайерлса [3], которую мы в дальнейшем будем использовать, и дадим упрощенную картину, иллюстрирующую физические предположения, которые в дальнейшем используются более формальным образом.

2. ДИСПЕРСИОННАЯ ТЕОРИЯ КАПУРА — ПАЙЕРЛСА

§ 1. Рассеяние на потенциальной яме

Рассмотрим рассеяние s нейтрона потенциальной ямой; на этом простом примере мы сможем понять основные идеи теории. Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2\phi}{dr^2} + [E - V(r)] \phi = 0, \quad (1)$$

где $V(r)$ — потенциал $\phi(r) = r\psi(r)$ (ψ — волновая функция нейтрона). Для r , больших некоторого радиуса R , вне которого потенциал $V(r)$ равен нулю, имеем

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + k^2\phi = 0, \quad r > R, \quad (2)$$

где

$$k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\phi = \frac{\sin kr}{k} + S e^{ikr}, \quad (2.2)$$

причем функция ϕ нормируется так, чтобы первое слагаемое в правой части соответствовало s -волне в разложении плоской волны с единичной амплитудой, т. е.

$$e^{ikr} \approx \frac{\sin kr}{kr} \quad \text{при } kr \ll 1;$$

величина S представляет собой амплитуду рассеянной (выходящей) волны.

Во внутренней области ($r < R$) решение ϕ можно записать в виде

$$\phi(r) = \sum a_m \phi_m(r), \quad r < R, \quad (3)$$

где ϕ_m — собственные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \phi_m}{dr^2} + (E_m - V) \phi_m = 0 \quad (3.1)$$

и граничному условию

$$\left\{ \frac{d\phi_m}{dr} = ik\phi_m \right\} \Big|_{r=R}. \quad (3.2)$$

Собственные значения E_m комплексны вследствие того, что граничное условие (3.2) является комплексным, причем граничное условие явно зависит от волнового числа и, следовательно, от энергии падающего нейтрона. Вытекающие отсюда следствия мы обсудим позднее. Эти собственные функции образуют полную систему [16]. Ортогональность функций ϕ_m легко установить, если уравнение для ϕ_n

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \phi_n}{dr^2} + (E_n - V) \phi_n = 0 \quad (3.3)$$

умножить слева на ϕ_m , а уравнение (3.1) слева на ϕ_n и вычесть первый результат из второго. Таким образом получаем

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left(\phi_n \frac{d^2 \phi_m}{dr^2} - \phi_m \frac{d^2 \phi_n}{dr^2} \right) + (E_m - E_n) \phi_n \phi_m = 0. \quad (3.4)$$

Интегрируя это уравнение от 0 до R и используя теорему Грина, находим

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left(\phi_n \frac{d\phi_m}{dr} - \phi_m \frac{d\phi_n}{dr} \right)_{r=R} = (E_n - E_m) \int_0^R \phi_n \phi_m dr. \quad (3.5)$$

Из (3.2) видно, что левая часть обращается в нуль, так что

$$\int_0^R \phi_n(r) \phi_m(r) dr = 0, \quad E_m \neq E_n. \quad (3.6)$$

Вообще говоря, из $m \neq n$ следует $E_m \neq E_n$. Особый случай, когда $E_m = E_n$ при $m \neq n$, можно исследовать с помощью специальных методов; однако для рассматриваемых нами потенциалов такого рода ситуации не возникают. При $m = n$ мы нормируем функции ϕ_m так, чтобы

$$\int_0^R \phi_m^2(r) dr = 1. \quad (3.7)$$

Подчеркнем следующие два важных обстоятельства. Во-первых, ортогональность имеет место между ϕ_n и ϕ_m , а не между ϕ_n^* и ϕ_m , как это обычно бывает; во-вторых, ортогональность существенно зависит от того обстоятельства, что ϕ_m и ϕ_n подчиняются одному и тому же граничному условию.

Воспользовавшись ортогональностью функций ϕ_m , мы можем получить коэффициенты a_m , содержащиеся в разложении (3), если еще раз воспользоваться теоремой Грина:

$$\int_0^R (\phi_m \mathcal{L} \phi - \phi \mathcal{L} \phi_m) dr = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\phi_m \frac{d\phi}{dr} - \phi \frac{d\phi_m}{dr} \right)_R, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} + V(r). \quad (4.1)$$

Из (1) и (3.1) получаем

$$\begin{aligned} (E - E_m) a_m &= -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} - ik\phi \right) \phi_m \right]_R = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M} e^{-ikR} \phi_m(R), \end{aligned} \quad (4.2)$$

откуда

$$a_m = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{e^{-ikR}}{E_m - E} \phi_m(R). \quad (4.3)$$

Сшивание внутреннего и внешнего решений при $r = R$ дает

$$\sum a_m \phi_m(R) = \frac{\sin kR}{k} + S e^{ikR}, \quad (5)$$

откуда

$$S = \frac{1}{k e^{ikR}} \left\{ \sum_m \frac{k \hbar^2}{2M} e^{-ikR} \frac{[\phi_m(R)]^2}{E_m - E} - \sin kR \right\}. \quad (6)$$

Выражение (6) можно записать в обычном виде, определив ширину Γ_m как

$$\Gamma_m = \frac{k \hbar^2}{M} [\phi_m(R)]^2. \quad (6.1)$$

Тогда

$$S = \frac{e^{-2ikR}}{2k} \sum_m \frac{\Gamma_m}{E_m - E} - \frac{\sin kR}{k} e^{-ikR} \quad (7)$$

и

$$\sigma = 4\pi |S|^2. \quad (7.1)$$

Как следствие комплексного граничного условия функции ϕ_m и, следовательно, ширины Γ_m являются комплексными величинами. Позднее мы увидим, что для малых энергий падающей частицы мнимая часть оказывается малой.

Мнимую часть энергии E_m можно найти, если воспользоваться соотношением

$$\int_0^R (\phi_m \mathcal{L} \phi_m^* - \phi_m^* \mathcal{L} \phi_m) dr = (E_m^* - E_m) \int_0^R \phi_m \phi_m^* dr. \quad (8)$$

Используя теорему Грина, получаем для левой части последнего равенства

$$\frac{ik \hbar^2}{M} \phi_m^* \phi_m(R).$$

Обозначив мнимую часть энергии E_m через $-\beta_m/2$, т. е.

$$E_m = \varepsilon_m - \frac{i\beta_m}{2}, \quad (8.1)$$

из соотношения (8) получим

$$\beta_m = \frac{k \hbar^2}{M} \frac{|\phi_m(R)|^2}{\int_0^R |\phi_m(r)|^2 dr}. \quad (8.2)$$

Соотношение (8.2) легко интерпретировать. Числитель пропорционален скорости частицы $k\hbar/M$, умноженной на вероятность того, что частица находится на поверхности, в то время как знаменатель равен вероятности того, что частица находится в ядре. При низких энергиях, когда, как уже указывалось, ϕ_m имеет небольшую мнимую часть, знаменатель близок к единице [см. (3.7)]; тогда, сравнивая (8.2) и (6.1), мы видим, что

$$\beta_m \approx \Gamma_m \text{ (низкие энергии)}. \quad (8.3)$$

Чтобы иметь более полное представление относительно значений различных величин, полезно произвести расчет их для прямоугольной ямы. Мы выбираем следующий потенциал:

$$V = \begin{cases} -U & \text{при } r < R_0, \\ 0 & \text{при } r > R_0, \end{cases}$$

где $U = 42 \text{ Мэв}$, $R_0 = 1,45 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}$ (A — массовое число); указанные параметры для прямоугольной ямы использовались в работе Фешбаха, Портера и Вайскопфа [10]; используемую ими мнимую часть потенциала мы введем позже. Таким образом, выбранные нами параметры являются типичными для последующего рассмотрения. В дальнейшем решение системы уравнений (3.1) и (3.2) мы будем сравнивать с функцией $\phi_m^{(0)}$, определяемой с помощью системы

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} \phi_m^{(0)}(r) + (E_m^{(0)} - V) \phi_m^{(0)}(r) = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{d\phi_m^{(0)}}{dr} \right|_{r=R} = 0. \quad (9.1)$$

Вещественное граничное условие (9.1) используется в теории Вигнера—Айзенбуда; таким образом, решения $\phi_m^{(0)}$ оказываются вещественными. Мы будем рассматривать функции $\phi_m^{(0)}$, поскольку эти вещественные функции легче рассчитывать и поскольку они, как мы увидим, при малых энергиях оказываются хорошим нулевым приближением для функций ϕ_m .

В случае прямоугольной ямы имеем

$$\phi_m = A_m \sin(K_m - ix_m) r, \quad (9.2)$$

где K_m и χ_m определяются соотношением

$$(K_m - i\chi_m)^2 = \frac{2M(E_m + U)}{\hbar^2}. \quad (9.3)$$

Для простоты радиус шивания R в граничном условии (3.2) выбран так, чтобы он совпадал с краем ямы R_0 . Радиус R можно выбрать и иначе (вообще он выбирается немного бóльшим), но для полученных здесь качественных результатов это оказывается несущественным. Граничное условие (3.2) можно теперь записать в виде

$$(K_m - i\chi_m) \cos(K_m - i\chi_m)R = ik \sin(K_m - i\chi_m)R. \quad (9.4)$$

Покажем, что $\chi_m R$ мало при низких энергиях. Разложим уравнение (9.4) по степеням $\chi_m R$ и возьмем только члены первого порядка

$$\begin{aligned} (K_m - i\chi_m)(\cos K_m R + i\chi_m R \sin K_m R) &\approx \\ &\approx ik(\sin K_m R - i\chi_m R \cos K_m R). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Отсюда получаем

$$\chi_m = \frac{k \sin K_m R}{K_m R \sin K_m R - \cos K_m R}. \quad (9.6)$$

Так как $\cos K_m R \ll K_m R \sin K_m R$ [см. (9.8)], то

$$\chi_m \approx \frac{k}{K_m R}. \quad (9.7)$$

Используя это значение для χ_m и (9.5), получаем в низшем порядке по $\chi_m R$:

$$\cos K_m R \approx -\frac{(kR)^2 \sin K_m R}{(K_m R)^3}. \quad (9.8)$$

Мы видим, что $K_m R$ велико (~ 10) даже для ядер со средними A и при нулевой энергии падающего нуклона, а величины χ_m и $\cos K_m R$ малы. Соотношение (9.7) показывает, что величина $\chi_m R$ мала (это необходимое условие того, чтобы указанное выше разложение быстро сходилось) при $E \ll U$, т. е. в случае, когда энергия падающей частицы много меньше глубины потенциальной ямы.

Пусть функция

$$\phi_m^{(0)} = \left(\frac{2}{R}\right)^{1/2} \sin K_m^{(0)} R,$$

где

$$K_m^{(0)} R = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

является решением уравнения (9) с граничным условием (9.1). Положим $K_m R = K_m^{(0)} R + \delta K_m R$; тогда из (9.8) в низшем порядке по $\chi_m R$ получим

$$\delta K_m = k \left[\frac{kR}{(K_m R)^3} \right]. \quad (9.9)$$

Несмотря на то, что выражение (9.9) дает поправку второго порядка (в том смысле, что $\delta K_m R$ пропорционально квадрату kR), оно получается правильным, поскольку в (9.5) следующие члены разложения входят только в третьей степени. Далее, находим

$$\delta \epsilon_m \equiv \epsilon_m - E_m^{(0)} = \left(\frac{\hbar^2}{2M} \right) (2K_m \delta K_m - \chi_m^2) \approx \left[\frac{1}{(K_m R)^2} \right] \epsilon_m, \quad (9.10)$$

где энергии измеряются от дна ямы. Для типичного значения $K_m R \sim 10$ это означает, что расчет вещественной части резонансной энергии с помощью граничного условия (9.1) дает результат примерно с точностью до $\sim 1\%$.

Мнимая часть β_m энергии E_m в первом порядке по $\chi_m R$ равна

$$\frac{\hbar^2 k}{M} [\phi_m^{(0)}(R)]^2,$$

или же

$$\beta_m \approx \frac{2\hbar^2 k}{MR} \approx \Gamma_m, \quad (9.11)$$

поскольку

$$\phi_m^{(0)}(r) = \left(\frac{2}{R} \right)^{1/2} \sin K_m r. \quad (9.12)$$

Таким образом, в низшем порядке по $\chi_m R$ величины Γ_m являются вещественными, а зависимость вещественных частей резонансной энергии ϵ_m от энергии падающей частицы является только во втором порядке по $\chi_m R$.

Обобщение этих результатов на случай комплексной прямоугольной ямы тривиально. Введение потенциала

$$\tilde{V}(r) = -U - iW$$

(через \tilde{V} мы обозначаем комплексную яму; собственные функции в этой комплексной яме обозначаются через $\tilde{\phi}_m(r)$ и т. д.)

приводит к тому, что W просто сдвигает резонансную энергию на постоянную величину — iW . Таким образом,

$$\tilde{E}_m = E_m - iW = \epsilon_m - \frac{i\beta_m}{2} - iW. \quad (9.13)$$

Следовательно, введение мнимой части приводит к уширению резонансных уровней. Однако в случае прямоугольной ямы собственные функции не изменяются, т. е. $\tilde{\phi}_m(r) = \phi_m$. Без особого труда можно провести выкладки для случая, когда вещественная и мнимая части зависят от r . Можно произвести расчеты также и для комплексных потенциалов, зависящих от скорости [17]; это представляется весьма важным, поскольку параметры оптического потенциала, используемые в практических расчетах, зависят от энергии падающей частицы. Следует выбирать глубину ямы разной для различных собственных значений энергии при заданной энергии падающей частицы. При исследовании случая с потенциалом $\tilde{V}(r)$, зависящим от скорости, мы можем потенциал \tilde{V} рассматривать как нелокальный оператор $\tilde{V}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, который оказывается эквивалентным потенциалу, зависящему от скорости. В этом случае волновое уравнение записывается в виде

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr'^2} \tilde{\phi}_m(r') + \tilde{E}_m \tilde{\phi}_m(r') - \int \tilde{V}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \tilde{\phi}_m(r) dr = 0. \quad (10)$$

Для ортогональности функций $\tilde{\phi}_m$ необходимо, чтобы $\tilde{V}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \tilde{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$; можно показать, что потенциалы, не подчиняющиеся этому соотношению, являются физически бессмысленными [17]. При доказательстве ортогональности предполагается, что $\tilde{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ не равно нулю лишь при r и r' , меньших R .

Для нейтрона в комплексной потенциальной яме резонансная трактовка была развита детально, причем не только для того, чтобы проиллюстрировать формализм, но также и по той причине, что знание положения, ширины и расстояний между уровнями часто оказываются полезными для теоретических оценок.

Обобщение результатов на случай отличного от нуля момента количества движения не представляет особого труда.

В этом случае регулярную в начале координат функцию $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ можно записать в виде

$$r\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \Theta_\alpha(\theta, \varphi)\phi_\alpha(r), \quad (11)$$

где $\Theta_\alpha(\theta, \varphi)$ — нормированная угловая часть волновой функции (например, в случае частиц с нулевым спином $\Theta_\alpha(\theta, \varphi)$ равна функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — нормированной сферической гармонике), а ϕ_α — радиальная функция для потенциальной ямы, регулярная в начале координат и имеющая асимптотическую форму

$$e^{i\delta_l} \sin \left[kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right],$$

где δ_l — сдвиг фазы для l -й волны. Нижний индекс α означает все квантовые числа момента количества движения, т. е., по терминологии Вигнера и др., индекс канала. Далее, решения, асимптотические выражения которых имеют вид выходящих волн, обозначаются через $\psi^+(\mathbf{r})$, т. е.

$$r\psi_\alpha^+(\mathbf{r}) = \Theta_\alpha(\theta, \varphi)\phi_\alpha^+(r); \quad (11.1)$$

асимптотические выражения $\phi_\alpha^+(r)$ в случае нейтронов имеют вид $\exp(ikr - i\pi/2)$. Обобщение на случай заряженных частиц не представляет затруднений. В этом случае $\phi_\alpha^+(r)$ имеет асимптотическую форму

$$\exp \left(ikr - \eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l \right),$$

где $\eta = Ze^2/\hbar v$ (v — скорость протона), а σ_l представляет собой кулоновский сдвиг фазы. Решение радиального уравнения Шредингера для $r > R$ можно записать в виде

$$\phi_\alpha(r) = \frac{\phi_\alpha^+(r) - \phi_\alpha^-(r)}{2ik} + S_\alpha \phi_\alpha^+(r), \quad (12)$$

где $\phi_\alpha^- = (\phi_\alpha^+)^*$ — решение, асимптотическая форма которого имеет вид входящей волны. Собственные функции ϕ_m (эти функции имеют ту же самую угловую зависимость, что

и $\phi_\alpha(r)$, так что мы можем опустить индекс α) определяются тогда с помощью граничного условия

$$\left[\frac{d\phi_m}{dr} = f_\alpha^+(r) \phi_m \right]_{r=R}, \quad (12.1)$$

где

$$f_\alpha^{(+)}(r) = \frac{1}{\phi_\alpha^+(r)} \frac{d\phi_\alpha^+(r)}{dr} \quad (12.2)$$

представляет собой логарифмическую производную выходящей волны. Функцию $\phi_\alpha(r)$ можно разложить в ряд по ϕ_m :

$$\phi_\alpha(r) = \sum_m a_m \phi_m(r), \quad r < R \quad (12.3)$$

и, аналогично тому, как мы получили соотношения (4)—(4.3), получим

$$(E - E_m) a_m = - \frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(\frac{d\phi_\alpha}{dr} - f^+ \phi_\alpha \right) \phi_m \right]_R. \quad (12.4)$$

Использование соотношения (12) для $\phi_\alpha(r)$ приводит к тому, что в правой части (12.4) остается только слагаемое с ϕ_α^- , и мы находим

$$(E - E_m) a_m = \frac{\hbar^2}{4Mik} [(f_\alpha^- - f_\alpha^+) \phi_\alpha^- \phi_m]_R. \quad (12.5)$$

Вронскиан равен величине

$$[f_\alpha^+(r) - f_\alpha^-(r)] \phi_\alpha^+(r) \phi_\alpha^-(r) = 2ik, \quad (12.6)$$

так что

$$a_m = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\phi_\alpha^+(R)} \frac{\phi_m(R)}{E_m - E}. \quad (12.7)$$

Сшивание внутреннего и внешнего решений при $r = R$ дает

$$S_\alpha = \frac{1}{k [\phi_\alpha^+(R)]^2} \sum_m \frac{k \hbar^2 \phi_m^2(R)}{2M E_m - E} - \frac{\phi_\alpha^+(R) - \phi_\alpha^-(R)}{2ik \phi_\alpha^+(R)}. \quad (12.8)$$

Определим величину

$$\Gamma_m \equiv \frac{k \hbar^2}{M} P(R) \phi_m^2(R), \quad (12.9)$$

где P — коэффициент проницаемости

$$P = \frac{1}{\phi_{\alpha}^{+}(R)\phi_{\alpha}^{-}(R)} = \frac{1}{|\phi_{\alpha}^{+}(R)|^2}. \quad (12.10)$$

Тогда

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2k} \frac{\phi_{\alpha}^{-}(R)}{\phi_{\alpha}^{+}(R)} \sum_m \frac{\Gamma_m}{E_m - E} - \frac{1}{2ik} \left(1 - \frac{\phi_{\alpha}^{-}(R)}{\phi_{\alpha}^{+}(R)} \right). \quad (12.11)$$

Таким образом, сечение можно представить в виде

$$\sigma_{\alpha} = 4\pi |S_{\alpha}|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| \frac{\phi_{\alpha}^{-}(R)}{\phi_{\alpha}^{+}(R)} \sum_m \frac{\Gamma_m}{E_m - E} + i \left(1 - \frac{\phi_{\alpha}^{-}(R)}{\phi_{\alpha}^{+}(R)} \right) \right|^2. \quad (12.12)$$

§ 2. Случай многих тел

Рассмотрим случай, когда падающий нуклон испытывает упругое или неупругое рассеяние на ядре, состоящем из A частиц¹⁾. В случае, когда эта частица находится внутри сферы радиуса, R (радиус выбирается так, чтобы взаимодействие между падающей частицей и ядром на расстояниях, больших этого радиуса, обращалось в нуль), волновую функцию опять можно разложить по состояниям составного ядра $\Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi)$. Здесь через \mathbf{r} обозначены координаты падающей частицы, а через ξ — совокупность координат всех A частиц внутри ядра. Пока мы считаем, что падающая частица отлична от частиц ядра; однако позднее будет указано, как производится обобщение на случай, когда эта частица тождественна с частицами ядра.

