

$$n_B = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{k_B T} - 1}}$$

$$n_F = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{k_B T} + 1}}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ДВУХ СТАТИСТИКАХ МЕЖДУ ДВУМЯ ГЛАВАМИ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА — НАУКА О КОЛЛЕКТИВАХ АТОМНЫХ ЧАСТИЦ

Зная законы движения отдельной частицы, совсем непросто установить законы, управляющие поведением коллектива — макроскопической совокупности частиц... Это как в жизни: зная, как ведут себя отдельные люди, трудно предположить, что будет делать толпа.

Поведение коллектива нельзя описать в тех же терминах, что и поведение отдельной частицы. Нельзя, например, проследить путь, проходимый каждой частицей. Их для этого слишком много. Приходится довольствоваться статистическими приемами — вычислять среднюю скорость, среднюю энергию и тому подобное. Этим уже более ста лет занимается специальная область физики — статистическая физика, или попросту статистика. Но сравнительно недавно, лет тридцать назад, в эту область вторглись идеи квантовой механики и родилась новая наука о коллективах частиц — *квантовая статистика*. Квантовая статистика не отменила классическую. Она указала последней ее место. На этом нам придется еще остановиться, но, забегая вперед, отметим, что, как правило, классиче-

ская статистика — предельный случай квантовой — справедлива при высоких температурах. Низкие температуры безраздельно принадлежат квантовой статистике¹⁾. Правда, слово «низкие» надо понимать очень условно. Если интересоваться, например, свойствами звездного вещества, то «низкой» придется считать температуру в сотни тысяч градусов...

Простейший объект исследования физической статистики — газ — совокупность слабо взаимодействующих, редко сталкивающихся друг с другом частиц. Правда, если мы захотим изучать с помощью газа законы квантовой статистики, то это удастся отнюдь не всегда; как правило, раньше, чем проявятся квантовые эффекты, газ превратится в жидкость, а потом и вовсе затвердеет.

Газы квазичастиц составляют примечательное исключение. Они существуют в широком диапазоне температур, и, как правило, их квантовые свойства проявляются в обычных (человеческих) условиях.

ИМПУЛЬСНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Молекулы газа находятся в непрерывном движении. Мерой их движения, как известно, является абсолютная температура — температура, отсчитываемая от абсолютного нуля. Средняя скорость молекулы тем больше, чем выше температура, а средняя кинетическая энергия молекулы газа попросту пропорциональна температуре. Представим себе, что мы хотим проверить это хорошо известное обстоятельство. Для этого надо знать, как движутся все молекулы газа. Измеряя скорость отдельной молекулы и произведя огромное количество замеров, мы, вычислив среднюю скорость,

¹⁾ Поясним: классическая статистика — менее точная наука, чем квантовая. Однако при достаточно высоких температурах, как правило, ошибка пренебрежимо мала. С понижением температуры ошибка при пользовании законами классической статистики возрастает и приходится пользоваться квантовой статистикой. Может возникнуть естественный вопрос: зачем пользоваться неточной классической статистикой, если есть более точная — квантовая? Классическая существенно проще, а ошибка очень часто несущественна.

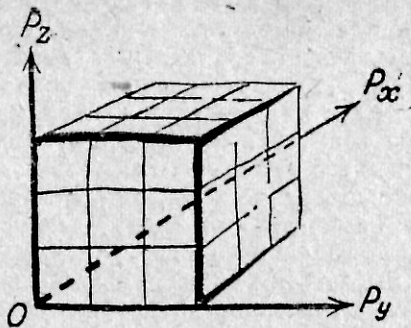


Рис. 14.

легко установили бы этот факт. Но как записать результаты замеров скоростей молекул? Пожалуй, удобно поступить следующим образом.

Введем систему координат, изображенную на рис. 14.

На осях отложим значения проекций импульса p . Любая точка в этом трехмерном пространстве изображает определенное значение импульса не только по величине, но и по направлению. В частности, начало координат изображает импульс, равный нулю, — импульс неподвижной частицы. Получившееся импульсное пространство¹⁾ разобьем на маленькие параллелепипеды, каждая грань каждого из которых соответствует, скажем, точности измерения импульса. Теперь, измерив значение импульса, поставим точку в соответствующую трехмерную клеточку. Чем чаще встречаются частицы с тем или иным импульсом, тем больше точек будет в соответствующей клеточке импульсного пространства.

Производя замеры достаточно долго и используя возможно более точный прибор, мы пришли бы к картине, изображенной на рис. 15, и установили бы:

— распределение точек в импульсном пространстве обладает сферической симметрией;

¹⁾ Мы уже вводили такой термин. Надеемся, он не может вызвать недоразумений. Заметим: импульсное пространство столь же объективно, как и обычное пространство, в котором мы движемся и живем, хотя расстояния в нем измеряются в г·см/с.

— вблизи начала координат, пока расстояние от начала координат меньше $\sqrt{2Mk_B T}$ (M — масса частицы), газ точек наиболее плотен;

— дальнейшее разрежение идет очень быстро.

Число точек в клеточке импульсного пространства, если сделать клеточки достаточно маленькими, изображает число частиц с определенным значением импульса. Это число, конечно, является функцией импульса и носит название *функции распределения*, так как характеризует распределение частиц газа по импульсу. Функция распределения показывает, какая часть всех частиц газа имеет тот или другой импульс. Итак, рис. 15 есть своеобразное изображение функции распределения.

Производя «эксперименты» (измерение импульсов и нанесение точек в импульсном пространстве) при различных температурах, мы убедимся, что распределение частиц зависит от температуры. С повышением температуры «облако» расширяется, а его плотность падает; с понижением температуры, наоборот, облако стягивается к началу координат, плотность его повышается. Другими словами, с увеличением температуры увеличивается количество быстрых частиц, а с понижением — медленных.

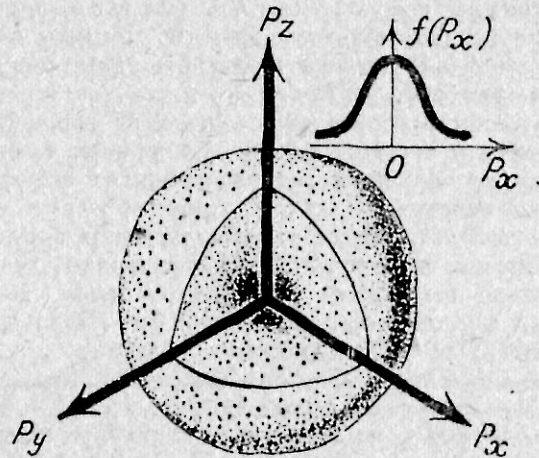


Рис. 15.

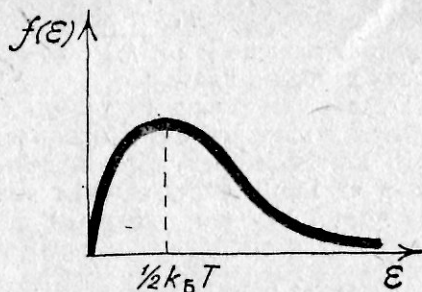


Рис. 16.

Может показаться, что рис. 15, на котором облако наиболее плотно вблизи начала координат, противоречит правильному убеждению в том, что большинство частиц имеет энергию, близкую к $k_B T$ (их импульс порядка $\sqrt{2Mk_B T}$). Чтобы выпутаться из противоречия, надо вспомнить: наш рисунок изображает распределение частиц не только по величине импульса, но и по его направлению.

Подсчитав число частиц с одинаковой энергией, движущихся в различных направлениях, и построив соответствующий график; мы убедимся, что функция распределения (как функция энергии ϵ) имеет максимум при $\epsilon = \frac{1}{2} k_B T$ в соответствии с нашими представлениями (рис. 16).

Функция распределения — одна из важнейших характеристик системы частиц. Ее знание, т. е. знание зависимости функции распределения от импульса, позволяет рассчитать самые разнообразные свойства газа — давление, теплоемкость, среднюю скорость — и, в частности, вывести, а не постулировать знаменитое уравнение состояния идеального газа ($PV = RT$).

Для классической статистики все идеальные газы элементарных частиц одинаковы. Различие между газами, наблюдаемое в природе, объясняется только различием в структуре их молекул.

Мы не будем на этом останавливаться, так как нас интересуют газы квазичастиц, а квазичастицы по определению элементарны.

ИЗОТОПЫ ГЕЛИЯ ПОМОГАЮТ ПОНЯТЬ КВАНТОВУЮ СТАТИСТИКУ

Для того чтобы продвинуться дальше, опишем результаты такого мысленного эксперимента. В двух одинаковых сосудах объемом V поместим одинаковое количество N атомов He. Но один сосуд будет наполнен атомами He⁴, а другой He³.