Волновые функции составных состояний $\Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi)$ подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} H\Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi) &= W_p \Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi), \\ H &= H_{\xi} + T(r) + V(\mathbf{r}, \xi). \end{aligned} \quad (13)$$

1) После того как мы предположили, что взаимодействие между падающей частицей и всеми другими A частицами обращается в нуль вне радиуса сшивания R , дисперсионная теория уже не учитывает испускание сложных частиц. Процессы такого рода, вероятно, можно учесть лишь с помощью определенной модификации данного формализма.

Здесь H_{ξ} — гамильтониан системы A ядерных частиц, $T(r)$ — кинетическая энергия падающей частицы, $V(\mathbf{r}, \xi)$ — потенциальное взаимодействие между A ядерными частицами и падающим нуклоном, которое представляет собой сумму нуклон-нуклонных потенциалов:

$$V(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{i=1}^A V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i),$$

причем координата \mathbf{r} относится к падающему нуклону. Мы предполагаем, что $V(\mathbf{r}, \xi)$ является „хорошим“ потенциалом, т. е. потенциалом без сильной отталкивательной сердцевины и других сингулярностей. Обобщение на случай, когда потенциал имеет более сложный вид, можно произвести с помощью формализма, развитого Ватсоном и Бракнером, однако это приводит лишь к несущественным усложнениям.

Состояния $\Phi^{(p)}$ и $\Phi^{(q)}$ теперь не являются ортогональными; ортогональными оказываются $\Phi^{(p)}$ и $\bar{\Phi}^{(q)}$, где $\bar{\Phi}^{(q)}$ получается из $\Phi^{(q)}$ путем комплексного сопряжения всех угловых функций, в частности $\Theta_{\alpha}(\theta, \varphi)$, входящих в одночастичную функцию. Аналогично, с точностью до произвольного фазового множителя, функция $\bar{\Phi}^{(q)}$ получается из $\Phi^{(q)}$ путем преобразования волновой функции так, чтобы компонента полного момента количества движения M оказалась замененной на $-M$; при этом комплексного сопряжения над функцией, описывающей внутреннюю структуру, производить не нужно (например, над радиальной волновой функцией, соответствующей одночастичному случаю). Положим

$$\int_0^R \bar{\Phi}^{(q)} \Phi^{(p)} d^3\xi d^3r = 1, \text{ при } p = q, \quad (13.1)$$

а при $p \neq q$ интеграл равен нулю. Используя в дальнейшем свойство ортогональности волновых функций, мы слева не ставим черты над $\bar{\Phi}$, поскольку при этом изменения собственных функций момента количества движения тривиальны и легко производятся при введении разложения (14), и интегрирование по углам легко выполняется.

Введем полный набор состояний $\chi_j(\xi)$ для A частиц. Граничные условия для этих состояний можно было бы выбрать различными способами. Однако сильно связанные состояния,

близкие к основному, т. е. состояния, которые нас главным образом и интересуют, нечувствительны к точному выбору граничных условий. Например, если мы выбираем радиус шивания R достаточно большим, где как волновая функция, так и ее логарифмическая производная оказываются для связанного состояния малыми, то не имеет особого значения, что мы выбираем в качестве граничного условия при $r = R$: приравниваем ли нулю волновую функцию или производную или же полагаем их равными какой-нибудь малой конечной величине. Трудности возникают, когда энергия возбуждения ϵ_j , отвечающая состоянию χ_j , которую мы измеряем от ϵ_0 как от начала отсчета, становится достаточно большой, так что одна из A частиц может покинуть ядро. Однако, поскольку единственное свойство этих сильно возбужденных состояний, которым мы пользуемся, заключается в том, что они вместе с низкими возбужденными состояниями образуют полный набор, мы надеемся, что наши результаты не будут зависеть от вида граничных условий.

Чтобы установить связь с оптической моделью, оказывается удобным для описания падающей частицы пользоваться состояниями $\tilde{\psi}_m(\mathbf{r})$ в комплексной яме того типа, о котором говорилось в предыдущем параграфе. Тогда мы можем записать разложение

$$\Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{j,m} a_{j,m}^p \chi_j(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Граничное условие, налагаемое на $\Phi^{(p)}$ при $r = R$, теперь можно очень просто записать с помощью граничных условий для $\tilde{\psi}_m^j$. По аналогии с (11) удобно ввести следующие радиальные функции:

$$r\tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r}) = \Theta_\alpha(\theta, \varphi) \tilde{\phi}_m^j(r). \quad (14.1)$$

Тогда граничное условие будет иметь вид

$$\frac{d\tilde{\phi}_m^j}{dr} = \left[f_\alpha^+(r, E - \epsilon_j) \tilde{\phi}_m^j(r) \right]_{r=R}. \quad (14.2)$$

Разность $E - \epsilon_j$ в аргументе функции f_α^+ указывает на то, что функция должна быть взята при этой энергии. Выбранное граничное условие соответствует тому, что вылетающая

частица оставляет ядро в возбужденном состоянии j . Индекс канала α у функции $\tilde{\psi}_m^j$ по-прежнему опускается. Ввиду того что f_α^+ зависит от ϵ_j , функции $\tilde{\psi}$, как указывалось, также зависят от j ; однако эта зависимость оказывается слабой. Тот факт, что граничное условие для функций $\tilde{\psi}$ зависит от j , не нарушает ортогональности функций $\Phi^{(p)}$, если всегда сначала интегрировать по координатам ξ .

Волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, \xi)$, являющуюся решением уравнения Шредингера

$$H\Psi = E\Psi, \quad (15)$$

мы можем представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum a_p \Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi) \quad \text{при } r < R \quad (15.1)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, \xi) = I_\alpha \left(\frac{\psi_\alpha^+(\mathbf{r}) - \psi_\alpha^-(\mathbf{r})}{2ik} \right) \chi_0(\xi) + S_\alpha \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \chi_0(\xi) + \\ + \sum_{\alpha \neq \alpha'} S_{\alpha\alpha', j} \psi_{\alpha'}^{j+}(\mathbf{r}) \chi_j(\xi) \quad \text{при } r > R, \end{aligned} \quad (15.2)$$

где S_α является амплитудой упругого рассеяния в канале α , а $S_{\alpha\alpha', j}$ представляет собой амплитуду неупругого рассеяния из канала α в канал α' , причем ядро остается в возбужденном состоянии χ_j . Функция $\psi_{\alpha'}^{j+}$ представляет собой выходящую волну с энергией $E_{\alpha'} - \epsilon_j$ в канале α' . Коэффициент I_α дает амплитуду плоской волны в канале α . Для частиц с нулевым спином имеем

$$e^{ik \cdot r} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l [4\pi(2l+1)]^{1/2} Y_l^0(\theta, \varphi) j_l(kr). \quad (15.3)$$

Если мы будем считать, что $\alpha = l$, т. е. Θ_α совпадает с Y_l^0 , и воспользуемся тем, что

$$j_l \sim \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}, \quad (15.4)$$

то в этом специальном случае

$$I_l = i^l (2l+1)^{1/2}. \quad (15.5)$$

Множитель $(4\pi)^{1/2}$ учитывается на более поздней стадии [см. (7.1) и (12.12)] путем умножения на 4π с тем, чтобы получить

сечение; при этом условии наше общее рассмотрение при $l=0$ будет соответствовать уже рассмотренному нами ранее случаю S -волны.

Коэффициент a_p мы можем опять найти с помощью теоремы Грина:

$$\begin{aligned} \int_0^R (\Phi^{(p)} H \Psi - \Psi H \Phi^{(p)}) d^3\xi d^3r &= (E - W_p) a_p = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{j,m} a_{jm}^p \int_0^R d^3\xi \chi_l(\xi) \times \\ &\times \int d\Omega \left\{ R \tilde{\Psi}_m^j(\mathbf{R}) \frac{d}{dr} [r \Psi(\mathbf{r}, \xi)] - \right. \\ &\quad \left. - R \Psi(\mathbf{R}, \xi) \frac{d}{dr} [r \tilde{\Psi}_m^j(\mathbf{r})] \right\}_{r=R}. \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользовавшись соотношением (14.2), находим

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{\hbar^2}{2M(W_p - E)} \sum_{j,m} a_{jm}^p \int_0^R d^3\xi \chi_j(\xi) \int d\Omega \times \\ &\times \left\{ R \tilde{\Psi}_m^j(\mathbf{R}) \left[\frac{d}{dr} - f_\alpha^+(R, E - \varepsilon_j) \right] r \Psi(\mathbf{r}, \xi) \right\}_{r=R}, \end{aligned} \quad (16.1)$$

где мы явно указали зависимость функций f_α^+ от энергии. В соотношении (16.1) стоящий в квадратных скобках оператор, действуя на „выходящую“ часть функции Ψ , дает нуль, так что в (15.2) единственным членом, дающим вклад, является член, пропорциональный произведению $\psi_\alpha^-(\mathbf{r}) \chi_0(\xi)$. Таким образом, воспользовавшись ортогональностью функций χ , получим

$$\begin{aligned} a_p &= -I_\alpha \frac{\hbar^2}{2M(W_p - E)} \sum_m a_{om}^p \left\{ \frac{f_\alpha^-(R) - f_\alpha^+(R)}{2ik} \right\} \times \\ &\times \int d\Omega R \tilde{\Psi}_m(\mathbf{R}) R \psi_\alpha^-(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (16.2)$$

Интегрирование по Ω обеспечивает ту же угловую зависимость функций $\tilde{\Psi}_m$, что и функций во входном канале α . Имея в виду эти ограничения, мы можем коэффициент a_p выразить через радиальные части волновых функций

$$a_p = I_\alpha \frac{\hbar^2}{2M(W_p - E)} \left\{ \frac{f_\alpha^- - f_\alpha^+}{2ik} \right\} \phi_\alpha^-(R) \sum_m a_{om}^p \tilde{\Phi}_m(R). \quad (16.3)$$

Выражение (16.3) можно упростить, если воспользоваться вронскианом (12.6):

$$a_p = I_\alpha \frac{\hbar^2}{2M(W_p - E)} \frac{1}{\phi_\alpha^+(R)} \sum_m a_{om}^p \tilde{\phi}_m(R). \quad (16.4)$$

Имея в своем распоряжении коэффициенты a_p , мы можем получить S_α и $S_{\alpha\alpha',j}$, сшивая внутреннюю и внешнюю волновые функции (15.1) и (15.2) при $r=R$. Если затем левую и правую части умножить на $\chi_0(\xi)$ и $R\Theta_\alpha$ и проинтегрировать по $d^3\xi$ и $d\Omega$, то получим

$$S_\alpha \phi_\alpha^+(R) = \sum_p a_p \sum_{m'} a_{om'}^p \tilde{\phi}_{m'}(R) - \frac{I_\alpha (\phi_\alpha^+(R) - \phi_\alpha^-(R))}{2ik}. \quad (17)$$

Введя ширину

$$\gamma_p = \frac{k\hbar^2}{M} \frac{1}{\phi_\alpha^+(R)\phi_\alpha^-(R)} \sum_m \sum_{m'} a_{om}^p a_{om'}^p \tilde{\phi}_m(R)\tilde{\phi}_{m'}(R), \quad (17.1)$$

мы можем записать соотношение

$$S_\alpha = \frac{I_\alpha}{2k} \frac{\phi_\alpha^-(R)}{\phi_\alpha^+(R)} \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E} - \frac{I_\alpha}{2ik} \left(1 - \frac{\phi_\alpha^-(R)}{\phi_\alpha^+(R)} \right), \quad (18)$$

которое имеет ту же форму, что и (12.11). Сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma_\alpha = 4\pi |S_\alpha|^2. \quad (18.1)$$

Для частиц с нулевым спином индекс α можно заменить на l , и, воспользовавшись значением величины I_l , задаваемой соотношением (15.5), получить для полного сечения рассеяния в канале l следующую формулу:

$$\sigma_l = (2l+1) \frac{\pi}{k^2} \left| \frac{\phi_l^-(R)}{\phi_l^+(R)} \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E} + l \left(1 - \frac{\phi_l^-(R)}{\phi_l^+(R)} \right) \right|^2. \quad (18.2)$$

Поскольку падающие частицы описываются плоской волной (15.3), то дифференциальное сечение дается квадратом

суммы членов с различными l 1)

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = 4\pi \left| \sum_l i^{-l} S_l Y_l^0 \right|^2. \quad (18.3)$$

Аналогично, амплитуда неупругого рассеяния равна

$$S_{\alpha\alpha', j} = \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)} \sum_p a_p \sum_m a_{jm}^p \tilde{\phi}_m^j(R). \quad (19)$$

В случае неупругого рассеяния ширины, конечно, уже не входят в амплитуду, но если мы введем следующие величины:

$$u_p = \left(\frac{k\hbar^2}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)|} \sum_m a_{om}^p \tilde{\phi}_m(R), \quad (19.1)$$

$$u_{pj} = \left(\frac{k_j\hbar^2}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)|} \sum_m a_{jm}^p \tilde{\phi}_m^j(R),$$

то получим

$$\sigma_{\alpha\alpha', j} = \frac{4\pi k_j}{k} |S_{\alpha\alpha', j}|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| I_{\alpha} \sum_p \frac{u_p u_{pj}}{W_p - E} \right|^2. \quad (19.2)$$

Отношение k_j/k , где k_j определяется соотношением $k_j^2 = 2M(E - \varepsilon_j)/\hbar^2$, равно отношению скорости вылетающей частицы к скорости падающей частицы, которое входит в эффективное сечение.

В случае, когда в сумме, входящей в (19.2), главный вклад дает одно слагаемое, сечение неупругого рассеяния можно записать в виде формулы Брейта — Вигнера

$$\sigma_{\alpha\alpha', j} = \frac{\pi}{k^2} |I_{\alpha}|^2 \frac{\gamma_p \gamma_{pj}}{|W_p - E|^2}. \quad (19.3)$$

1) Множитель i^{-l} появляется вследствие того, что S_l является коэффициентом при $\exp(ikr - il\pi/2)$; следовательно, множитель при $\exp(ikr)$ равен

$$S_l e^{-il\pi/2} = S_l i^{-l}.$$

(См. формулу Брейта — Вигнера, приведенную во Введении; там для величин γ мы явно указывали каналовый индекс.) В соотношении (19.3), как и раньше,

$$\gamma_p = u_p^2,$$

а

$$\gamma_{pj} = u_{pj}^2 \quad (19.4)$$

представляет собой ширину неупругого процесса.

Пусть теперь $W_p = \epsilon_p - i\alpha_p/2$, где ϵ_p и α_p вещественны, и нас интересует ширина α_p . Ее можно получить с помощью комплексно-сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} (H - W_p)\Phi^{(p)} &= 0, \\ (H - W_p^*)\Phi^{(p)*} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Умножим первое уравнение на $\Phi^{(p)*}$, а второе на $\Phi^{(p)}$. Вычитая один результат из другого и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} i\alpha_p \int_0^R \Phi^{(p)*}\Phi^{(p)} d^3\xi d^3r &= \frac{\hbar^2}{2M} \int d^3\xi \int d\Omega \times \\ &\times \left[r\Phi^{(p)*} \frac{d}{dr} (r\Phi^{(p)}) - r\Phi^{(p)} \frac{d}{dr} (r\Phi^{(p)*}) \right]_{r=R}. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись разложением (14) и граничными условиями (14.2), получаем

$$\begin{aligned} i\alpha_p \int_0^R \Phi^{(p)*}\Phi^{(p)} d^3\xi d^3r &= \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{j, m, m'} a_{jm}^{p*} a_{jm'}^p \tilde{\phi}_m^{j*}(R) \tilde{\phi}_{m'}^j(R) \times \\ &\times [f_{\alpha^+}^j(E - \epsilon_j, R) - f_{\alpha^-}^j(E - \epsilon_j, R)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Использование вронскиана (12.6) приводит к соотношению

$$\alpha_p = \frac{\hbar^2}{M} \sum_{j, m, m'} \frac{k_j a_{jm}^{p*} a_{jm'}^p \tilde{\phi}_m^{j*}(R) \tilde{\phi}_{m'}^j(R) / \phi_{\alpha^+}^{j+}(R) \phi_{\alpha^-}^{j-}(R)}{\int_0^R \Phi^{(p)*}\Phi^{(p)} d^3\xi d^3r}, \quad (22.1)$$

где сумма по j включает член с $j=0$. Правая часть соотношения (22.1) имеет тот же простой физический смысл, что и соотношение (8.2). В числителе j -е слагаемое пропорционально произведению вероятности того, что частица находится

на расстоянии R , скорости вылета частицы и соответствующего коэффициента проницаемости. Интеграл в знаменателе представляет собой вероятность того, что частица расположена во внутренней области, когда составное ядро находится в состоянии p . (Нормировка такова, что эта вероятность не обязательно равняется единице.) В области низких энергий, где все величины в правой части соотношения (22.1) являются вещественными (что будет показано позднее), соотношение (22.1) сводится к соотношению

$$\alpha_p = \sum_j \gamma_{pj}. \quad (22.2)$$

Смысл соотношения (22.2) заключается в том, что полная ширина равняется сумме парциальных ширин различных процессов.

Соотношение (18) имеет сходство с формулой Брейта — Вигнера для многих уровней. Это соотношение между амплитудой рассеяния и суммой резонансных членов является линейным, и именно поэтому оно часто оказывается более простым для использования в случае многих резонансов, чем соотношения Вигнера—Айзенбуда. Однако прежде чем его использовать в случае, в котором дают вклад только один или два уровня (что имеет место в легких ядрах в реакциях при малых энергиях), иногда появляется необходимость записать в явном виде зависимость величин γ_p от энергии (эта зависимость величин γ_p от энергии связана с зависимостью граничных условий от E) и определить их мнимую часть [величины γ_p , определяемые соотношением (17.1), являются комплексными]. Определение этих величин эквивалентно возврату к формализму Вигнера — Айзенбуда, в котором ширины являются вещественными и не зависящими от энергии. В теории возмущений Капура — Пайерлса [3] было получено приближенное соотношение, однако мы предпочитаем пользоваться процедурой, развитой Лейном¹⁾. В этой процедуре вводятся состояния $\tilde{\psi}_m^{j(0)}(\mathbf{r})$, для которых радиальные части, умноженные на r , подчиняются граничному условию, не зависящему от энергии,

$$\left[\frac{d}{dr} r \tilde{\phi}_m^{j(0)}(r) = 0 \right]_{r=R}, \quad (23)$$

¹⁾ А. М. Лане, частное сообщение.