Символом He⁴ обозначается обычный тяжелый изотоп гелия, а символом He³ — легкий. Оба изотопа гелия химически совершенно тождественны, как и подобает изотопам, а отличаются только тем, что в ядре He³ не хватает одного нейтрона по сравнению с ядром He⁴. Это делает его на 25% легче. Есть еще одно важное отличие между атомами He⁴ и He³, но о нем позже.

Построим функцию распределения атомов гелия при разных температурах. Казалось бы, результаты измерений в обоих сосудах должны быть тождественны, во всяком случае именно это утверждает классическая статистика. Однако с понижением температуры мы заметим систематически нарастающее различие функций распределений атомов He⁴ и He³. Правда, различие в свойствах изотопов гелия станет ощутимым при очень-очень низкой температуре — при температуре в несколько сотых градуса (по шкале Кельвина). Эта цифра показывает условность описываемого эксперимента. Значительно раньше, чем мы достигаем температур порядка 10^{-2} K, гелий превратится в жидкость, и нам придется прекратить эксперимент. Но ведь это *мысленный* эксперимент!

Мы назвали температуру, при которой различие в свойствах He⁴ и He³ делается заметным. Откуда мы ее взяли? Приведем формулу, происхождение которой поясним ниже.

Квантовые явления (а, конечно, все различие в поведении He⁴ и He³ объясняется квантовыми эффектами) существенны тогда, когда температура газа порядка или ниже величины

$$T_0 = \frac{1}{k_B} \frac{h^2}{2M} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}.$$

Температура T_0 имеет несколько странное наименование. Ее называют *температурой вырождения*.

А газ при температуре, которая ниже температуры вырождения, — *вырожденным*. Если вместо N/V подставить величину $2,7 \cdot 10^{19} \text{ 1/см}^3$, а вместо M — массу атома гелия, то получим указанную выше температуру ($T_0 \approx 10^{-2} \text{ К}$). Для N/V мы выбрали значение, соответствующее атмосферному давлению при комнатной температуре. Другими словами, начиная эксперимент при комнатной температуре, мы заполнили сосуды гелием при атмосферном давлении.

Откуда же взялась приведенная здесь формула? Чтобы понять ее происхождение, придется обратиться к соотношению неопределенности (см. формулу (11)).

Среднее расстояние между частицами в газе равно $(N/V)^{-1/3}$, это и есть неопределенность координаты ($\Delta x \approx (N/V)^{-1/3}$). Следовательно, неопределенность импульса $\Delta p_x \approx \hbar (N/V)^{1/3}$. В классическом газе, т. е. в газе при высокой температуре, средняя энергия частицы равна $3/2 k_B T$, а значит, средний импульс порядка $\sqrt{M k_B T}$. С понижением температуры средний импульс уменьшается, а минимальная неопределенность импульса $(\Delta p_x)_{\min} \approx \hbar \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$ не зависит от температуры. Найдется такая температура, начиная с которой неопределенность импульса будет больше среднего импульса. Температура, при которой средний импульс равен $(\Delta p_x)_{\min}$, и есть температура вырождения T_0 . Естественно, что если температура близка к T_0 , а тем более если меньше ее, то квантовыми эффектами пренебречь нельзя.

БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

Продолжим наши наблюдения над изотопами гелия. При понижении температуры функция распределения атомов He^3 по импульсам будет непрерывно деформироваться, все существеннее отличаясь от классической. Ее вид при абсолютном нуле температуры и при температурах значительно ниже T_0 мы рассмотрим чуть позже.

Займемся пока тяжелым изотопом гелия. Производя эксперименты при низких температурах (а низкими мы теперь будем называть температуры ниже температуры вырождения), мы обнаружим удивительное

обстоятельство, которое заставит нас десятки раз повторять опыт. Из замкнутого сосуда исчезают молекулы! Молекулы исчезают *внутри* сосуда! Прежде чем пытаться найти разгадку этого явления — явления, которое может подвергнуть сомнению нашу уверенность в неисчерпаемости материи, опишем его чуть-чуть подробнее.