аналогичному граничному условию (9.1). С помощью функций

$$\Phi_0^{(q)}(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{j, m} a_{jm}^{q(0)} \chi_j(\xi) \tilde{\phi}_m^j(\mathbf{r}) \quad (23.1)$$

можно определить состояния составного ядра, не зависящие от энергии. Соотношение между такими состояниями и нашими составными состояниями, зависящими от энергии, можно найти, если, как и при получении соотношения (16), мы воспользуемся теоремой Грина. При этом получаем

$$\begin{aligned} (W_p - W_q^{(0)}) \int_0^R \Phi_0^{(q)} \Phi^{(p)} d^3\xi d^3r = \\ = - \frac{\hbar^2}{2M} \int_0^R d^3\xi \int d\Omega \left\{ R \Phi_0^{(q)}(\mathbf{R}, \xi) \frac{d}{dr} [r \Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi)] \right\}_{r=R}. \end{aligned} \quad (23.2)$$

В том случае, когда имеются изолированные резонансы p и имеет место только S -рассеяние, имеем

$$\begin{aligned} (W_p - W_q^{(0)}) \int_0^R \Phi_0^{(q)} \Phi^{(p)} d^3\xi d^3r = \\ = - \frac{i\hbar^2}{2M} \sum_{j, m, n} k_j a_{jm}^{q(0)} a_{jn}^p \tilde{\phi}_m^j(R) \tilde{\phi}_n^j(R). \end{aligned} \quad (24)$$

Это соотношение является точным; однако мы воспользуемся теорией возмущений, в которой в качестве исходного нулевого приближения используем функции $\Phi^{(p)} = \Phi_0^{(p)}$. Чтобы получить поправку первого порядка к энергии, положим в подынтегральном выражении (24) $p = q$ и $\Phi_0^{(p)} = \Phi^{(p)}$. Получаем

$$W_p - W_p^{(0)} \approx - \frac{i\alpha_p}{2},$$

где мы воспользовались соотношением (22.1) и тем, что a_{jn}^p и $\tilde{\phi}_m^j$ в этом приближении являются вещественными. Следовательно, поправка первого порядка к энергии лишь добавляет мнимую часть, которая как раз равна ширине состоя-

ния $\Phi^{(p)}$ и которая в этом порядке не зависит от энергии. С помощью разложения

$$\Phi^{(p)} = \Phi_0^{(p)} + \sum c_q^p \Phi_0^{(q)} \quad (24.1)$$

мы можем получить поправку первого порядка к волновой функции:

$$(W_p - W_q^{(0)}) c_q^p = - \frac{i\hbar^2}{2M} \sum_{j, m, n} k_j a_{jm}^q{}^{(0)} a_{jn}^p \tilde{\phi}_m^j{}^{(0)}(R) \tilde{\phi}_n^j(R), \quad p \neq q. \quad (24.2)$$

Правая часть по порядку величины равна $-i\alpha_p/2$, т. е. величине, получающейся в результате аппроксимации $p=q$, или же меньше этой величины. (Знаки величин $a_{jm}^q{}^{(0)}$ и a_{jn}^p могут быть как положительными, так и отрицательными, и именно поэтому правая часть может оказаться меньше, чем $-i\alpha_p/2$. Если было бы применимо приближение случайных фаз, то правая часть была бы равна нулю.) Таким образом, мы имеем по порядку величины

$$c_q^p \sim - \frac{i\alpha_p}{W_p - W_q^{(0)}}. \quad (24.3)$$

Следовательно, в случае хорошо разделенных уровней, когда

$$|W_p - W_q^{(0)}| \gg \alpha_p, \quad (24.4)$$

коэффициенты c_q^p , а значит и мнимая часть функции $\Phi^{(p)}$ малы, причем последняя по порядку величины равна отношению ширины уровня к расстоянию между уровнями. Таким образом, с хорошей степенью точности энергетическая зависимость разного рода параметров и мнимые части ширин отсутствуют в области хорошо разделенных резонансов, так что, исключая эффекты, особенно чувствительные к поведению этих величин, такие, как „томасовский сдвиг“, мы можем ее игнорировать в большинстве случаев.

В следующем параграфе мы не будем пренебрегать ни зависимостью от энергии, ни мнимыми частями ширин; все это будет корректно учитываться, хотя часто мы будем использовать в качестве иллюстрации особенно простой случай изолированных резонансов. Учет указанных эффектов не усложнит существенно нашего рассмотрения.

3. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРЯМЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 1. Феноменологическая теория

Феноменологическая теория, лежащая в основе оптической модели, была развита в основном Фешбахом, Портером и Вайскопфом [10], а также Фридманом и Вайскопфом [18]. В этой теории амплитуда рассеяния S_α разбивается на две части:

$$S_\alpha = \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}} + (S_\alpha - \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}), \quad (25)$$

где $\langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}$ представляет собой величину S_α , усредненную по энергетическому интервалу I . Механизм усреднения более точно будет определен позднее. Среднее сечение упругого рассеяния теперь может быть представлено в виде

$$\langle \sigma_\alpha \rangle_{\text{ср.}} = |\langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}|^2 + \langle |S_\alpha - \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}|^2 \rangle_{\text{ср.}}, \quad (26)$$

поскольку перекрестный член при усреднении обращается в нуль. Хотя оба слагаемых в правой части описывают упругое рассеяние, они совершенно различны по своей физической природе.

Фридман и Вайскопф [18], которые использовали нестационарную трактовку, показали, что если построить волновой пакет с разбросом по энергии, равным ΔE , то рассеянные частицы, соответствующие средней амплитуде $\langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}$, т. е. те частицы, которые описываются первым слагаемым в правой части соотношения (26), проходят через ядро за время $\tau = \hbar/\Delta E = \hbar/I$. Это соотношение следует из принципа неопределенности, так как построенная путем усреднения амплитуда рассеяния $\langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}$ заметно изменяется только в пределах энергетического интервала I ; поскольку энергия частиц, связанная с этим рассеянием, не определена внутри этого интервала, время τ , которое частицы проводят внутри ядра, может быть определено с точностью до \hbar/I . Следовательно, если энергетический интервал I очень велик, то частицы, соответствующие средней амплитуде, проходят через ядро очень быстро. Таким образом, представляется разумным считать, что для достаточно больших интервалов I падающие частицы испытают всего несколько соударений с частицами ядра-мишени (даже если нуклон-нуклонное взаимодействие будет сравнительно сильным) и что мы можем

описывать этот процесс с помощью теории слабой связи типа оптической модели. Это рассеяние, соответствующее средней фазе, называется „собственно упругим“ рассеянием, или упругим рассеянием на потенциале („shape-elastic“). Позднее мы точно определим, каким должен быть интервал I , чтобы различные теории слабой связи, предназначенные для описания усредненного рассеяния, были верны.

С другой стороны, рассеяние на флуктуациях (которое часто называют упругим рассеянием через составное ядро), описываемое вторым слагаемым в правой части соотношения (26), изменяется в энергетических интервалах, имеющих размеры ширины состояний составного ядра (~ 1 эв при низких энергиях). Следовательно, соответствующие частицы находятся в ядре приблизительно в миллион раз дольше, чем частицы, которые отвечают „собственно упругому“ рассеянию и которым должен был бы соответствовать волновой пакет шириной ~ 1 Мэв. Если частицы, отвечающие „собственно упругому“ рассеянию, имеют время для одного-двух столкновений, то частицы, отвечающие рассеянию на флуктуациях, находятся в ядре в течение времени, достаточного для того, чтобы испытать порядка миллиона столкновений. Частицы последнего типа могут рассматриваться как частицы, образующие состояния типа, используемого в старой теории составного ядра, в то время как „собственно упругое“ рассеяние соответствует рассеянию на комплексном потенциале, мнимая часть которого описывает переход частиц из падающего пучка в долгоживущие состояния.

Будем определять комплексный потенциал $\tilde{V}(r)$ так, чтобы он давал среднюю фазу рассеяния, т. е. так, чтобы $\tilde{S}_\alpha = \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}$. Физические соображения указывают, что это является наиболее разумной процедурой. Далее мы обсудим характеристики этого потенциала $\tilde{V}(r)$ и свяжем параметры теории с нуклон-нуклонным взаимодействием.

§ 2. Теория Лейна, Томаса и Вигнера

Как указывалось во Введении, самой удивительной чертой экспериментальных данных по упругому рассеянию нейтронов является, по-видимому, появление гигантских резонансов в полном сечении в области энергии от ~ 0 до 3 Мэв. Чтобы

понять это обстоятельство, мы воспользуемся теорией Лейна, Томаса и Вигнера [19]. При рассмотрении мы будем предполагать, что комплексный потенциал $\tilde{V}(r)$, дающий среднюю амплитуду рассеяния ($\tilde{S}_\alpha = \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}$), имеет те же характеристики, что и потенциал оптической модели Фешбаха, Портера и Вайскопфа [10]; т. е. если $\tilde{V} = -U - iW$, то $U \approx 42 \text{ Мэв}$ и W лежит в интервале от 1 до 2 Мэв и радиус потенциала R равен $R \approx 1,45 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Эти параметры используются исключительно для оценок по порядку величины; их точные значения не нужны для понимания рассматриваемых здесь идей. Позднее в этом разделе мы покажем, как эти параметры связаны с нуклон-нуклонными силами.

В теории Лейна — Томаса — Вигнера [19] при $W_p \approx \epsilon_n$, т. е. при энергиях состояний составного ядра, примерно равных одночастичной энергии ϵ_n , в соотношении (17.1) для γ_p важным оказывается только слагаемое с $m = m' = n$, т. е. если W_p лежит вблизи от ϵ_n , большим оказывается только $(a_{on}^p)^2$. Придадим этим критериям более количественный характер. Для простоты будем рассматривать рассеяние s -нейтронов в области изолированных уровней, где ширины γ_p могут быть выбраны вещественными.

Амплитуда упругого рассеяния через составное ядро определяется соотношением

$$S_\alpha^{ce} \equiv S_\alpha - \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}} \quad (27)$$

Запишем ее согласно дисперсионной теории, используя тот факт, что мы выбрали \tilde{V} так, чтобы $\tilde{S}_\alpha = \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}$. Тогда

$$S_\alpha^{ce} = S_\alpha - \tilde{S}_\alpha = \frac{e^{-2ikR}}{2k} \left\{ \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E} - \sum_m \frac{\Gamma_m}{\tilde{E}_m - E} \right\}, \quad (27.1)$$

где второй член в скобках дает амплитуду рассеяния на комплексной яме, \tilde{E}_m — собственное значение для комплексной ямы, которое можно записать в виде (9.13). т. е. $\tilde{E}_m = \epsilon_m - i\beta_m/2 - iW$. (Здесь мы рассматриваем комплексный потенциал, который имеет вид прямоугольной ямы, хотя обобщение на случай, когда потенциал меняется с r , не представляет труда.) Из нашего определения следует, что среднее значение $\langle S_\alpha^{ce} \rangle_{\text{ср.}}$ равно нулю. Следовательно, сред-

нее значение величины, стоящей в скобках, должно обращаться в нуль¹⁾. Интервалы, по которым мы усредняем, всегда малы по сравнению с ширинами одночастичных резонансов, так что второй член в скобках усреднять не нужно. Можно записать

$$\left\{ \sum \frac{\gamma_p}{W_p - E} \right\}_{\text{ср.}} = P(E) + iQ(E) = \sum_m \frac{\Gamma_m}{\tilde{E}_m - E}, \quad (28)$$

где P и Q вещественны. Получаем

$$\left. \begin{aligned} P(E) &= \sum_m \frac{(\epsilon_m - E) \Gamma_m}{(\epsilon_m - E)^2 + (W + \beta_m/2)^2}, \\ Q(E) &= \sum_m \frac{\Gamma_m (W + \beta_m/2)}{(\epsilon_m - E)^2 + (W + \beta_m/2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

где предполагается, что Γ_m вещественно, что справедливо лишь в области низких энергий. Более просто выразить зависимость величины $P(E)$ от γ_p мы не можем, однако мнимую часть $Q(E)$ можно представить в более удобной форме.

Величина $\langle F(E) \rangle_{\text{ср.}}$ — среднее значение величины $F(E)$ — определяется соотношением

$$\langle F(E) \rangle_{\text{ср.}} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(E - E') F(E') dE'. \quad (29)$$

Весовая функция ρ , использовавшаяся Фешбахом, Портером и Вайскопфом [10], выбиралась в виде

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -I/2, \\ 1/I & \text{при } -I/2 < x < I/2, \\ 0 & \text{при } x > I/2, \end{cases} \quad (29.1)$$

откуда

$$\langle F(E) \rangle_{\text{ср.}} = \frac{1}{I} \int_{E-I/2}^{E+I/2} F(E') dE'.$$

¹⁾ В области низких энергий, где зависящий от k фактор $k^{-1} \exp(-2ikR)$ и коэффициенты проницаемости в выражениях для ширин сильно меняются в зависимости от энергии падающей частицы, необходимо произвести деление на эти величины перед тем, как производить усреднение. В явном виде это производится в следующем параграфе.

В интегралах такого рода возникает конечный вклад, связанный с резонансами, для которых ϵ_p лежит либо вблизи $E - I/2$, либо вблизи $E + I/2$. Этот вклад должен быть устранен, пусть даже довольно грубым способом. Физические результаты не должны зависеть от формы используемой весовой функции, если, конечно, эта форма является разумной. Оказывается удобным использовать функцию

$$\rho(E - E') = \frac{I}{\pi} \frac{1}{(E - E')^2 + I^2},$$

в случае которой

$$\left\{ \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E} \right\}_{\text{ср.}} = \frac{I}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E'} \frac{1}{(E - E')^2 + I^2} dE' = \\ = \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E - iI}, \quad (30)$$

где интеграл может быть вычислен путем интегрирования по контуру. Вообще, усредняя с помощью указанной весовой функции величину $F(E)$, которая имеет полосы только в нижней половине плоскости комплексной энергии E (такие функции часто, следуя Вигнеру, называют R -функциями), мы получаем

$$\langle F(E) \rangle_{\text{ср.}} = F(E + iI), \quad (31)$$

где I соответствует интервалу, по которому производится усреднение. Мы всегда предполагаем, что этот интервал содержит много резонансов p .

Далее, находим

$$Q(E) = \text{Im} \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E - iI}. \quad (32)$$

Определяя в интересующей нас области среднюю плотность уровней через $1/D$ (где $1/D = N$ дает число уровней на единичный интервал энергии, которое, предполагается, является большим), мы можем сумму в (32) преобразовать в интеграл

$$Q(E) = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\gamma} I}{(\epsilon_p - E)^2 + I^2} d\epsilon_p = \frac{\pi \bar{\gamma}}{D}, \quad (32.1)$$

где мы пренебрегли величиной α_p по сравнению с I и где $\bar{\gamma}$ представляет собой среднюю ширину. Функция $\pi\bar{\gamma}/D$ называется „силовой функцией“. Наше предположение о том, что уровни изолированы, эквивалентно условию $\pi\bar{\gamma}/D \ll 1$.

Наконец, находим

$$\pi \frac{\bar{\gamma}}{D} = \text{Im} \sum_m \frac{\Gamma_m}{\tilde{E}_m - E}. \quad (32.2)$$

При получении соотношения (32.3) мы воспользовались тем фактом, что среднее значение мнимой части величины, стоящей в скобках в соотношении (27.1), обращается в нуль, так как $\langle S^{ce} \rangle_{\text{ср.}} = 0$. В специальном случае, когда энергия E близка к ϵ_n , главный вклад в сумму в правой части соотношения (32.2) проистекает от n -го слагаемого при условии, что одночастичные резонансы лежат достаточно далеко друг от друга. Тогда

$$\pi \frac{\bar{\gamma}}{D} \approx \frac{\Gamma_n (W + \beta_n/2)}{(\epsilon_n - E)^2 + (W + \beta_n/2)^2}, \quad E \approx \epsilon_n. \quad (33)$$

Таким образом, при постоянных W , Γ_n и β_n силовая функция имеет лоренцовскую форму. Вклад других уровней меньше по крайней мере в $\sim W/\Delta\epsilon$ раз¹⁾, где $\Delta\epsilon$ — расстояние между одночастичными уровнями с одним и тем же моментом количества движения, т. е. между уровнями одного и того же канала α . Это расстояние по порядку величины равно U — вещественной части потенциала \tilde{V} .

Представленные здесь соображения оказываются справедливыми, если выполняется неравенство $W \ll U$, которое также является одним из критериев существования четких резонансов в \tilde{V} . В области разделенных резонансов составного ядра, как мы потом увидим, выполняется соотношение $kR \ll 1$ и поэтому максимумы силовой функции, имеющей резонансную форму, задаваемую соотношением (33), весьма просто связаны

1) Поскольку сумма в соотношении (32.2) относится только к одночастичной яме, сумму можно вычислить в явном виде для некоторых частных случаев, таких, как прямоугольная яма, и убедиться в том, что если $\epsilon \approx \epsilon_n$, то вклад от всех слагаемых с $m \neq n$ равен по порядку величины $W/\Delta\epsilon$ (см. [17], Приложение А).

с полным сечением σ_T , что можно видеть, если воспользоваться так называемой оптической теоремой

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \text{Im } S_\alpha. \quad (34)$$

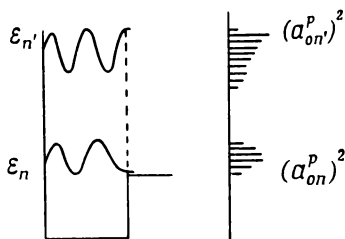
Следовательно, воспользовавшись соотношением (32.2), получаем

$$\langle \sigma_T \rangle_{\text{ср.}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \tilde{S}_\alpha \approx \frac{2\pi}{k^2} \pi \frac{\bar{\gamma}}{D}. \quad (34.1)$$

Только что рассмотренная ситуация иллюстрируется на фиг. 6, где предполагается, что расстояние между уровнями $\epsilon_{n'}$ — ϵ_n много больше W , так

что оказывается справедливой теория Лейна — Томаса — Вигнера. На фиг. 6 слева изображены одночастичные 4s- и 5s-уровни, а справа показано, что, несмотря на то, что каждый одночастичный уровень расщеплен на множество состояний составного ядра, имеется значительная вероятность найти эти состояния только внутри энергетического интервала с шириной $\sim W$, охватывающего одночастичный уровень¹⁾. Следовательно, хотя взаимодействие $V(\mathbf{r}, \xi)$ оказывается достаточно сильным для того,

чтобы так изменить волновую функцию, что каждый одночастичный уровень $\tilde{\psi}_n$ оказывается расщепленным на тысячи или даже миллионы уровней составного ядра, это взаимодействие оказывается недостаточно сильным, чтобы с заметной



Фиг. 6. Одночастичные резонансы в комплексной потенциальной яме, отвечающие s-волне (слева), и поведение квадратов коэффициентов разложения (справа).

По существу таким же является поведение силовой функции.

1) Мы рассмотрели только случай разделенных уровней, при котором a_{on}^p вещественны, так что наши рассуждения в деталях оказываются неприменимыми для более высоких одночастичных резонансов n' . Однако из указанных рассуждений видно, что $(a_{on'}^p)^2$ имеет разброс порядка W , где W — мнимая часть потенциала \tilde{V} (который зависит от скорости) при энергии возбуждения $\epsilon_{n'}$.

вероятностью привести к смеси одночастичного уровня $\psi_{n'}$, находящегося на расстоянии порядка $\epsilon_{n'} - \epsilon_n$, с состояниями составного ядра в районе соседнего одночастичного уровня ϵ_n .

Можно спросить, в какой степени условие $\epsilon_{n'} - \epsilon_n \gg W$ выполняется в реальных условиях, если для \tilde{V} взять параметры Фешбаха, Портера и Вайскопфа [10]. В качестве примера рассмотрим ядро с $A = 160$, в котором вблизи нулевой энергии экспериментально наблюдается одночастичный 4s-резонанс (см. фиг. 6). Наличие 4s-резонанса означает, что $K_n R = (7/2)\pi$, где K_n — волновое число частицы с нулевой энергией, измеренной от дна ямы. 5s-резонанс возникает при $K_n R = (9/2)\pi$. Следовательно, $\epsilon_{n'}/\epsilon_n = 81/49$, где ϵ_n и $\epsilon_{n'}$ измеряются от дна ямы. Для ямы глубиной 42 Мэв разность $\epsilon_{n'} - \epsilon_n \equiv \Delta\epsilon = 27$ Мэв. Таким образом, нет сомнения, что $W \ll \Delta\epsilon$ в области низких энергий, где W по порядку величины равно 1—2 Мэв¹).

Хотя одночастичная ширина Γ_n распределилась между тысячами или даже миллионами состояний составного ядра, некоторые черты одночастичного резонанса все же сохраняются. В частности, поскольку с хорошей степенью точности можно считать, что

$$\gamma_p \approx (a_{on}^p)^2 \Gamma_n, \quad E \approx \epsilon_n,$$

и поскольку из полноты наших двух представлений, связанных с коэффициентами a_{jm}^p , следует, что $\sum_p (a_{on}^p)^2 = 1$, получаем

$$\sum'_p \gamma_p \approx \Gamma_n,$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование производится только по состояниям составного ядра, расположенным

1) Вклад членов с $m \neq n$ в сумме в (32.2) учитывался так, что для всех m бралось одно и то же значение W вопреки духу других расчетов, где мы \tilde{V} рассматривали как потенциал, зависящий от скорости, или же, что эквивалентно, как нелокальный потенциал $\tilde{V}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, в случае которого величины W , входящие в ширины разных одночастичных уровней, оказывались совершенно различными. Однако сумма членов с $m \neq n$ должна быть одной и той же в любом методе.

вблизи ϵ_n . Другими словами, одночастичная ширина распределяется между множеством уровней, однако сумма ширин этих уровней как раз равна одночастичной ширине.

На этой стадии рассмотрения мы можем понять, почему резонансы, соответствующие состояниям составного ядра, являются столь узкими, не обращаясь к классической картине, объясняющей этот факт, исходя из энергии, распределенной среди всех нуклонов. Взаимодействие $V(\mathbf{r}, \xi)$ оказывается достаточно сильным для того, чтобы смешать большое число состояний $\chi_j(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r})$ так, чтобы возникло состояние $\Phi^{(p)}$. Поскольку вследствие нормировки функции $\Phi^{(p)}$ имеем

$$\sum_{j, m} (a_{jm}^p)^2 = 1$$

и поскольку имеется большое число слагаемых, которые дают вклад в эту сумму, то $(a_{on}^p)^2 \ll 1$ для любого заданного p и ширина резонанса, соответствующего составному состоянию, оказывается значительно меньше ширины одночастичного резонанса.

Тем не менее взаимодействие $V(\mathbf{r}, \xi)$ оказывается не столь сильным для того, чтобы полностью уничтожить основную одночастичную структуру. В частности, это взаимодействие не может смешать различные одночастичные уровни n и n' так, чтобы возникло то же состояние $\Phi^{(p)}$; оно лишь увеличивает ширину одночастичного резонанса. Следовательно, не удивительно, что некоторые черты одночастичных состояний проявляются в экспериментах, проведенных с широкими пучками.

Для полноты картины заметим, что ширина силовой функции существенным образом определяется величиной W , как показывает соотношение (33) (хотя это соотношение является хорошим приближением лишь при E , близком к ϵ_n), а не квадратным корнем из второго момента возмущающего потенциала, что, согласно утверждению Лейна, Томаса и Вигнера [19], могло бы иметь место. Блох [21], используя некоторые грубые количественные оценки, показал, что следует ожидать, что среднеквадратичный (второй) момент будет много больше ширины благодаря большому вкладу от крыльев силовой функции¹⁾.

¹⁾ На этот факт одновременно указали В. М. Агранович и А. С. Давыдов [ЖЭТФ, 32, 1429 (1957)]. — *Прим. ред.*

Использование соотношения (32) для всех энергий привело бы к бесконечному второму моменту, противоречащему его конечному выражению через потенциал¹⁾, так что (33), очевидно, оказывается несправедливым вдали от резонансной энергии.

§ 3. Рассеяние при малых энергиях²⁾

При малых энергиях, когда $(\pi\bar{\gamma}/D) \ll 1$ и $kR \ll 1$, интерпретация средних величин оказывается особенно простой. Соотношение (34.1) показывает, что в этой области среднее сечение пропорционально силовой функции. Максимумы силовой функции, даваемой соотношением (33), было бы трудно наблюдать экспериментально с помощью измерения силовой функции данного ядра при различных энергиях. Это связано с тем, что одночастичные резонансы оказываются широкими (ширина порядка $2W + \beta_n$). Поэтому, даже если одно и то же экспериментальное устройство могло бы быть использовано во всем этом широком энергетическом интервале, интерпретация оказалась бы трудной как вследствие примеси волн с более высокими моментами количества движения, так и ввиду того, что наше простое рассмотрение (применимое только в области хорошо разделенных резонансов, где $kR \ll 1$) не было бы больше справедливым. Так что при низких энергиях силовая функция обычно измеряется для различных ядер и откладывается на графике как функция массового числа A . При этом мы получаем изменение величины $E - \epsilon_n$, зависящее от KR , где K — волновое число, измеряемое от дна ямы. На фиг. 7 показаны некоторые экспериментальные данные [22]. Теоретическая кривая рассчитывалась здесь не на основе дисперсионной теории, а получалась из соотношения

$$\pi \frac{\bar{\gamma}}{D} = 2k \operatorname{Im} \tilde{S}_\alpha \quad (34.2)$$

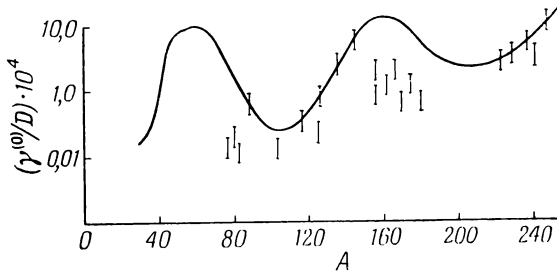
[см. (34.1)], где \tilde{S}_α вычислялось непосредственно путем интегрирования уравнения Шредингера, содержащего потенциал \tilde{V} .

¹⁾ Второй момент, безусловно, является конечным для „хороших“ потенциалов, которыми мы здесь пользуемся.

²⁾ Многие результаты этого параграфа впервые были получены Томасом [21] с помощью R -матричной теории.

Тем не менее наши формулы оказываются полезными для понимания качественного поведения в резонансной области.

Исторически первые наблюдения немонотонного поведения средних сечений с изменением A относились к измерению [23] величины, иногда называемой сечением „потенциального рассеяния“. Чтобы получить эту величину, произведем разложение по k ,



Фиг. 7. Экспериментальные значения силовой функции.

Сплошная кривая изображает типичные теоретические результаты, получаемые в модели комплексной потенциальной ямы. Измеренная ширина γ_p приводится к $\gamma^{(0)}$ с помощью соотношения $\gamma^{(0)} = \gamma_p (k_0/k)$, где k_0 — волновое число нейтрона с энергией 1 эв. В более усовершенствованной теории [22] принимаются во внимание деформации ядер, в результате чего согласие между теорией и экспериментом улучшается.

считая k малой величиной, и удержим в этом разложении два члена, т. е. представим среднее сечение $\langle \sigma_T \rangle_{\text{ср.}}$ в виде

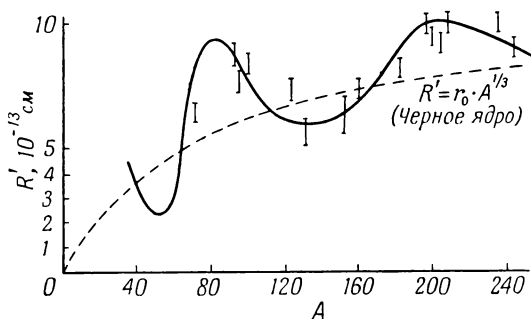
$$\langle \sigma_T \rangle_{\text{ср.}} = \left(\frac{a}{k} \right) + b; \quad (35)$$

это соотношение справедливо при малых энергиях, когда члены более высоких степеней по k пренебрежимо малы. В правой части выражения (35) первый член описывает известную зависимость сечения от скорости (именно, $1/v$). Этот член связан с силовой функцией и описывается соотношениями (34.1) и (34.2). Второй член часто выражается в виде

$$b = 4\pi (R')^2, \quad (35.1)$$

где R' интерпретируется как некоторый радиус. Наблюдаемое поведение радиуса R' в зависимости от массового числа A представлено на фиг. 8 [24].

В теории Капура — Пайерлса дать простое описание величины b оказывается трудным, поскольку мнимая часть ширины γ_p [см. (33) и дальше] имеет по k порядок, сравнимый с порядком вещественной части, так что оказывается необходимым принимать в расчет и вещественную часть. Поэтому представляется более целесообразным дать описание этой величины в формализме Вигнера — Айзенбуда. Мы



Фиг. 8. Экспериментальные данные для R' и соответствующие теоретические предсказания (сплошная линия) модели комплексной ямы.

В более усовершенствованной теории [24] принимаются во внимание деформации ядер, в результате чего улучшается согласие между теорией и экспериментом.

приведем здесь лишь краткий вывод, следуя Лейну и Линну [25], отсылая читателя за подробностями к обзору Лейна и Томаса [1].

Фактически, как и при выводе соотношения (9.5) и последующих, разложение ведется по степеням величины $\rho = kR$, поскольку при рассматриваемых энергиях величина ρ является хорошим параметром разложения. Чтобы сделать это в явном виде, запишем

$$2ik \langle S \rangle_{\text{ср.}} = e^{-2i\rho} - 1 + 2i\rho e^{-2i\rho} \langle R_{KP} \rangle_{\text{ср.}}, \quad (36)$$

где

$$R_{KP} = \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E} \quad (36.1)$$

является R -функцией Капура — Пайерлса. (Эта R -функция имеет полюсы только в нижней половине комплексной пло-

скости.) Величина χ_p представляет собой приведенную ширину

$$\chi_p = (2\rho)^{-1} \gamma_p. \quad (36.2)$$

Связь между функцией R_{KP} и R -функцией Вигнера (R_W) легко установить, если обратиться к выражениям для матрицы рассеяния в этих двух теориях:

$$R_{KP} = \frac{R_W}{1 - i\rho R_W}. \quad (37)$$

Усредняя функцию R_{KP} путем добавления величины iI к E , находим

$$\langle R_{KR} \rangle_{\text{ср.}} = \frac{\bar{R}_W}{1 - i\rho \bar{R}_W} \quad (37.1)$$

[см. стр. 306—309 обзора Лейна и Томаса (стр. 167—175 настоящей книги. — *Ред.*)], где

$$\bar{R}_W = R_W^\infty + i\pi s_W. \quad (37.2)$$

Здесь R_W^∞ и s_W являются вещественными величинами и задаются следующими соотношениями:

$$s_W = \frac{\bar{\chi}^{(0)}}{D}, \quad R_W^\infty = \int \frac{s_W(E')}{E' - E} dE', \quad (37.3)$$

где $\bar{\chi}^{(0)}$ — среднее значение величины $\chi_p^{(0)}$, т. е. ширины, определяемой с помощью граничных условий Вигнера — Айзенбуда [см. (23)]. Теперь нетрудно произвести разложение до любого требуемого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{k} \text{Im} \langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}} &= \frac{4\pi\rho}{k^2} (\pi s_W) + \\ &+ \frac{4\pi\rho^2}{k^2} [(1 - R_W^\infty)^2 - (\pi s_W)^2] + O(\rho^3). \end{aligned} \quad (38)$$

Левая часть соотношения (38), согласно (34.1), равняется $\langle \sigma_T \rangle_{\text{ср.}}$. Теперь без труда можно найти величины a и b :

$$a = \frac{4\pi\rho}{k^2} (\pi s_W), \quad (38.1)$$

$$b = 4\pi\rho^2 [(1 - R_W^\infty)^2 - (\pi s_W)^2].$$

В наименьшем порядке по ρ имеем $2\rho\pi s_W = \pi\bar{\gamma}/D$, и, оставляя только член с a , видим, что соотношение (38) сводится к полученному нами ранее соотношению (34.1).

Этот вывод не зависит от частного вида модели, хотя модель, введенная в последнем параграфе, оказывается полезной для понимания качественного поведения величин s_W и R_W^∞ в реальном физическом случае. В соотношении (33) мы уже указали на резонансное поведение силовой функции. Из равенств (37.3) легко видеть, что, поскольку силовая функция симметрична относительно своего максимума, R_W^∞ равняется нулю в этом максимуме, который находится при значении энергии, равном вещественной части одночастичной резонансной энергии. Поэтому R_W^∞ отрицательно с одной стороны максимума и положительно — с другой, так что можно понять качественное поведение величины R' , показанное на фиг. 8.

Теоретические кривые на фиг. 7 и 8, показанные сплошными линиями, получены путем расчета \tilde{S}_α и последующего использования соотношения $\langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}} = \tilde{S}_\alpha$.

В более ранних работах членом $(\pi s_W)^2$ обычно пренебрегали. Однако, как показал Сет [26], вблизи одночастичного резонанса при $A=50$ величина s_W оказывается заметной величиной и член $(\pi s_W)^2$ оказывается существенным при анализе экспериментальных данных для $A=50$. В противном случае величина $(1 - R_W^\infty)$ оказывается слишком большой.

Приведенные рассуждения являются типичным примером проблем, в которых формализм Вигнера — Айзенбуда оказывается плодотворным. Преимуществом этой теории является то обстоятельство, что мы имеем дело с вещественными величинами, в которых зависимость от энергии является явной.

Возвращаясь к формализму Капура — Пайерлса, установим в рассматриваемой энергетической области в низшем порядке по k соотношение между средним сечением образования составного ядра и величиной W . Среднее сечение образования составного ядра определяется следующим образом:

$$\langle \sigma_c \rangle_{\text{ср.}} \equiv \langle \sigma_T \rangle_{\text{ср.}} - \sigma_{se}$$

где σ_{se} представляет собой сечение „собственно упругого“ рассеяния:

$$\sigma_{se} = 4\pi |\langle S_\alpha \rangle_{\text{ср.}}|^2 = 4\pi |\tilde{S}_\alpha|^2.$$

Использование соотношения между $\langle \sigma_T \rangle_{\text{ср.}}$ и $\text{Im } \tilde{S}_\alpha$, задаваемой формулой (34.1), приводит к соотношению

$$\langle \sigma_c \rangle_{\text{ср.}} = 4\pi \left\{ \frac{1}{k} \text{Im } \tilde{S}_\alpha - |\tilde{S}_\alpha|^2 \right\}. \quad (38.2)$$

Используя для \tilde{S}_α резонансное разложение [полученное из (7) путем замены E_m на \tilde{E}_m] и вспоминая, что Γ_m является величиной порядка kR , найдем в низшем порядке по kR :

$$\langle \sigma_c \rangle_{\text{ср.}} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_m \frac{W\Gamma_m/2}{(E - \epsilon_m)^2 + W^2}, \quad (38.3)$$

где мы видим, что в этом приближении „собственно упругое“ рассеяние не дает никакого вклада. Чтобы интерпретировать эту формулу, рассмотрим $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ — решение уравнения Шредингера в комплексной яме. Поскольку мы имеем дело с s -волнами, мы можем функцию ϕ_α (радиальную часть функции ψ_α , умноженную на r) разложить по собственным функциям $\tilde{\phi}_m$. Коэффициенты разложения уже были нами получены [см. (4.3)]. Таким образом, имеем

$$\phi_\alpha = \frac{\hbar^2}{2M} e^{-ikR} \sum_m \frac{\tilde{\phi}_m(R) \tilde{\phi}_m(r)}{\tilde{E}_m - E}. \quad (38.4)$$

Эта формула ясно указывает на резонансное поведение величины \mathcal{P}_α

$$\mathcal{P}_\alpha \equiv \int_0^R |\phi_\alpha(r)|^2 dr = \left(\frac{\hbar^2}{2M} \right)^2 \sum_m \frac{[\tilde{\phi}_m(R)]^2}{(E - \epsilon_m)^2 + W^2}, \quad (39)$$

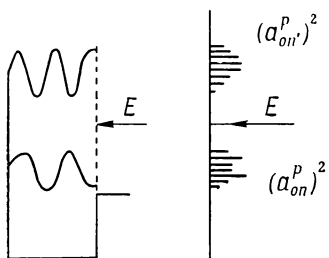
представляющей собой вероятность нахождения частицы внутри ядра, волновая функция которого асимптотически имеет единичную амплитуду. Здесь мы опустили величину β_m , которая на порядок (по kR) меньше, чем W . Ясно, что

$$\langle \sigma_c \rangle_{\text{ср.}} = \frac{8\pi M}{\hbar^2 k} \mathcal{P}_\alpha W. \quad (40)$$

Иными словами, только что определенное среднее сечение образования составного ядра пропорционально произведению поглощения W и вероятности \mathcal{P}_α нахождения нуклона внутри ядра. В некотором смысле величину W мы могли бы интерпретировать классически как поглощение на один нуклон ядра.

§ 4. Простой случай рассеяния

Тесную взаимосвязь между нашей детальной картиной, в которой все полностью описывается с помощью функций $\Phi^{(p)}$, и упрощенной моделью комплексной ямы можно понять, если мы рассмотрим особенно простой случай [27, 28], когда энергия падающей частицы лежит между энергиями одночастичных резонансов. Предположим (см. фиг. 6), что энергия падающей частицы лежит между ϵ_n и $\epsilon_{n'}$, как показано на фиг. 9. Амплитуда упругого рассеяния, обусловленного нижней группой уровней, равна



Фиг. 9. Положение энергии нейтрона относительно одночастичных резонансов в нашем „простом случае рассеяния“ (схематическое изображение).

$$(S_\alpha)_n = \frac{e^{-2ikR}}{2k} \sum_p \frac{(a_{on}^p)^2 \Gamma_n}{W_p - E} - \frac{\sin kR}{k} e^{-ikR}, \quad (41)$$

где индекс n у S_α показывает, что это есть та амплитуда S_α , которая получилась бы при возбуждении только нижней группы уровней. При выводе соотношения (41) мы воспользовались моделью, развитой в предыдущем разделе, и в выражении для γ_p опустили члены, содержащие $a_{on'}^p$, учитывая лишь уровни составного ядра, лежащие в окрестности ϵ_n .

Величины W_p имеют разброс вокруг ϵ_n в интервале W . Следовательно, если $E - \epsilon_n \gg W$, то в знаменателе соотношения (41) можно с хорошей степенью точности положить величину $E - W_p$ равной $E - \epsilon_n$. В этом приближении суммирование по p приводит к выражению

$$(S_\alpha)_n = \frac{e^{-2ikR}}{2k} \frac{\Gamma_n}{\epsilon_n - E} - \frac{\sin kR}{k} e^{-ikR}, \quad (42)$$

которое совпадает с величиной вклада в S_a от n -го резонанса, вычисленного в модели комплексной ямы при условии, что в знаменателе можно пренебречь величиной W по сравнению с $E - \epsilon_n$.

Следовательно, если разброс величины γ_p около одночастичной резонансной энергии невелик, то вся совокупность величин γ_p ведет себя просто как одночастичный резонанс. Это обстоятельство связано с принципом спектроскопической стабильности, из которого следует, что, хотя вследствие приложенного возмущения волновые функции могут измениться самым существенным образом, некоторые простые характеристики оказываются теми же, что и в невозмущенной системе.