Начиная с температуры $T_{\text{БЭ}} \approx 4,4 T_0$, число молекул газа в сосуде (которое мы определяем, пересчитывая все движущиеся молекулы) начинает уменьшаться, причем можно установить закон изменения этого числа с температурой: $N_T = N \left(\frac{T}{T_{\text{БЭ}}}\right)^{3/2}$. При аб-

солютном нуле частицы не обнаруживаются вовсе... В чем дело? Наблюдательный читатель, может быть, обратил внимание на слова в скобках: «которое мы определяем, пересчитывая все движущиеся молекулы». Это и есть разгадка. Мы наблюдаем только движущиеся частицы. При высоких температурах неподвижных частиц нет совсем (точнее их, *бесконечно мало*), но, начиная с температуры, равной $T_{\text{БЭ}}$, *конечное число* частиц имеет импульс, равный нулю¹⁾. При абсолютном нуле температуры все частицы газа находятся в этом состоянии. Не надо думать, что частицы с импульсом, равным нулю, *лежат* на дне сосуда. Вспомните соотношение неопределенности. Раз они имеют определенный импульс (равный нулю), то, следовательно, их координата (т. е. их положение в сосуде) вовсе не определена. Они находятся где-то в сосуде, но где... не только нельзя сказать, но и нельзя задать такой вопрос — он не имеет смысла.

Описанное здесь явление носит название *бозе-эйнштейновской конденсации*. С обычной конденсацией, например газа в жидкость, это явление имеет весьма мало общего.

Может показаться, что мысленный эксперимент нарочно поставлен так, чтобы обнаружить кажущееся исчезновение частиц. Конечно, можно было бы каж-

¹⁾ Согласно классической статистике при сколь угодно низкой температуре число покоящихся частиц бесконечно мало и только при $T = 0$ все частицы неподвижны.

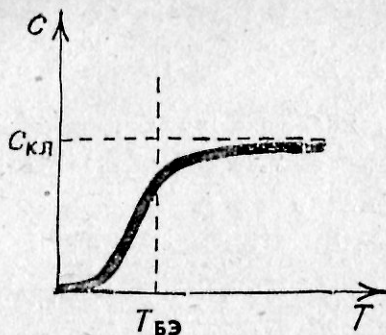


Рис. 17.

дый раз взвешивать сосуд и убеждаться, что все частицы на месте. Но все иные способы исследования газа, кроме взвешивания, действительно показали бы «исчезновение» частиц. В этом смысле особенно наглядно измерение теплоемкости. Резкое уменьшение теплоемкости C ниже температуры $T_{БЭ}$ — следствие конденсации частиц — перехода их в состояние с импульсом, равным нулю (рис. 17).

ФЕРМИ-ДИРАКОВСКОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Функция распределения атомов He^3 по импульсам при низких температурах столь разительно отличается от функции распределения атомов тяжелого изотопа, что просто поражает: неужели это атомы одного химического элемента?! Особенно разительно отличие при абсолютном нуле температуры. Действительно, при $T = 0$ атомы He^3 заполняют в импульсном пространстве сферу (рис. 18). По имени Энрико Ферми ее

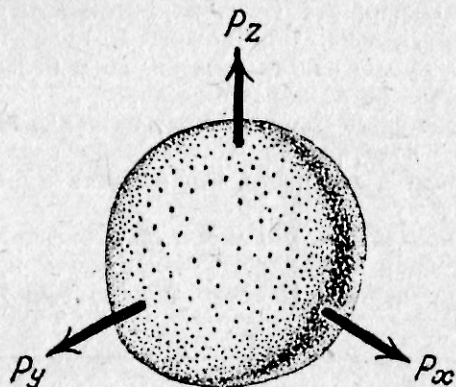


Рис. 18.

называют ферми-сферой. Радиус ферми-сферы тем больше, чем больше плотность частиц. Энергия частиц, расположенных на поверхности ферми-сферы, ϵ_F (ее называют энергией Ферми) приблизительно равна температуре вырождения, умноженной на постоянную Больцмана, а средняя энергия частицы газа равна $3/5 \epsilon_F$ — по атомным масштабам большая величина. Температуру $T_F = \epsilon_F/k_B$ часто называют фермиевской температурой.

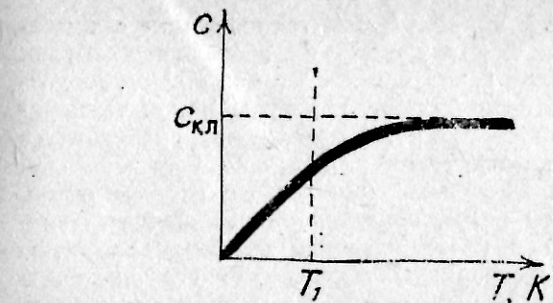


Рис. 19.