Однако мы слишком упростили задачу тем, что пренебрегли ширинами γ_p , расположенными вблизи E , поскольку γ_p не концентрируется так сильно около энергий ϵ_n и ϵ_n' , как мы это только что предполагали. Тем не менее наши аппроксимации оказываются вполне корректными в отношении „собственно упругого“ рассеяния. Пренебрежение близкими уровнями оказалось эквивалентным неучету упругого рассеяния через составное ядро. Теперь мы перейдем к более строгой теории, позволяющей рассмотреть также и близкие уровни. Такого рода трактовка представляется совершенно необходимой, если мы хотим рассмотреть энергии E , лежащие в области одночастичного резонанса.

§ 5. Рассеяние в формализме функций Грина

Для определения потенциала $\tilde{V}(r)$ удобно выразить Sc^e через функции Грина, как это было сделано Блохом [29]. Изящный формализм Блоха является значительно более общим, чем наш формализм; путем выбора того или иного конкретного представления Блох смог получить как формулы Капура — Пайерлса, так и Вигнера — Айзенбуда. Однако наш более простой формализм оказывается вполне достаточным для того, чтобы проиллюстрировать рассматриваемые здесь вопросы. Мы опять ограничимся рассмотрением s -нейтронов; обобщение наших результатов на другие случаи представляется очевидным.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi) = |p\rangle = \langle p|, \quad \chi_j(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r}) = |jm\rangle = \langle jm| \quad (43)$$

и

$$\langle p|jm\rangle = \int_0^R \Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi) \chi_j(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r}) d^3r d^3\xi = a_{jm}^p.$$

Никакого различия между $|p\rangle$ и $\langle p|$ не делается, поскольку в этой теории разложения и условия ортогональности содержат только сами волновые функции и не содержат комплексно-сопряженных функций, не считая тривиальных изменений в угловых частях волновых функций, о которых упоминалось в § 2 этого раздела.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} S_\alpha^{ce} &= \frac{e^{-2ikR}}{2k} \left\{ \sum_p \frac{\gamma_p}{W_p - E} - \sum_m \frac{\Gamma_m}{\tilde{E}_m - E} \right\} = \\ &= \frac{\hbar^2}{2M} e^{-2ikR} \sum_{m, m'} \left\{ \sum_p \langle p|om\rangle \langle p|om'\rangle \langle p| \frac{1}{H-E} |p\rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle om| \frac{1}{\tilde{H}-E} |om'\rangle \right\} \tilde{\phi}_m(R) \tilde{\phi}_{m'}(R) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2M} e^{-2ikR} \sum_{m, m'} \left\{ \langle om| \frac{1}{H-E} |om'\rangle - \langle om| \frac{1}{\tilde{H}-E} |om'\rangle \right\} \times \\ &\quad \times \tilde{\phi}_m(R) \tilde{\phi}_{m'}(R), \quad (44) \end{aligned}$$

где \tilde{H} получается из H путем замены $V(\mathbf{r}, \xi)$ на \tilde{V} :

$$H = \tilde{H} + [V(\mathbf{r}, \xi) - \tilde{V}(\mathbf{r})] = \tilde{H} + \delta V. \quad (44.1)$$

Используя тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{H-E} &= \frac{1}{\tilde{H}-E} - \frac{1}{\tilde{H}-E} (V - \tilde{V}) \frac{1}{\tilde{H}-E} + \\ &+ \frac{1}{\tilde{H}-E} (V - \tilde{V}) \frac{1}{H-E} (V - \tilde{V}) \frac{1}{\tilde{H}-E}, \quad (45) \end{aligned}$$

которое легко проверяется путем умножения обеих частей тождества на $H - E$, получаем

$$S_{\alpha}^{ce} = -\frac{\hbar^2}{2M} e^{-2ikR} \sum_{m, m'} \frac{1}{\tilde{E}_m - E} \frac{1}{\tilde{E}_{m'} - E} \times \\ \times \left\{ \langle om | V - \tilde{V} | om' \rangle - \langle om | (V - \tilde{V}) \frac{1}{H - E} (V - \tilde{V}) | om' \rangle \right\} \times \\ \times \tilde{\phi}_m(R) \tilde{\phi}_{m'}(R). \quad (46)$$

Воспользовавшись теперь разложением (38.4), получим S_{α}^{ce} в удобной форме

$$S_{\alpha}^{ce} = -\frac{2M}{\hbar^2} \left\{ \langle o\alpha | V - \tilde{V} | o\alpha \rangle - \right. \\ \left. - \langle o\alpha | (\tilde{V} - V) \frac{1}{H - E} (V - \tilde{V}) | o\alpha \rangle \right\}, \quad (47)$$

где ψ_{α} представляет собой волновую функцию, описывающую рассеяние и определяемую выражением (11). Дальнейшее повторное разложение выражения $1/(H - E)$ с использованием (45) привело бы нас к борновскому разложению для S_{α}^{ce} по степеням возмущающего потенциала δV . Соотношение (47) можно было бы получить и непосредственно из теории рассеяния без обращения к дисперсионной теории.

Подстановка единичного оператора $\sum_p |p\rangle \langle p|$ во второе слагаемое в правых частях выражений (46) и (47) позволяет заменить $(H - E)^{-1}$ величиной $(W_p - E)^{-1}$; при этом указывается, что все полюса этого слагаемого лежат в нижней половине комплексной плоскости энергии. Следовательно, мы можем усреднить это слагаемое по энергии с помощью замены энергии E на величину $E + iI$, следуя выкладкам, которые были проделаны при выводе соотношений (30) и (31):

$$\langle S_{\alpha}^{ce}(E) \rangle_{\text{cp.}} = S_{\alpha}^{ce}(E + iI). \quad (48)$$

Комплексный потенциал $\tilde{V}(r)$ определяется из условия, что $\tilde{S}_{\alpha}(E) = \langle S_{\alpha}(E) \rangle_{\text{cp.}}$, или из условия, что $\langle S_{\alpha}^{ce}(E) \rangle_{\text{cp.}} = 0$. Эти условия будут выполнены, если мы потребуем

$$\langle o | V - \tilde{V} | o \rangle - \langle o | (V - \tilde{V}) \frac{1}{H - E - iI} (V - \tilde{V}) | o \rangle = 0. \quad (49)$$

Таким образом, мы можем найти оптический потенциал $\tilde{V}(r)$, который будет давать среднюю фазу рассеяния. Однако на этой стадии мы получили не очень много, поскольку наш формализм совершенно не указывает на то, что \tilde{V} с энергией меняется медленно и монотонно; использование потенциала \tilde{V} оказывается выгодным благодаря тому эмпирическому факту, что при изменении энергии и массового числа A он меняется медленно и регулярно. Попробуем теперь, насколько это возможно, продемонстрировать, что потенциал \tilde{V} имеет только что указанные свойства. Чтобы это сделать, установим связь между параметрами потенциала \tilde{V} и параметрами нуклон-нуклонных сил.

§ 6. Теория возмущений первого рода

В теории возмущений, которая будет здесь развита, необходимо получить разложение по степеням $\delta V = V(\mathbf{r}, \xi) - \tilde{V}(r)$, поскольку мы желаем найти выражения для величин, которые не содержат сложных функций $\Phi^{(p)}$. Тот факт, что ширины состояний, описываемых функциями $\Phi^{(p)}$, малы по сравнению с ширинами одночастичных состояний, описываемых функциями $\tilde{\psi}_m$, которые вместе с χ_j мы будем использовать в качестве невозмущенных волновых функций, указывает на то, что в разложении функции $\Phi^{(p)}$ по $\chi_j(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r})$ [см. (14)] мы должны брать большое число слагаемых. Следовательно, если в качестве нулевого приближения взять $\chi_0(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r})$, то разложение функции $\Phi^{(p)}$ в теории возмущений должно сходиться медленно, если оно вообще сходится. Однако разложения для средней фазы содержат менее жесткие критерии сходимости, чем критерии сходимости для разложения волновых функций, на что указывают физические соображения, приведенные в § 1 этого раздела. Мы сформируем эти критерии, следуя методу Брауна, де-Доминисиса и Лэнжера [30].

Определим величину \mathcal{W}^0 :

$$\tilde{V} = \bar{V} - \mathcal{W}^0, \quad (49.1)$$

где

$$\bar{V} \equiv \langle o | V | o \rangle. \quad (49.2)$$

Уравнение (49), определяющее \tilde{V} , принимает вид

$$\langle o | (V - \tilde{V} + \mathcal{W}^\rho) \left[1 - \frac{1}{H - E - iI} (V - \tilde{V} + \mathcal{W}^\rho) \right] | o \rangle = 0. \quad (49.3)$$

Уравнение (49.3) можно разрешить относительно \mathcal{W}^ρ [31]. Положим для краткости

$$e = H - E - iI$$

и

$$\bar{e} = \bar{H} - E - iI = e - (V - \bar{V}). \quad (49.4)$$

Тогда (49.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle o | (e - \bar{e} + \mathcal{W}^\rho) \left[1 - \frac{1}{e} (e - \bar{e} + \mathcal{W}^\rho) \right] | o \rangle = 0 = \\ & = \langle o | (e - \bar{e} + \mathcal{W}^\rho) \frac{1}{e} (\bar{e} - \mathcal{W}^\rho) | o \rangle = \langle o | (e - \bar{e}) \frac{1}{e} \bar{e} | o \rangle - \\ & - \langle o | (e - \bar{e}) \frac{1}{e} | o \rangle \mathcal{W}^\rho + \mathcal{W}^\rho \langle o | \frac{1}{e} (\bar{e} - \mathcal{W}^\rho) | o \rangle. \end{aligned} \quad (49.5)$$

Поскольку $H_\xi | o \rangle = 0$, то в последнем члене множитель $(\bar{e} - \mathcal{W}^\rho)$ коммутирует с $| o \rangle$, и его можно перенести в правую часть. Соотношения (45) — (49) приводят к равенству

$$\langle o | \frac{1}{e} | o \rangle = \langle o | \frac{1}{\bar{e} - \mathcal{W}^\rho} | o \rangle, \quad (49.6)$$

из которого видно, что последнее слагаемое в (49.5) равно \mathcal{W}^ρ . Мы можем затем разрешить уравнение относительно \mathcal{W}^ρ :

$$\mathcal{W}^\rho = \frac{1}{1 - \langle o | (V - \bar{V}) \frac{1}{e} | o \rangle} \langle o | (V - \bar{V}) \frac{1}{e} (V - \bar{V}) | o \rangle, \quad (49.7)$$

где для симметрии мы к последнему сомножителю добавили член

$$\langle o | (e - \bar{e}) \frac{1}{e} e | o \rangle.$$

Этот член равен нулю, поскольку $\langle o | e - \bar{e} | o \rangle = 0$. Соотношение (49.7) эквивалентно соотношению

$$\mathcal{W}^\rho = \langle o | (V - \bar{V}) \frac{1}{e - \Lambda_0 (V - \bar{V})} (V - \bar{V}) | o \rangle, \quad (50)$$

где

$$\Lambda_0 = | o \rangle \langle o |, \quad (50.1)$$

что можно проверить путем разложения по степеням $(V - \bar{V})/e$. Соотношение (50) можно получить и без использования в качестве промежуточного шага теории возмущений [32, 33]. Для эффективного использования теории возмущений оказывается более целесообразным считать, что знаменатель выражения (50) равен $\bar{e} + (1 - \Lambda_0)(V - \bar{V})$, поскольку разложение производится по степеням $(1 - \Lambda_0)(V - \bar{V})$.

Когда мы имеем дело с соотношением (50), оказывается более удобным использовать для внешней частицы представление, диагональное относительно $T + \bar{V}$, а не $T + \tilde{V}$. Важность рассмотрения величины \mathcal{W}^ρ вытекает из того факта, что это выражение содержит всю мнимую часть потенциала \tilde{V} ; вклад величины \mathcal{W}^ρ в вещественную часть потенциала \tilde{V} оказался бы существенным лишь в том случае, если бы мы попытались вычислить эту величину с большой точностью. В простом случае, когда \tilde{V} выбирается в виде прямоугольной ямы, замена мнимой части потенциала \tilde{V} на величину iW не меняет собственных функций, а лишь сдвигает положения резонансов на iW . Таким образом, новые собственные значения энергии равны

$$E_m = \epsilon_m - \frac{i\beta_m}{2}. \quad (50.2)$$

Рассмотрим теперь собственные функции и собственные значения оператора

$$\mathcal{H} = H - \Lambda_0(V - \bar{V}). \quad (51)$$

Обозначим их через Ω_p и W'_p :

$$\mathcal{H} \Omega_p = W'_p \Omega_p. \quad (51.1)$$

Поскольку Ω_p не очень сильно отличается от $\Phi^{(p)}$, мы можем величину $-\Lambda_0(V - \bar{V})$ рассматривать как малое возмущение. Таким образом, полагаем

$$\Omega_p = \Phi^{(p)} + \delta\Omega_p \quad (52)$$

и

$$\delta\Omega_p = \sum_n a_p^n \Phi^{(n)}.$$

В нулевом приближении имеем

$$W'_p = W_p. \quad (52.1)$$

Если, как и при выводе соотношения (16), воспользоваться теоремой Грина и предположить¹⁾, что Ω_p удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $\Phi^{(p)}$, то получим соотношение

$$\int_0^R (\Phi^{(n)} \mathcal{H} \Omega_p - \Omega_p \mathcal{H} \Phi^{(n)}) r^2 dr = 0 = \\ = (W_p - W_n) a_p^n + \sum_m \langle p | (V - \bar{V}) | om \rangle \langle om | n \rangle, \quad (53)$$

где в правой части $W'_p = W$, $\Omega_p = \Phi^{(p)}$, поскольку нам необходимо вычислить a_p^n только в нулевом приближении. Используя соотношение

$$\langle p | V - \bar{V} | om \rangle = \langle p | H - \bar{H} | om \rangle = \\ = \left(W_p - \varepsilon_m + \frac{i\beta_m}{2} \right) \langle p | om \rangle, \quad (54)$$

получаем

$$a_p^n = \sum_m \frac{(W_p - \varepsilon_m + i\beta_m/2)}{W_n - W_p} \langle p | om \rangle \langle om | n \rangle. \quad (55)$$

Оценивая по порядку величины, имеем

$$\langle p | om \rangle \langle om | n \rangle \beta_m \sim \langle p | om \rangle^2 \beta_m \sim \gamma_p,$$

а для „гигантского“ резонанса

$$W_p - \varepsilon_m \leq W.$$

Вследствие этого коэффициенты a_p^n оказываются большими, если только

$$(W_p - W_n) \sim \frac{M\gamma_p}{\Gamma_m},$$

1) В действительности функции Ω_p подчиняются граничным условиям, несколько отличным от условий, которым подчиняются $\Phi^{(n)}$, поскольку, как это явствует из (51), функция Ω_p не содержит компонент χ_0 , которые исключаются с помощью оператора Λ_0 . Однако такие компоненты $\Phi^{(n)}$ не дают никакого вклада в левую часть соотношения (53), поскольку они ортогональны Ω_p , так что соотношение (53) выполняется.

и, таким образом, благодаря малости величины γ_p только несколько соседних состояний Φ оказываются в результате возмущения примешанными к каждому из состояний Ω_p .

Функции Ω можно разложить по χ и ψ таким же образом, как и $\Phi^{(p)}$:

$$\Omega_p = \sum_{j, m} b_{jm}^p \chi_{j,j}(\xi) \tilde{\psi}_m^j(\mathbf{r}). \quad (55.1)$$

Существенное различие между правой частью соотношения (55.1) и правой частью разложения для функций $\Phi^{(p)}$ [см. (14)] заключается в том, что правая часть соотношения (55.1) не содержит членов с $j=0$. Эти члены были устранены с помощью оператора Λ_0 , так что собственные функции оператора \mathcal{H} образуют полную систему в пространстве, ортогональном χ_0 .

Поскольку собственные значения и собственные функции оператора \mathcal{H} лишь немного отличаются от собственных значений и собственных функций оператора H , за исключением того, что собственные функции оператора \mathcal{H} не содержат компонент по $|o\rangle$, наши соображения о распределении коэффициентов a_{jm}^p оказываются столь же хорошо применимыми и к распределению коэффициентов b_{jm}^p . Однако представляется существенным сохранить Λ_0 в знаменателе соотношения (50), т. е. не заменять Ω_p на $\Phi^{(p)}$ ¹⁾, поскольку ввиду такой замены состояния $|o\rangle$ могли бы выступать в качестве промежуточных состояний в разложении, которое могло бы дать большой ложный вклад. Сохранение Λ_0 в соотношении (50) связано с необходимостью устранения незамкнутых графиков в разложениях бракнеровского типа.

Теперь мы можем рассмотреть критерии справедливости теории возмущений. Матричный элемент можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle on | \mathcal{W}^c(E) | on \rangle &= \\ &= \langle on | V - \bar{V} | p' \rangle \frac{1}{W_{p'} - E - iI} \langle p' | V - \bar{V} | on \rangle, \end{aligned} \quad (56)$$

¹⁾ На это обстоятельство обратил наше внимание А. Лейн. При частичном суммировании Блоха [20] это учитывается точно.

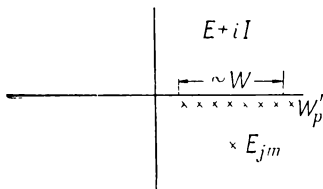
где собственные функции оператора \mathcal{H} обозначаются через $|p'\rangle$. В разложении в ряд теории возмущений, имеющем вид

$$\mathcal{W}^\circ(E) = \langle o | (V - \bar{V}) \frac{1}{H - E - iI} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[(1 - \Lambda_0)(V - \bar{V}) \frac{1}{H - E - iI} \right]^n (V - \bar{V}) | o \rangle, \quad (57)$$

член низшего порядка можно записать в форме

$$\langle on | \mathcal{W}^\circ(E) | on \rangle \approx \sum_{j,m} \frac{\langle on | V - \bar{V} | jm \rangle \langle jm | V - \bar{V} | on \rangle}{E_{jm} - E - iI}. \quad (58)$$

Тот же самый результат может быть получен путем замены функции $|p'\rangle$ в соотношении (56) на $\sum_{j,m} |jm\rangle \langle jm | p'\rangle$ и $W_{p'}$ на E_{jm} . Это приближение выполняется при больших I , поскольку коэффициенты $\langle jm | p'\rangle$ будут велики по соображениям, высказанным в предыдущем параграфе, если только $W_{p'} - \epsilon_{jm} \leq W$. Эта ситуация представлена на фиг. 10. На комплексной плоскости энергии состояние $|jm\rangle$ имеет заметную вероятность быть найденным в состояниях $|p'\rangle$, расположенных в области шириной W . При переходе от (56) к приближенному выражению (58) мы на плоскости энергии заменяем расстояния $E + iI - W_{p'}$ на одно и то же расстояние $E + iI - E_{jm}$. Такая замена оправдана, если $|E + iI - E_{jm}| \gg W$; причем W дает величину разброса в $W_{p'}$, как это показано на фиг. 10. В случае, наименее благоприятном для этого критерия, именно, когда $E = \epsilon_{jm}$ (см. фиг. 10), мы удовлетворим этому критерию, если положим I достаточно большим так, чтобы выполнялось условие $I \gg W$.



Ф и г. 10. Положение полюсов на комплексной плоскости энергии.

Усредненная по интервалу энергий I амплитуда рассеяния получена путем нахождения ее значения при комплексном значении энергии, равном $E + iI$.

Этот вывод можно было бы сформулировать следующим образом: расчет только средней фазы означает, что мы можем рассчитывать ее при комплексной энергии $\mathcal{E} = E + iI$. При-

ближение, в котором учитывается только первый член разложения, оказывается, очевидно, тем лучше, чем больше $\mathcal{E} - E_{jm}$. В простом рассмотренном ранее случае рассеяния (в действительности в этом случае мы производили аппроксимацию на другой стадии расчета) большое значение для расстояния между \mathcal{E} и одночастичным резонансом получалось вследствие того, что мы брали E (вещественную часть величины \mathcal{E}) достаточно большой. Тот же самый результат может быть получен путем сдвига \mathcal{E} вверх на комплексной плоскости, что будет означать усреднение по более широким интервалам.

Таким образом, мы математически сформулировали физические соображения, высказанные в § 1 этого раздела. Мы видели, что время, которое частицы проводят в ядре и которое соответствует средней фазе, уменьшается, когда интервал I , по которому производится усреднение, возрастает. Это соображение показывает, что чем больше I , тем быстрее сходится ряд (57). Действительно, этот ряд по степеням δV можно интерпретировать как разложение по числу столкновений, которое испытывает падающая частица с нуклонами ядра-мишени. Чем больше I , тем быстрее частица проходит через ядро и тем меньше столкновений она испытывает.

Такого рода разложение для величины \mathcal{W}^c было выполнено Блохом [29]. Произведя разложение, он делает предположение, что знаки величин $\langle kl | \delta V | jm \rangle$ имеют случайное распределение. Мы, однако, не делаем такого рода предположения и позднее покажем, что оно оказывается несправедливым. Тем не менее ряд оказывается сходящимся и без такого предположения при условии, что I достаточно велико.

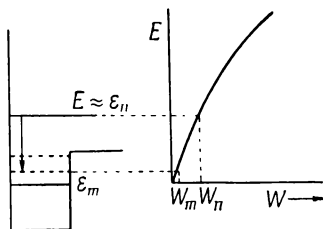
Может оказаться, что условие $I \gg W$ трудно осуществимо. Здесь существенным пунктом является то обстоятельство, что величина W , которую мы должны использовать, соответствует состоянию $|jm\rangle$, отвечающему ядру, возбужденному до энергии ϵ_j , и частице в потенциальной яме, имеющей энергию, равную, грубо говоря, $E - \epsilon_j$. Это иллюстрируется на фиг. 11. Из всего ранее сказанного мы можем предположить, что энергия не меняется в пределах ширины состояния $|jm\rangle$. Следовательно, имеем $E \approx \epsilon_j + \epsilon_m$. Шириной состояния $|j\rangle$, которое является истинным состоянием составного ядра, мы можем пренебречь по сравнению с шириной одночастичного возбужденного состояния $|m\rangle$. Однако значе-

ние W , соответствующее состоянию $|m\rangle$, много меньше значения W , соответствующего состоянию $|n\rangle$, поскольку $|m\rangle$ отвечает энергии вблизи дна ямы, а величина W является быстро возрастающей функцией энергии, как показано на фиг. 11. Приняв для W квадратичную зависимость, даваемую простыми теориями (о чем будет сказано позже), получим

$$W_m = \left(\frac{E - \epsilon_j}{E} \right)^2 W_n, \quad (59)$$

где величине W в левой части равенства мы придали нижний индекс m с тем, чтобы показать, что эта величина относится к состоянию $|m\rangle$, и обозначили через W_n величину W , относящуюся к $|n\rangle$. Другими словами, ширина состояния, в которое переходит нуклон из одночастичного возбужденного состояния, меньше ширины исходного одночастичного состояния.

Обычно состояние j является высоколежащим возбужденным состоянием, поскольку число имеющихся состояний на 1 Мэв возрастает экспоненциально с энергией возбуждения¹⁾. В этом случае имеем $W_m \ll W_n$. Конечно, более высоколежащие возбужденные состояния имеют также более сложную структуру, так что матричные элементы, описывающие возбуждение A частиц, становятся меньше с ростом энергии возбуждения. В следующем параграфе этого раздела будет показано, что отношение $(E - \epsilon_j)/E$ стремится к $\sim 1/3$, так что $W_m/W_n \sim 1/9$. Однако в случае легко деформируемых ядер возникают большие матричные элементы, связанные с низколежащими коллективными состояниями j .



Фиг. 11. Изменение поглощения (W) при изменении энергии одночастичного возбуждения.

1) Энергия возбуждения является ограниченной величиной, поскольку частица, первоначально находящаяся в возбужденном состоянии, не может перейти в состояние, которое уже занято. Это обстоятельство не согласуется с тем, что мы пренебрегли антисимметризацией, которая, по-видимому, не представляет особой трудности.

Из изложенного следует, что неравенства

$$W_m < I < W_n \quad (60)$$

обычно могут быть удовлетворены, хотя W_m меньше W_n лишь в некоторое число (порядка нескольких единиц) раз, а не на несколько порядков. Когда эти неравенства удовлетворены, могут быть вычислены средние величины по интервалу, который выбирается достаточно большим для того, чтобы результаты, полученные по теории возмущений, были сходящимися, но достаточно малыми для того, чтобы мы могли также получить информацию о форме одночастичного резонанса с шириной $\sim W_n$. Действительно, пренебрежение изменением $|n\rangle$ и других величин в выражениях для различных средних вынуждает нас усреднять по интервалу, меньшему W_n .

Эти же соображения применимы с небольшими изменениями и к случаю неупругих процессов, связанных с возбуждением низколежащих состояний. В этом случае амплитуда перехода имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\alpha\alpha', j} = & -\frac{2M}{\hbar^2} \left\{ \langle j\alpha' | V - \tilde{V} | \alpha\alpha' \rangle - \right. \\ & \left. - \langle j\alpha' | (V - \tilde{V}) \frac{1}{H - E} (V - \tilde{V}) | \alpha\alpha' \rangle \right\} = \\ = & -\frac{\hbar^2}{2M} e^{-l(k+k_j)R} \sum_{m, m'} \frac{1}{\tilde{E}_m - E} \frac{1}{\tilde{E}_{m'} - E} \times \\ & \times \left\{ \langle jm' | V - \tilde{V} | om \rangle - \langle jm' | (V - \tilde{V}) \frac{1}{H - E} \times \right. \\ & \left. \times (V - \tilde{V}) | om \rangle \right\} \tilde{\phi}_m(R) \tilde{\phi}_{m'}^j(R), \quad (61) \end{aligned}$$

где предполагается, что j относится к низколежащим возбужденным состояниям. Для расчета $\langle S_{\alpha\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}}$ может быть использована теория возмущений, поскольку состояния, в которые распадаются состояния m и m' , имеют, вообще говоря, значительно меньшую энергию и, следовательно, меньшую ширину. Это приводит в первом приближении к результату

$$\langle S_{\alpha\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}} \approx -\frac{2M}{\hbar^2} \langle j\alpha' | V - \bar{V} | \alpha\alpha' \rangle, \quad (62)$$

который может быть широко использован при расчетах, связанных с прямыми процессами. Этот результат в точ-

ности совпадает с результатом, получающимся в борновском приближении, т. е. для случая, когда учитывается только единственный член разложения по δV , а начальным и конечным состояниями являются состояния, искаженные комплексным потенциалом. Такого рода приближение слабой связи применимо только к средней фазе и только в случае, когда она усредняется по большому энергетическому интервалу.

§ 7. Теория возмущений второго рода

Соотношение (62) является важным в том отношении, что оно оправдывает использование теории возмущений (в обычной терминологии — борновского приближения с искаженными волнами) при расчетах прямых процессов. В § 6 мы нашли также, что средняя амплитуда упругого рассеяния определяется с помощью величины $\tilde{V} = \bar{V} - \mathcal{W}^2$, где в низшем приближении величина \mathcal{W}^2 задавалась соотношением (58). Последнее представляется весьма интересным, но оно не приспособлено для расчета величины \mathcal{W}^2 , поскольку оно все еще содержит довольно сложные ядерные состояния $\chi_j(\xi)$. Поэтому мы воспользуемся разложением по малому параметру, аналогичным разложению Бракнера, Идена и Френсиса [34, 36], в котором используются по существу волновые функции модели оболочек. Это разложение дает для \mathcal{W}^2 выражение, практически пригодное для расчетов; однако, как мы увидим, чтобы удовлетворить критерию его применимости, мы должны усреднять по большому энергетическому интервалу.

В этой трактовке невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$\bar{H} = \sum_{i=0}^A (T_i + V_i) - \frac{1}{2} \sum_{i, j=0}^A \bar{V}_{ij}, \quad (63)$$

а собственные функции $|\bar{q}\rangle$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{H}|\bar{q}\rangle = E_{\bar{q}}|\bar{q}\rangle. \quad (63.1)$$

Здесь V_i — самосогласованный потенциал, определенный в состоянии $|\bar{q}\rangle$ и действующий на i -ю частицу (как в методе Хартри — Фока), а

$$\bar{V}_{ij} = \langle \bar{q} | V_{ij} | \bar{q} \rangle, \quad (63.2)$$

Суммирование включает как падающую частицу ($i = 0$), так и A частиц ядра-мишени. Таким образом, все $A + 1$ частицы описываются здесь симметрично. В формуле (63) вычитается c -число $\frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ij}$ для того, чтобы обеспечить равенство между $\langle \bar{q} | \bar{H} | \bar{q} \rangle$ и энергией в приближении Хартри — Фока. Основной вопрос при использовании величин $|\bar{q}\rangle$ в качестве функций нулевого приближения связан с величиной разброса по энергии силовой функции $\langle \bar{q} | p \rangle^2$. Силовую функцию можно получить из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{D} \{ \langle \bar{q} | p \rangle^2 \}_{\text{ср.}} &= \text{Im} \left\{ \langle \bar{q} | \frac{1}{H-E} | \bar{q} \rangle \right\}_{\text{ср.}} = \\ &= \text{Im} \left\langle \bar{q} \left| \frac{1}{\tilde{H}-E} \right| \bar{q} \right\rangle, \quad (64) \end{aligned}$$

где \tilde{H} является вспомогательным гамильтонианом, который был введен для вычисления силовой функции¹⁾. Значение этого гамильтониана выяснится позднее. Он задается соотношением

$$\tilde{H} = \bar{H} - \mathcal{W}^{\circ}, \quad (64.1)$$

где \mathcal{W}° определяется соотношением

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{q} | \mathcal{W}^{\circ} | \bar{q} \rangle - \\ &= \langle \bar{q} | (V - \bar{V} + \mathcal{W}^{\circ}) \frac{1}{H-E-iI} (V - \bar{V} + \mathcal{W}^{\circ}) | \bar{q} \rangle, \quad (64.2) \end{aligned}$$

использование которого обеспечивает выполнение (64). [См. аналогичные соотношения (44)—(49).] Соотношение (64.2) по форме сходно с (56), и с помощью той же самой процедуры, какая использовалась для решения уравнения (56), получим, что (64.2) удовлетворяется, если выбрать \mathcal{W}° диагональным в $|\bar{q}\rangle$ -представлении с матричными элементами

$$\langle \bar{q} | \mathcal{W}^{\circ} | \bar{q} \rangle = \langle \bar{q} | (H - \bar{H}) \frac{1}{H - \Lambda \bar{q} (V - \bar{V}) - E - iI} (H - \bar{H} | \bar{q} \rangle, \quad (65)$$

где

$$\Lambda \bar{q} = |\bar{q}\rangle \langle \bar{q}|. \quad (65.1)$$

¹⁾ Мы используем символы \tilde{H} и \mathcal{W}° , так как, хотя они теперь относятся к другим величинам, чем раньше, имеется тесная аналогия между соответствующими величинами, обозначаемыми этими символами.

При вычислении величины $\langle \bar{q} | \mathcal{W}^0 | \bar{q} \rangle$ в низшем порядке теории возмущений, что теперь означает замену величины

$$\{H - \Lambda \bar{q} (H - \bar{H}) - E - iI\}^{-1} \quad (65.2)$$

на

$$\sum_{\bar{s} \neq \bar{q}} |\bar{s}\rangle \{E_{\bar{s}} - E - iI\}^{-1} \langle \bar{s}|,$$

находим

$$\mathcal{W}^0 = \sum_{i < j=0} \mathcal{W}^0_{ij}, \quad (65.3)$$

где

$$\langle \bar{q} | \mathcal{W}^0_{ij} | \bar{q} \rangle = \sum_{\bar{s} \neq \bar{q}} \langle \bar{q} | V_{ij} | \bar{s} \rangle \frac{1}{E_{\bar{s}} - E - iI} \langle \bar{s} | V_{ij} | \bar{q} \rangle. \quad (65.4)$$

Если мы пренебрежем естественной шириной состояния $|\bar{q}\rangle$, то полуширина силовой функции $\pi \{ \langle \bar{q} | p \rangle^2 \}_{\text{ср.}} / D$ запишется в виде

$$\sum_{i < j=0}^A \text{Im} \langle \bar{q} | \mathcal{W}^0_{ij} | \bar{q} \rangle. \quad (65.5)$$

Если состояние $|\bar{q}\rangle$ отождествить с состоянием, в котором имеется $A + 1$ частиц (причем A уровней от дна ямы заполнены, за исключением одной дырки в состоянии k') и в котором две частицы находятся на возбужденных уровнях k и l , то оказывается нетрудно найти различные части ширины:

1. Величины

$$\text{Im} \sum_{j=0}^A \langle \bar{q} | \mathcal{W}^0_{kj} | \bar{q} \rangle \quad \text{и} \quad \text{Im} \sum_{i=0}^A \langle \bar{q} | \mathcal{W}^0_{li} | \bar{q} \rangle$$

соответствуют ширинам для частиц k и l , взаимодействующих с другими частицами так, что (на языке теории возмущений) двухчастичное возбуждение распадается на трехчастичное. (В суммах необходимо опускать члены с $j = k'$ и $i = k'$.)

2. Величина $\text{Im} \sum_j' \langle \bar{q} | \mathcal{W}^0_{k'j} | \bar{q} \rangle$ соответствует ширине по отношению к распаду состояния, отвечающего модели оболочек, в котором имеется дырка, т. е. ширине поглощения дырки. (Штрих у символа суммы указывает на то, что член с $j = k'$ должен быть опущен. Однако для полноты в сумму необходимо включить члены с $j = k$ и $j = l$.)

Воспользовавшись тем фактом, что вблизи поверхности Ферми E_F дырки и частицы приближенно симметричны¹⁾, с помощью описанных ранее простых теорий найдем, что полная ширина состояния $|\bar{q}\rangle$ равна

$$W_{\bar{q}} = W_k + W_l + W_{k'} \approx \left\{ \frac{(\epsilon_k - E_F)^2 + (\epsilon_l - E_F)^2 + (E_F - \epsilon_{k'})^2}{(\epsilon_n - E_F)^2} \right\} W_n. \quad (66)$$

Как и раньше, ширину первоначального одночастичного состояния $|n\rangle$ будем обозначать через W_n , а мнимую часть величины W_{ij}° — через W .

Ширина нашего первоначального одночастичного состояния задается в низшем приближении соотношением

$$W_n = \text{Im} \sum_{\bar{q}} \frac{\langle on | \sum_{i=1} V_{oi} - \sum \bar{V}_{oi} | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | \sum V_{oi} - \sum \bar{V}_{oi} | on \rangle}{E_{\bar{q}} - E - iI}. \quad (67)$$

Наибольший доступный объем в фазовом пространстве будет в том случае, когда энергия равномерно распределена между частицами и дыркой, так что каждая из величин W_k , W_l и $W_{k'}$ будет равна приблизительно $1/3 W_n$. Поскольку $W_k + W_l + W_{k'} < W$, снова можно удовлетворить неравенству

$$W_{\bar{q}} < I < W_n \quad (68)$$

и пользоваться теорией возмущений, хотя все эти три величины одного и того же порядка, так что средние величины должны быть вычислены на интервале I , который составляет значительную долю ширины одночастичного резонанса.

В том случае, когда состояние $|o\rangle$ можно рассматривать как состояние, соответствующее модели оболочек, т. е. как антисимметризованную волновую функцию независимых частиц, движущихся в яме, или же когда состояние $|o\rangle$ может быть получено из такой волновой функции независимых частиц

1) Расчеты Пендлбери, аналогичные расчетам Лейна и Уондла [36], показывают, что эта симметрия имеет место только вблизи поверхности Ферми; поглощение для дырок возрастает значительно сильнее, чем для частиц (E. P. Pendlebury, частное сообщение).

путем последовательного приложения двухчастичного взаимодействия, $A - 1$ частиц могут рассматриваться симметрично, причем в этом случае мы легко можем учесть тождественность частиц. Воспользовавшись итерацией, при которой за исходный пункт взята модель ферми-газа, являющаяся, как предполагается, разумным приближением для описания внутренней части большого ядра, Бракнер [37] нашел, что величина W оказывается значительно больше величины W , даваемой простой теорией; в энергетическую зависимость величины W Бракнер ввел линейный по энергии член, а также постоянный член. Это могло бы означать, что мы не можем удовлетворить неравенству (68) ни при каких значениях I , так как сумма $W_k + W_l + W_{k'}$ может оказаться больше W_n . В то время как расчет Бракнера указывает на чувствительность величины W к корреляциям, в волновой функции основного состояния вблизи поверхности Ферми имеются веские доказательства того, что эти корреляции не могут быть рассчитаны с помощью теории возмущений, т. е. что волновая функция основного состояния $\chi_0(\xi)$ не может быть получена в области поверхности Ферми путем итерирования волновой функции модели оболочек [38]. Действительно, та часть этих корреляций, которая ответственна за энергию спаривания, стремится сделать поверхность Ферми более устойчивой относительно возмущений, действуя, таким образом, в другом направлении, чем эффекты, рассчитанные Бракнером [37]. Таким образом, последовательный расчет поправок к низшему приближению, несомненно, приведет к величинам, которые будут меньше величин, полученных в расчетах Бракнера.

Выше, при обсуждении соотношения (59), было отмечено, что для легко деформируемых ядер возникают большие матричные элементы для переходов из состояния χ_0 в низколежащие вращательные состояния, так что первоначальное одночастичное возбужденное состояние имеет большую вероятность распада на состояния, в которых первоначальная частица имеет лишь немного меньшую энергию. Таким образом, это состояние имеет почти такую же ширину, что и начальная ширина.

В этом случае следует выделить интенсивные переходы в низколежащие коллективные состояния, которые вместе с первоначальным каналом мы будем называть „избранными каналами“ и рассматривать их отдельно с помощью системы

связанных уравнений, как это было сделано Сано и др. [39] (в этой статье даются ссылки на более раннюю работу Иосиды и другие работы) и Чейзом и др. [40].

Действительно, предшествующее изложение можно обобщить так, что $V - \bar{V}$ будет представлять собой матрицу относительно избранных каналов, функции $|o\rangle$ будут образовывать пространство избранных каналов, а оператор Λ_0 будет исключать эти избранные каналы из промежуточных состояний; таким образом, мы по существу будем воспроизводить формализм Иосиды. Указанное обобщение вполне соответствует оптической модели, в которой предполагается, что искажение, обусловленное центральным потенциалом, представляет собой суммарный эффект от большого числа степеней свободы, которые не могут быть рассмотрены детально.

§ 8. Специальные модели

Вычисление величины \mathcal{W}^0 как из соотношения (56), так и из соотношения (58) представляется невозможным, поскольку матричные элементы $\langle on | V - \bar{V} | p \rangle$ или $\langle on | V - \bar{V} | jm \rangle$ не могут быть рассчитаны ввиду сложности функций $\Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi)$ и $\chi_j(\xi)$. Вычисление величины \mathcal{W}^0 оказалось бы трудным, даже если бы мы воспользовались уравнениями последнего параграфа, поскольку в этих уравнениях предполагается использование волновых функций комплексной ямы конечных размеров. Следовательно, оказывается необходимым ввести более идеализированные модели, чтобы провести указанный расчет. Обсудим теперь связь этих моделей с рассмотренным нами формализмом.