Своеобразное распределение частиц по импульсам приводит, естественно, к своеобразным свойствам газа как целого. Если измерить (мысленно — мы по-прежнему не учитываем ожигения) теплоемкость He^3 в широком интервале температур, то получим результат, изображенный на рис. 19. Следует обратить внимание

называют ферми-сферой. Радиус ферми-сферы тем больше, чем больше плотность частиц. Энергия частиц, расположенных на поверхности ферми-сферы, ϵ_F (ее называют энергией Ферми) приблизительно равна температуре вырождения, умноженной на постоянную Больцмана, а средняя энергия частицы газа равна $3/5 \epsilon_F$ — по атомным масштабам большая величина. Температуру $T_F = \epsilon_F/k_B$ часто называют фермиевской температурой.

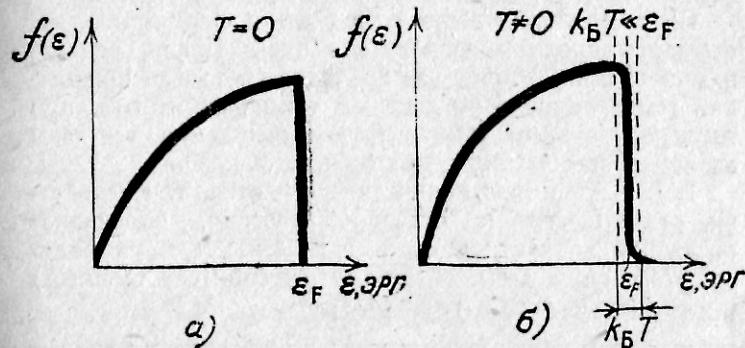


Рис. 20.

на характерный линейный ход теплоемкости с температурой при приближении к абсолютному нулю. Рис. 20 содержит *распределение* атомов He^3 по энергиям при абсолютном нуле температуры и при температуре, отличной от нуля, но малой по сравнению с фермиевской температурой ($k_B T \ll \epsilon_F$).

Описанное здесь поведение легкого изотопа гелия, как мы увидим ниже, является общим свойством некоторых газов и носит название ферми-дираковского вырождения. Подчеркнем также, что все сказанное имеет непосредственное отношение к газу электронов.

ФЕРМИОНЫ И БОЗОНЫ

Различие между двумя изотопами гелия так существенно, что не может не возникнуть естественный вопрос о его причине. В чем дело? Неужели причина только в различии масс? Это не так. Существуют только *две* манеры вести себя, или, выражаясь официальным языком, существуют только две статистики. Они по имени ученых, их открывших, получили название: *статистика Бозе — Эйнштейна* (ее законам подчиняются, в частности, атомы He^4) и *статистика Ферми — Дирака* (атомы He^3 подчинены ей). Газ частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, называют бозе-газом, а его частицы — *бозонами*. Газ частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, — ферми-газом, а частицы его — *фермионами*¹⁾.

Сколь различно ведут себя бозе- и ферми-газы, мы пытались проиллюстрировать выше. Надо, однако, помнить, что различие это проявляется только при низкой температуре. При высокой температуре, т. е. при температуре выше температуры вырождения, все газы элементарных частиц ведут себя одинаково.

Какое же микроскопическое свойство, т. е. свойство, относящееся к отдельной частице, определяет поведение коллектива частиц? Как мы уже упоминали, это — *спин частицы*, ее внутренний (собственный) момент количества движения.

¹⁾ Вспомните таблицу на стр. 40 и комментарии к ее последнему столбцу.