Внутреннюю область большого ядра можно представить как ферми-газ. В этом случае поглощение [см. (67)] можно представить в виде

$$\mathcal{W}_n = \frac{\pi}{D} \left\{ \left\langle on \left| \sum V_{oi} - \sum \bar{V}_{oi} \right| \bar{q} \right\rangle^2 \right\}_{\text{cp.}}; \quad (69)$$

здесь волновая функция $|o\rangle$, описывающая фермиевское „море“, берется в виде антисимметризованного произведения плоских волн; $|n\rangle$ представляет собой плоскую волну с энергией, большей энергии Ферми, а $|\bar{q}\rangle$ — состояние

с энергией, равной энергии состояния $|op\rangle$, в котором над поверхностью Ферми находится еще одна частица.

В такой модели совершенно безразлично, какой величины будет интервал I , по которому производится усреднение при расчете величины \mathcal{W}^c или \mathcal{W} . В этой модели нет никаких факторов, которые могли бы обусловить быстрое изменение рассчитанных величин, так что амплитуда рассеяния является плавно меняющейся функцией энергии, а средняя фаза оказывается для разумных интервалов очень близкой к истинной фазе. Следовательно, при практических расчетах нам нет необходимости вводить величину iI в энергетический знаменатель. Однако для того, чтобы установить справедливость соотношения (67), нам необходимо было ввести iI в теорию составного ядра.

Вторая модель, которая не столь полезна для получения численных значений, но которая является поучительной, была использована Вигнером [41]. В этой модели предполагается, что энергии состояний $|jm\rangle$ являются случайными величинами и что матричные элементы $\langle jm|\delta V|kl\rangle$, где δV — возмущение, равны все между собой по абсолютной величине, но имеют случайные знаки, когда $E_{jm} - E_{kl}$ меньше некоторой определенной величины (в формализме Вигнера собственные значения энергии вещественны), и равны нулю для больших значений указанной разности $E_{jm} - E_{kl}$. При определенных условиях, которые, по-видимому, выполняются в случае ядра, в области одночастичного резонанса была найдена лоренцовская форма для силовой функции [т. е. типа (33)]. Согласно (33), это означает, что по отношению к энергии величина \mathcal{W} является константой.

Третья модель, которую использовал Блох [29], сходна с моделью Вигнера, но отличается тем, что предположение о случайности знаков матричных элементов и о равенстве по абсолютной величине этих элементов Блох делает после того, как он получил разложение по малому параметру [см. (57)]. Это означает, что вклад дают только четные степени разложения. Анализ Блоха показывает, что наибольшее число исчезающих членов возникает из члена низшего порядка, соответствующего (58). Однако предположение о случайности знаков оказывается неоправданным для реального физического случая. Так, в случае большого ядра в рамках модели ферми-газа было найдено [42], что третий

член в разложении, который в указанном предположении должен был бы обращаться в нуль, дает в мнимую часть потенциала, по существу, такой же вклад, что и второй член. Более того, вклад второго члена, по-видимому, будет значительно меньшим, если мы учтем действие принципа Паули, поскольку в этом случае процессы второго порядка окажутся абсолютно запрещенными.

Использование упрощенных моделей исключает всякий механизм, который действовал бы в реальном ядре и обусловливал бы быстрые изменения параметров. Поэтому результат оказывается нечувствительным к интервалу, по которому производится усреднение, поскольку истинная фаза оказывается почти такой же, как и средняя фаза. Однако включение величины I , когда присутствуют энергии W_p составных состояний, было необходимым для установления связи этих моделей с расчетом средней фазы.

Представляется разумным предположить, что при больших энергиях бомбардирующих частиц, когда ширины состояний составного ядра оказываются значительно большими, чем расстояние между уровнями, истинная амплитуда рассеяния плавно меняется с энергией и что флуктуации малы. Следовательно, можно было бы ожидать, что в этом случае истинная амплитуда рассеяния будет той же самой, что и средняя амплитуда, и к тому же вычисленная амплитуда рассеяния должна быть нечувствительной к величине интервала, по которому производится усреднение. Этот факт объясняет, почему наши формулы для средней амплитуды имеют тот же вид, что и формулы Ватсона и других, вычисленные для случая рассеяния при более высокой энергии, хотя в их работе никакого усреднения по энергии не производилось.

Однако в промежуточной области, где большую роль могут играть флуктуации, и в области низких энергий необходимо производить усреднение по энергии так, как это было сделано в настоящей работе.

Мы не рассматривали более детально рассеяния на флуктуациях. Это связано с тем, что в этом случае невозможно произвести прямые расчеты; поскольку соответствующие частицы находятся в ядре в течение большого интервала времени, любое разложение на основе учета последующих столкновений обречено на провал. Вследствие продолжительного пребывания в ядре эти частицы, по-видимому, соответствуют

частицам, описываемым моделью составного ядра. Следовательно, представляется разумным при усреднении пренебречь корреляциями между фазами, что приводит к угловым распределениям, симметричным относительно 90° . При рассеянии на флуктуациях всегда имеется неопределенность относительно аддитивного члена при расчете сечения рассеяния на флуктуациях. Однако если мы можем рассчитать среднюю амплитуду рассеяния и получить первый член правой части соотношения (26), то тем самым мы найдем нижний предел сечения соответствующего процесса. Это особенно полезно в случае неупругого рассеяния, где оказываются применимыми подобные соображения. Один из подобных примеров представлен в следующем разделе. Кроме того, если вышеуказанные предположения оправданы, амплитуда рассеяния на флуктуациях оказывается довольно гладкой и имеет тенденцию к менее резким минимумам „собственно упругого“ рассеяния, не меняя при этом общей картины.

4. ПРЯМЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДИПОЛЬНОМ ФОТОЭФФЕКТЕ И В РАДИАЦИОННОМ ЗАХВАТЕ

Рассмотрим случай, в котором падающая и вылетающая частицы являются различными, причем одной из частиц является фотон. Как указывалось в разделе 1, гигантский резонанс наблюдается при поглощении фотонов ядрами среднего атомного веса в области энергий ~ 15 Мэв. Коллективные модели дают естественное объяснение механизма поглощения, но не дают правильное число быстрых вылетающих протонов, которое на несколько порядков превышает предсказываемое статистической теорией число таких протонов. Для количественного объяснения выхода быстрых протонов необходимо привлечь прямые взаимодействия! Это не означает, что испускание быстрых протонов является доминирующим процессом; этот процесс составляет лишь $\sim 1\%$ всех процессов в тяжелых ядрах, где процессы такого рода сильно подавляются кулоновским барьером. Однако относительная вероятность испускания быстрых протонов на несколько порядков превышает предсказываемую статистической теорией вероятность, равную 10^{-4} или 10^{-5} . Точно такое же несогласие с предсказаниями статистической теории имеет место для обратных процессов (p , γ) [43, 44].

В то время как статистическая теория предсказывает сильное уменьшение сечения с ростом энергии вылетающих частиц или массового числа, экспериментальные результаты Коэна (45) не обнаруживают такого уменьшения для протонов с энергией, большей 5 Мэв. Это является дополнительным указанием на то, что прямые процессы играют важную роль.

Уилкинсон [15] предложил модель реакций (γ, p) , которая включает в себя физические характеристики, вытекающие из детальной теории. Уилкинсон считает, что γ -квант поглощается одним из нуклонов, в результате чего возникает возбужденное состояние отдельной частицы с шириной W в комплексной яме. Это и есть то одночастичное возбуждение, которое было рассмотрено нами раньше. Затем с этим состоянием связывается естественная ширина Γ , характеризующая вероятность вылета из ядра, и ширина $2W$, характеризующая переход в состояние составного ядра. Следовательно, отношение $\Gamma/(\Gamma + 2W)$ дает вероятность вылета частицы из ядра, при котором уносится по существу вся энергия γ -кванта. Это отношение воспроизводит по порядку величины наблюдаемую вероятность вылета быстрых протонов, усредненную по соответствующим одночастичным уровням.

Следуя работе Брауна и Левингера [46], мы обобщим развитый здесь формализм с тем, чтобы можно было рассматривать поглощение γ -квантов. Это обобщение вполне аналогично обобщению, произведенному Пизли в рамках нерезонансной теории [47]. Волновая функция системы, в которой поглощаются γ -кванты, содержит только выходящие волны и записывается в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{\alpha', j} S_{\gamma\alpha', j} \chi_j(\xi) \psi_{\alpha'}^{j+}(\mathbf{r}), \quad r > R, \quad (70)$$

где $S_{\gamma\alpha', j}$ — амплитуда поглощения γ -кванта с испусканием нуклона в канал α' , причем конечное ядро остается в состоянии j . При $r < R$ имеем

$$\Psi = \Psi_0(\mathbf{r}, \xi) + \sum_p a_p \Phi^{(p)}(\mathbf{r}, \xi), \quad (71)$$

где $\Phi^{(p)}$ — волновая функция составного состояния [см. (13)]. Здесь Ψ_0 представляет собой волновую функцию исходного ядра (причем предполагается, что присутствует γ -квант). Эта волновая функция довольно часто вполне адекватным обра-

зом может быть представлена в виде волновой функции модели оболочек. Координата испускаемой частицы обозначается через \mathbf{r} , а координаты всех остальных $A - 1$ частиц обозначаются через ξ . Таким образом, хотя между A частицами имеется симметрия, мы для простоты выбираем некоторую конкретную частицу, с которой и связывается поглощение; тем самым подобное описание выделяет эту частицу. Взаимодействие с полем излучения (электрическое поле \mathcal{E} направлено вдоль оси z и нормировано на единичный поток фотонов, т. е. на поток 1 фотон/см² · сек) описывается с помощью H_I , причем

$$H_I = e\mathcal{E}_z = e(2\pi\hbar\omega)^{1/2}z, \quad (72)$$

если ограничиться рассмотрением дипольного взаимодействия. Поскольку связь с полем излучения является слабой, при вычислении коэффициентов a_p следует ограничиться только первым неисчезающим приближением, которое можно получить из требования, чтобы Ψ подчинялось уравнению Шредингера в том же порядке малости. Имеем

$$H_I\Psi_0 = (E - H) \sum a_p \Phi^{(p)} = \sum a_p (E - W_p) \Phi^{(p)}. \quad (73)$$

Умножая это уравнение слева на $\Phi^{(p)}$ и производя интегрирование, получаем

$$a_p = \frac{\langle p | H_I | 0 \rangle}{E - W_p}, \quad (73.1)$$

что и следовало ожидать из теории возмущений. Здесь для функции Ψ_0 мы использовали обозначение $|0\rangle$; E — полная энергия системы. Мы измеряем ее от основного состояния начального ядра, так что $E = \hbar\omega$, где $\hbar\omega$ представляет собой энергию γ -кванта¹⁾.

Амплитуды $S_{\gamma\alpha'j}$ легко получить, если при $r = R$ приравнять волновые функции Ψ , определяемые соотношением (71)

1) На языке одночастичных возбуждений это означает, что энергия возбужденной частицы измеряется от энергии основного состояния ядра-мишени, в то время как раньше, когда мы рассматривали упругое рассеяние, величина E , связанная с отдельной частицей, равнялась энергии частицы при $r = \infty$.

и уравнением (73), умножая полученное равенство на $\chi_j(\xi) \Theta_\alpha(\theta, \varphi)$ и интегрируя по $d^3\xi$ и по $d\Omega$:

$$S_{\gamma\alpha', j} = \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)} \sum_p \int_0^R d^3\xi \int d\Omega \Phi^{(p)}(\xi, \mathbf{R}) \chi_j(\xi) \times \\ \times \Theta_\alpha(\theta, \varphi) \frac{\langle p | H_I | o \rangle}{W_p - \hbar\omega}. \quad (74)$$

Из разложения (14) находим

$$S_{\gamma\alpha', j} = \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)} \sum_{p, m} \tilde{\phi}_m^j(R) \langle jm | p \rangle \frac{\langle p | H_I | o \rangle}{W_p - \hbar\omega}, \quad (74.1)$$

что приводит к выражению для сечения

$$\sigma_{\gamma\alpha', j} = \frac{\hbar k_j}{Mc} |S_{\gamma\alpha', j}|^2. \quad (75)$$

Теперь можно снова перейти к средней амплитуде рассеяния, которая может быть получена из (74.1) путем замены в знаменателе $\hbar\omega$ на $\hbar\omega + iI$, т. е.

$$\langle S_{\gamma\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}} = \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)} \sum_{p, m} \tilde{\phi}_m^j(R) \langle jm | p \rangle \frac{\langle p | H_I | o \rangle}{W_p - E - iI}; \quad (76)$$

это соотношение в эквивалентной записи с помощью функций Грина имеет вид

$$\langle S_{\gamma\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}} = \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)} \sum_m \tilde{\phi}_m^j(R) \left(jm \left| \frac{1}{H - E - iI} H_I \right| o \right). \quad (76.1)$$

В эквивалентности соотношений (76) и (76.1) легко убедиться, если слева от H_I в соотношении (76.1) поставить единичный оператор $|p\rangle\langle p|$. Используя разложение, аналогичное (45), для $(H - \hbar\omega - iI)^{-1}$ получаем

$$\langle S_{\gamma\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}} = \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j,+}(R)} \sum_m \tilde{\phi}_m^j(R) \left\{ \frac{\langle jm | H_I | o \rangle}{\tilde{E}_{jm} - \hbar\omega - iI} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\tilde{E}_{jm} - \hbar\omega - iI} \frac{1}{\tilde{E}_{kl} - \hbar\omega - iI} \left[\langle jm | V - \tilde{V} | kl \rangle - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\langle jm | V - \tilde{V} | p \rangle \langle p | V - \tilde{V} | kl \rangle}{W_p - \hbar\omega - iI} \right] \langle kl | H_I | o \rangle \right\}, \quad (77)$$

где индекс k , так же как и j , относится к возбужденным состояниям $A-1$ частиц. Ограничимся теперь рассмотрением случая $\epsilon_{jm} \approx E$, т. е. случая, когда одна частица забирает почти всю энергию γ -кванта. Другой случай, когда $\epsilon_{jm} - E \gg W_m$, где W_m соответствует поглощению, относящемуся к одночастичному состоянию $|m\rangle$, может быть рассмотрен точно так же, как мы рассматривали рассеяние в § 4 раздела 3.

В рассматриваемом нами случае теория возмущений означает разложение величины $(W_p - \hbar\omega - iI)^{-1}$. Первый член разложения получается путем замены величины

$$|p\rangle (W_p - \hbar\omega - iI)^{-1} \langle p|$$

на

$$\sum_{l,n} |in\rangle (E_{in} - \hbar\omega - iI)^{-1} \langle in|.$$

Как отмечалось в § 6 раздела 3, такая замена представляет собой хорошее приближение, поскольку состояние $|n\rangle$ соответствует в основном более слабому возбуждению, чем начальное состояние $|l\rangle$; последнее состояние заполняется отдельной частицей, поглотившей почти всю энергию γ -кванта. Таким образом, разброс величин $\langle p|in\rangle^2$ является малым по сравнению с величиной W_l , описывающей поглощения в состоянии $|l\rangle$.

Можно ожидать, что уже первый член в правой части соотношения (77) будет хорошей аппроксимацией для $\langle S_{\gamma\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}}$. Рассмотрим сначала случай $|jm\rangle = |kl\rangle$. В этом случае оказывается полезным рассмотреть вместе два члена в квадратных скобках. Если вспомнить, что перекрытие между $|j\rangle$ и частью волновой функции Ψ_0 , относящейся к ξ -частицам, велико только в том случае, если состояния ξ -частиц одинаковы при обеих функциях (последний множитель $\langle kl|H_I|o\rangle$ обеспечивает это) и если \tilde{V} выбирается так, чтобы было справедливо соотношение (49), то член в квадратных скобках почти обращается в нуль, так что остаются только эффекты, обусловленные малой разницей между $|j\rangle$ и ξ -частью функции Ψ_0 . Поскольку каждое из двух слагаемых в квадратных скобках равно приблизительно W_m и поскольку знаменатели стоящих перед скобкой дробей никогда не становятся меньшими, чем $W_m + I$, в хорошем приближении вкладом этих членов можно

пренебречь. Оценки первого слагаемого в квадратных скобках для случая $|jm\rangle \neq |kl\rangle$ дают величину порядка $(\bar{V}/A)/(W_I + I)$ относительно первого члена. В некоторых случаях можно получить поправки к этому члену.

В дальнейшем мы не будем этого делать и будем считать, что первый член дает достаточно хорошее приближение. Во всяком случае, так как ряд сходится для достаточно больших I , то можно вычислить следующие члены разложения, если понадобится получить более точные результаты.

Первый член в правой части соотношения (77) имеет вид матричного элемента, описывающего фотоядерный процесс для частицы в комплексной яме, поскольку состояния $|p\rangle$ мы устранили. Однако последствия того обстоятельства, что процесс в действительности не является одночастичным, сохраняются в том, что используются состояния $|j\rangle$, а не возбужденные состояния модели оболочек, являющиеся состояниями, в которых частицы заполняют все A уровней от дна ямы, кроме одного. Чтобы показать, как можно избежать детальное рассмотрение состояний $|j\rangle$, предположим, что первоначальное состояние Ψ_0 может быть хорошо представлено волновой функцией модели оболочек, так что мы можем записать

$$\Psi_0(\mathbf{r}, \xi) = \Omega(\xi) \psi_{m'}(\mathbf{r}), \quad (78)$$

где $\psi_{m'}(\mathbf{r})$ — волновая функция связанного состояния, первоначально занятого \mathbf{r} -частицей. В этом приближении матричный элемент, входящий в первый член соотношения (77), можно представить в виде произведения двух множителей:

$$\langle jm | H_I | 0 \rangle = \langle m | H_I | m' \rangle \int_0^R \Omega(\xi) \chi_j(\xi) d^3\xi = \langle m | H_I | m' \rangle Q_{\Omega_j}; \quad (78.1)$$

это соотношение является определением величины Q_{Ω_j} . Предположим, что только один одночастичный уровень дает вклад для данного канала; такое предположение часто оказывается хорошей аппроксимацией. Сечение, отвечающее первому члену

правой части соотношения (77), имеет вид

$$\sum_j \frac{\hbar k_j}{Mc} |\langle S_{\gamma\alpha', j} \rangle_{\text{ср.}}|^2 \approx \sum_j \Gamma_{\alpha' j} Q_{\Omega}^2 \frac{1}{\hbar c} \left| \frac{\langle m | H_I | m' \rangle}{\tilde{E}_{jm} - \hbar\omega - iI} \right|^2, \quad (79)$$

где

$$\Gamma_{\alpha' j} \equiv \frac{\hbar k_j}{M} \left| \frac{1}{\phi_{\alpha'}^{j+}(R)} \right|^2 |\tilde{\phi}_m^j(R)|^2 \quad (79.1)$$

является полной шириной испускания одной частицы при энергии, равной $\hbar\omega - \varepsilon_j$ (здесь ε_j — энергия возбуждения состояния $|j\rangle$). Из соображений полноты отметим, что вероятность найти состояние Ω среди возбужденных состояний $|j\rangle$ равна единице, т. е.

$$\sum_j Q_{\Omega}^2 = 1. \quad (79.2)$$

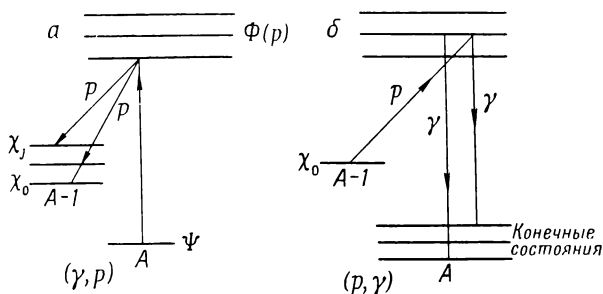
Из формул, полученных в § 7 раздела 3, следует, что ширина распределения энергий ε_j около значения $|\varepsilon_{m'}|$ равна $W_{m'}$, где $W_{m'}$ может быть интерпретирована как ширина для дырки в состоянии m' . Таким образом, мы видим, что ширина полного распределения испускаемых быстрых частиц равна сумме ширин для возбужденной частицы и для дырки в состояниях модели оболочек.

Изложенные здесь нами соображения не представляют ничего нового в физическом отношении по сравнению с моделью Уилкинсона, но показывают, как эта простая модель связана с описанием в рамках задачи многих тел.

Подобного рода соотношения могут быть использованы для оценки сечения прямого радиационного захвата нейтронов или протонов. Подробное описание такой процедуры содержится в работе Лейна и Линна [44].

Сечения для (γ, p) - и (p, γ) -реакций легко можно связать друг с другом. Мы получаем сечение для реакции (γ, p) с помощью суммирования по всем конфигурациям $A - 1$ нуклонов конечного ядра (фиг. 12). При (γ, p) -реакции ядро из основного состояния переходит во все конечные состояния j . При (p, γ) -реакции система переходит из основного состояния $\gamma_0(\xi)$ во всевозможные конечные состояния (см. фиг. 12, б), которые содержат значительную примесь состояния $\gamma_0(\xi)$. (Волновая функция ξ -частиц должна оставаться неизменной,

поскольку H_I зависит только от r .) Далее, конечное состояние должно содержать значительную примесь состояния $\psi_{m'}(\mathbf{r})$, соответствующего одночастичному состоянию в потенциальной яме. Из соображений, аналогичных использованным выше, находим, что вероятность найти $\chi_0 \psi_{m'}$ среди основного или возбужденных состояний равна единице. Таким образом, сечение (p, γ) -реакции, просуммированное по основному и возбужденным состояниям, дается соотношением (79)



Фиг. 12. Связь между реакциями (γ, p) и (p, γ) .

с двумя небольшими модификациями: а) полученное выражение мы умножаем на обычный множитель k_γ^2/k_p^2 , возникающий при рассмотрении на основе принципа детального равновесия или дисперсионной теории, где k_γ и k_p являются волновыми числами γ -кванта и протона; б) мы используем величину $\Gamma_{\alpha'j}$ без усреднения, подразумеваемого в (79) в сумме по j , поскольку в нашем случае падающая частица имеет определенную энергию.

5. ОБСУЖДЕНИЕ ДРУГИХ ФОРМАЛИЗМОВ

Недавно Фешбах [48] сформулировал единую теорию ядерных реакций и получил ряд соотношений, связывающих параметры составного ядра с параметрами оптической модели, хотя при этом он и не пользовался теорией возмущений, развитой в разделе 3. С точки зрения используемых в нем понятий его формализм имеет преимущество в том, что Фешбах избегает введения радиуса сшивания. Однако этот формализм, по-видимому, не является столь удобным для получения вы-

водов, содержащихся в разделах 3 и 4, как формализм, использованный нами. Во всяком случае, имеется тесная связь между формализмом Фешбаха и формализмом, использованным в настоящей работе, хотя, на первый взгляд, они кажутся различными.

Мы кратко продемонстрируем черты этого сходства, причем попытаемся сохранять в основном обозначения Фешбаха, так что можно легко сравнить наши формулы с формулами Фешбаха.

Фешбах использует функции $\Phi_n(\mathbf{r}, \xi)$, которые являются собственными функциями оператора \mathcal{H} [см. соотношения (51)] и которые, следовательно, просто совпадают с функциями Ω_p в (51). Оператор Λ_o в (51) исключает канал падающей частицы, так что Φ_n образуют полный набор состояний в пространстве, ортогональном пространству входного канала. Следовательно, решение уравнения Шредингера можно записать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \chi_o(\xi) u_o(\mathbf{r}) + \sum a^{(n)} \Phi_n(\mathbf{r}, \xi). \quad (80)$$

Соотношение (80) справедливо для всех значений \mathbf{r} , поскольку граничные условия для Φ_n берутся в том виде, что волновая функция на бесконечности представляется выходящими волнами в случае, если частица может покинуть ядро через канал, отличный от входного канала. В этом случае функции Φ образуют континуум, и сумму в (80) следует понимать в обобщенном смысле, а именно как сумму по дискретным состояниям и как интеграл по непрерывному спектру. Поскольку граничные условия накладываются на бесконечности, введение радиуса канала оказывается ненужным.

Коэффициенты $a^{(n)}$ определяются из требования, чтобы Ψ удовлетворяла уравнению Шредингера $H\Psi = E\Psi$. Отсюда получаем

$$a^{(n)} = \frac{\int \Phi_n(\mathbf{r}, \xi) V(\mathbf{r}, \xi) \chi_o(\xi) u_o(\mathbf{r}) d^3r d^3\xi}{E - \mathcal{E}_n}, \quad (81)$$

где мы для обозначения собственных значений \mathcal{E}_n , соответствующих Φ_n , использовали обозначения Фешбаха. Наши коэффициенты $a^{(n)}$ совпадают с Λ_n у Фешбаха. Умножая

уравнение Шредингера слева на $\chi_o(\xi)$ и интегрируя по $d^3\xi$, получаем

$$(T - \bar{V} - E) u_o(\mathbf{r}) + \sum a^{(n)} \int \chi_o(\xi) V(\mathbf{r}, \xi) \Phi_n d^3\xi = 0. \quad (82)$$

Подставляя $a^{(n)}$ из (81), находим, что $u_o(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$(T + \mathcal{V} - E) u_o(\mathbf{r}) = 0, \quad (83)$$

где \mathcal{V} представляет собой обобщенный оптический потенциал Фешбаха

$$\mathcal{V} = \bar{V}(r) + \sum_n \frac{\int \chi_o(\xi) V(\mathbf{r}, \xi) \Phi_n(\mathbf{r}, \xi) d^3\xi \int \Phi_n(\mathbf{r}', \xi) V(\mathbf{r}', \xi) \chi_o(\xi) d^3\xi}{E - \mathcal{E}_n}; \quad (83.1)$$

здесь \mathcal{V} является интегральным (нелокальным) оператором. Легко установить и другие пункты, по которым наш формализм можно связать с формализмом Фешбаха, заметив, что его матричный элемент H_{ij} равен

$$H_{ij} = \int \chi_i(\xi) H \chi_j(\xi) d^3\xi.$$

В области очень малых энергий, где оказывается возможным только упругое рассеяние, главное различие между двумя формализмами вытекает из того, что входной канал содержится в наших функциях $\Phi^{(p)}$, но не содержится в функциях Φ_n Фешбаха. Ширина, соответствующая этому каналу, содержится в наших комплексных величинах W_p , тогда как в формализме Фешбаха мы по существу должны производить обращение матрицы (что может быть произведено прямым путем), чтобы ввести ширины в знаменатели амплитуды рассеяния. Обсуждение, следующее за соотношением (51), показывает, что собственные функции $\Phi^{(p)}$ и Φ_n с точностью до незначительных отличий совпадают друг с другом.

Разница между формализмами состоит в том, что в одном случае мы можем исходить из формализма, не использующего радиусы сшивания, как это делает Фешбах. В этом случае выражение для волновой функции оказывается простым, однако переход к амплитуде рассеяния оказывается

несколько затруднительным. В другом случае мы с самого начала можем пользоваться радиусом шивания; в этом случае амплитуда рассеяния получается просто. Затем можно вычислять всевозможные суммы, как это мы и делали, для того чтобы получить результаты, в которые не входит этот радиус. В то время как первый способ имеет преимущества, связанные с простотой фигурирующих в нем понятий, промежуточные формулы кажутся более простыми во втором формализме; в последнем оказываются более простыми и соображения о спектре состояний составного ядра, которые были нами представлены для обоснования теории возмущений.

Более общий формализм ядерных реакций был предложен Блохом [29]. Мы уже несколько раз ссылались на эту работу. С помощью подходящего выбора представления мы можем из его формализма получить либо теорию Вигнера — Айзенбуда, либо теорию Капура — Пайерлса. Если использовать наши соображения в формализме Блоха, можно получить теорию, полностью эквивалентную нашей. Мы предпочли пользоваться более простыми обозначениями менее общей теории.

Наконец, отметим, что многие из положений настоящей статьи были впервые сформулированы в формализме Вигнера — Айзенбуда. Это относится особенно к результатам, полученным в § 3 раздела 3, на что указывают и приведенные там ссылки на литературу. Однако из соображений единообразия мы предпочли оставить большинство из этих соображений в рамках нашего формализма, который оказывается весьма удобным для этого и является, вероятно, более простым для рассмотрения других вопросов, как это указывалось в разделе 1.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность проф. Р. Пайерлсу за многочисленные полезные указания и критические замечания, относящиеся к содержанию настоящей статьи. Автор признателен также д-ру С. де-Доминисису. Многие мои коллеги по Бирмингемскому университету оказали помощь в работе над данной статьей, а д-р А. Лейн сделал много ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lane A. M., Thomas R. G., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 257 (1958) (см. основной текст настоящей книги).
2. Wigner E. P., Eisenbud L., *Phys. Rev.*, **72**, 29 (1947).
3. Капур P. L., Peierls R. E., *Proc. Roy. Soc.*, **A166**, 277 (1938).
4. Bohr N., *Nature*, **141**, 326, 1096 (1938).
5. Bohr, Peierls, Placzek, *Nature*, **144**, 200 (1939).
6. Bohr N., *Nature*, **137**, 344 (1936).
7. Bohr N., *Science*, **86**, 161 (1947).
8. Breit G., Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **49**, 579 (1936).
9. Feshbach, Peaslee, Weisskopf, *Phys. Rev.*, **71**, 145 (1947).
10. Feshbach, Porter, Weisskopf, *Phys. Rev.*, **96**, 448 (1954).
11. Austern, Butler, McManus, *Phys. Rev.*, **92**, 350 (1953).
12. Butler S. T., *Proc. Roy. Soc.*, **A208**, 559 (1951).
13. Goldhaber M., Teller E., *Phys. Rev.*, **74**, 1046 (1948).
14. Steinwedel H., Jensen J. H. D., *Zs. Naturforsch.*, **5a**, 413 (1950).
15. Wilkinson D. H., *Physica*, **22**, 1039 (1956).
16. Peierls R. E., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **44**, 242 (1948).
17. Brown G. E., De Dominicis C. T., *Proc. Phys. Soc.*, **A72**, 70 (1958).
18. Friedman F. L., Weisskopf V. F., „Niels Bohr and the Development of Physics“, London, 1955, p. 134. (см. перевод: „Нильс Бор и развитие физики“, ИЛ, 1958).
19. Lane, Thomas, Wigner, *Phys. Rev.*, **98**, 693 (1955).
20. Bloch C., *Nucl. Phys.*, **3**, 137 (1957).
21. Thomas R. G., *Phys. Rev.*, **97**, 224 (1955).
22. Hughes, Zimmerman, Chrien, *Phys. Rev. Lett.*, **1**, 461 (1958).
23. Fields, Russell, Sachs, Wattenberg, *Phys. Rev.*, **71**, 308 (1947).
24. Seth, Hughes, Zimmerman, Garth, *Phys. Rev.*, **110**, 692 (1958).
25. Lane A. M., Lynn J. E., The widths and spacings of resonance levels, Harwell Report T/R 2210 (1957) (не опубликовано).
26. Seth R. K., Optical Model Conference, Tallahassee, Florida, March, 1959.
27. Bowcock J., *Proc. Phys. Soc.*, **A70**, 515 (1957).
28. Brown G. E., De Dominicis C. T., *Proc. Phys. Soc.*, **A70**, 668 (1957).
29. Bloch C., *Nucl. Phys.*, **4**, 503 (1957) (см. статью II настоящего Дополнения).
30. Brown, De Dominicis, Langer, *Ann. of Phys.*, **6**, 209 (1959).
31. De Dominicis C. T., *Journ. phys. rad.*, **19**, 1 (1958).
32. Langer J. S., Thesis, University of Birmingham, 1958.
33. Feshbach H., *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **8**, 44 (1958).
34. Brueckner, Eden, Francis, *Phys. Rev.*, **100**, 891 (1955).
35. Cini M., Fubini S., *Nuovo Cimento*, **2**, 75 (1955).

36. Lane A. M., Wandel C. F., Phys. Rev., 98, 1524 (1955).
37. Brueckner K. A., Phys. Rev., 103, 172 (1956).
38. Bohr, Mottelson, Pines, Phys. Rev., 110, 936 (1958).
39. Sano, Yoshida, Terasawa, Nucl. Phys., 6, 20 (1958).
40. Chase, Wilets, Edmonds, Phys. Rev., 110, 1080 (1958).
41. Wigner E. P., Ann. Math., 62, 548 (1955).
42. Verlet L., Gavoret J., Nuovo Cimento, 10, 505 (1958).
43. Beck F., Nucl. Phys., 9, 140 (1958/59).
44. Lane A. M., Lynn J. E., Nucl. Phys., 11, 646 (1959).
45. Cohen B. L., Phys. Rev., 100, 206 (1955).
46. Brown G. E., Levinger J. S., Proc. Phys. Soc., A71, 733 (1958).
47. Peaslee D. C., Phys. Rev., 88, 812 (1952).
48. Feshbach H., Ann. of Phys., 5, 357 (1958) (см. статью I настоящего Дополнения).

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие	5
Глава I. Введение	9
Глава II. Основные положения R-матричной теории	15
§ 1. Схема формальной теории	15
§ 2. Предположения, лежащие в основе теории	18
§ 3. Механизм составного ядра в R-матричной теории	21
§ 4. Механизм прямых процессов в R-матричной теории	23
Глава III. Ядерное конфигурационное пространство и типы волновых функций	28
§ 1. Определения и обозначения	28
§ 2. Волновые функции во внешней области	34
§ 3. Волновые функции во внутренней области	43
§ 4. Волновые функции на граничной поверхности \mathcal{S}	44
Глава IV. Упругое рассеяние частиц с нулевым спином в центрально-симметричном поле	49
§ 1. Вывод формулы для сечения	49
§ 2. Зависимость R-функции от граничного условия и радиуса взаимодействия	56
§ 3. Случай прямоугольной потенциальной ямы	59
§ 4. Определение резонансного уровня	62
§ 5. Разложение для производной от волновой функции	63
§ 6. Свойства R-функций	65
§ 7. Рассмотрение связанных состояний	78
§ 8. Аналитические свойства функции столкновений на комплексной плоскости; условие причинности	79
§ 9. Некоторые особенности энергетической зависимости сдвигов фаз δ_l	83

Глава V. R-матрица в общем случае многих каналов . . .	88
§ 1. Использование теоремы Грина	88
§ 2. Основное соотношение R-матричной теории	90
§ 3. Другие выводы основного соотношения R-матричной теории	93
Глава VI. Матрица столкновений U	97
§ 1. Определение	97
§ 2. Некоторые общие свойства матрицы U	98
§ 3. Связь между матрицами столкновений, выраженными в системах обозначения канала $\{aSLJM\}$ и $\{aSL\gamma m\}$	104
§ 4. Обобщенные матрицы столкновений	105
Глава VII. Соотношение между R-матрицей и матрицей столкновений	109
§ 1. Вывод соотношения между матрицами R и U	109
§ 2. Проверка свойств симметрии и унитарности матрицы столкновений	111
§ 3. Матрица столкновений в случае двух каналов	113
§ 4. Включение неполяризующих потенциалов	114
Глава VIII. Соотношение между сечениями и элементами матрицы столкновений	118
§ 1. Амплитуды рассеяния	118
§ 2. Дифференциальные сечения	120
§ 3. Интегральные и полные сечения	123
§ 4. Соотношения между полным сечением и мнимой частью амплитуды рассеяния вперед	124
Глава IX. Другая форма соотношения между R-матрицей и матрицей столкновений; разложение матрицы столкновений по собственным значениям	126
§ 1. Разложение матрицы столкновений по вещественным собственным значениям	126
§ 2. Разложение матрицы столкновений по комплексным собственным значениям	133

Глава X. Исключение каналов по методу Тейхмана — Вигнера	147
§ 1. Приведенная R -матрица (матрица \mathcal{R})	149
§ 2. Исключение каналов с отрицательной энергией	152
§ 3. Исключение каналов реакции	154
Глава XI. Применение R -матричной теории к вычислению средних сечений	157
§ 1. Следствия предположения Ньютона о сильной корреляции между величинами $\gamma_{\lambda c}$	160
§ 2. Следствия предположения Бете о случайном распределении знаков $\gamma_{\lambda c}$	163
§ 3. Средние значения	175
§ 4. Феноменологические формы полюсной силовой функции	186
§ 5. Теоретическая форма полюсной силовой функции для нуклонных каналов	195
§ 6. Учет неточности предположения о случайности знаков $\gamma_{\lambda c}$	204
Глава XII. Применение R -матричной теории к описанию изолированных уровней	210
§ 1. Приближение изолированного уровня	212
§ 2. Интерпретация приближения изолированного уровня	223
§ 3. Практическое применение приближения изолированного уровня с $R^0L^0 = 0$	229
§ 4. Приближение двух уровней	236
§ 5. Интерференция между изолированными уровнями	238
Глава XIII. Специальные вопросы	245
§ 1. Поведение сечения вблизи порога	245
§ 2. Распад на три части как два последовательных распада на две части	251
§ 3. Описание реакций с фотонными каналами	257
§ 4. Альфа-распад	270
§ 5. Правила отбора по изотопическому спину для реакций с легкими ядрами	278

Приложение. Кулоновские волновые функции и волновые функции нейтронов	295
Литература	305

ДОПОЛНЕНИЕ

I. Г. Фешбах. Единая теория ядерных реакций	315
§ 1. Введение	315
§ 2. Обобщенный оптический потенциал	321
§ 3. Резонансная теория упругого рассеяния	327
§ 4. Модель комплексного потенциала для чисто упругого рассеяния	334
§ 5. Неупругое рассеяние	339
§ 6. Влияние твердой сердцевины потенциала парного взаимодействия и тождественности частиц; приближение высоких энергий	349
Литература	357
II. К. Блох. Общая формулировка теории ядерных реакций	360
§ 1. Введение	360
§ 2. Простой пример	362
§ 3. Общая теория	368
§ 4. Введение базиса во внутренней области	374
§ 5. Резонансные реакции; два частных базиса	375
§ 6. Оптическая модель и прямые взаимодействия	383
Приложение. Решение в одномерном случае	390
Литература	392
III. Дж. Браун. Обоснование оптической модели ядра и прямые взаимодействия	393
1. Введение	393
2. Дисперсионная теория Капура — Пайерлса	400
§ 1. Рассеяние на потенциальной яме	400
§ 2. Случай многих тел	410
3. Оптическая модель и прямые взаимодействия	421
§ 1. Феноменологическая теория	421
§ 2. Теория Лейна, Томаса и Вигнера	422

§ 3. Рассеяние при малых энергиях	430
§ 4. Простой случай рассеяния	436
§ 5. Рассеяние в формализме функций Грина	437
§ 6. Теория возмущений первого рода	440
§ 7. Теория возмущений второго рода	449
§ 8. Специальные модели	454
4. Прямые взаимодействия в дипольном фотоэффекте и в радиационном захвате	457
5. Обсуждение других формализмов	434
Литература	468

А. Лейн и Р. Томас
ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Редактор *С. И. Ларзи*
Художник *М. Г. Ровенский*
Художеств. ред. *Е. И. Подмарькова*
Технический редактор *С. В. Приданцева*
Корректор *Т. П. Пашковская*

Сдано в производство 23/V 1960 г.
Подписано к печати 31/X 1960 г.
Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32} = 7,4$ бум. л. 24,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 22,4. Изд. № 2/5476.
Цена 17 р. 70 к. С 1/I 1961 г. цена 1 р. 77 к.
Зак. 1475.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2.
Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29