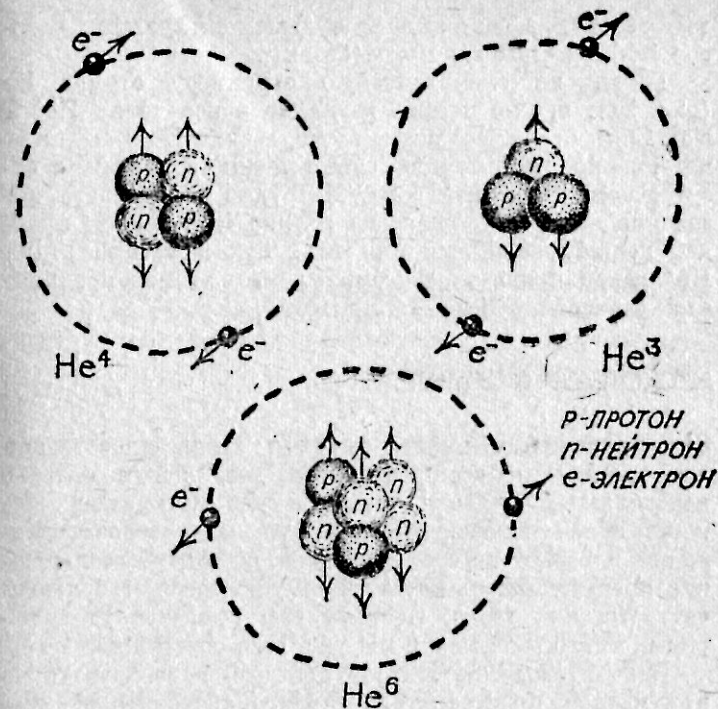


Рис. 21.

Можно сформулировать четкое правило:

Все частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми — Дирака, а с нулевым и целым — статистике Бозе — Эйнштейна.

Другими словами, частицы с целым или нулевым спином — бозоны, а с полуцелым — фермионы.

Причина различия в поведении фермионов и бозонов объясняется тем, что первые подчиняются принципу запрета Паули (см. 30), а вторые нет.

Запрет, не позволяющий скапливаться фермионам в одном состоянии, особенно ярко проявляется в их функции распределения при температуре, близкой к абсолютному нулю. При $T = 0$ он мешает всем части-

цам перейти в состояние с нулевым импульсом, которое так «охотно» занимают бозоны.

Глядя на схематическую структуру атомов He (рис. 21), можно понять различие в поведении He⁴ и He³. Спин атома He⁴ равен нулю, а спин He³ — половине. Разница в величине спина целиком связана с отсутствием у He³ нейтрона. Нетрудно предсказать поведение газа, состоящего из атомов He⁶. Такой, правда, нестабильный изотоп есть. Так как спин атома He⁶ равен нулю, то система из этих атомов подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна.

НЕСКОЛЬКО ФОРМУЛ

Это приложение между главами столь существенно для понимания всей книги, что мы, рискуя вызвать недовольство читателя, не любящего математику, решили привести несколько формул, физическое содержание которых, по существу дела, составляет содержание предыдущих разделов. Формулы требуют большей четкости, чем слова. Поэтому нам придется уточнить ряд понятий, о которых мы уже говорили выше.

В квантовой статистике принято использовать не импульсное пространство, а более абстрактное — шестимерное фазовое пространство. Осей координат в этом пространстве шесть: x, y, z, p_x, p_y, p_z . Соотношение неопределенности однозначно определяет объем ячейки этого пространства. Он равен $(2\pi\hbar)^3$.

Функцией распределения называется среднее число частиц в ячейке фазового пространства. Мы будем обозначать ее буквой n , придавая внизу индекс: «БЭ» — для бозонов и «ФД» — для фермионов. Хотя, как мы говорили, свойства функций распределения бозонов и фермионов существенно различаются, формулы, их выражающие, очень похожи. Равновесная функция распределения бозонов — функция Бозе — Эйнштейна:

$$n_{\text{БЭ}}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_{\text{Б}}T} - 1}. \quad (41)$$

Равновесная функция распределения фермионов —

функция Ферми — Дирака:

$$n_{\text{ФД}}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_{\text{Б}}T} + 1}. \quad (42)$$

Они отличаются только знаком перед единицей в знаменателе! Кроме уже известных нам величин (энергии $\varepsilon(\vec{p}) = p^2/2M$ и температуры T) в формулы (41) и (42) входит химический потенциал ζ . Его физический смысл станет ясным чуть ниже. Сначала познакомимся с тем, как, зная функцию распределения, вычислять интересующие нас макроскопические величины, например, число частиц N в сосуде объема V или их энергию \mathcal{E} :

$$N = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \iiint \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_{\text{Б}}T} \pm 1}, \quad (43)$$

$$\mathcal{E} = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \iiint \frac{\varepsilon(\vec{p}) dp_x dp_y dp_z}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_{\text{Б}}T} \pm 1}; \quad (44)$$

интегрирование ведется по всему импульсному пространству, $g = 2s + 1$, где s — спин частицы (напомним: у бозонов спин целый или нуль, а у фермионов полуцелый, у электронов $s = 1/2$ и $g = 2$). Если вы присмотритесь к формулам (43) и (44), то поймете их «конструкцию»: вычисление макроскопических величин означает суммирование вкладов в данную величину от каждой частицы, только суммирование ведется не по частицам, а по ячейкам фазового пространства. Появление множителей g и V обусловлено независимостью энергии частицы от ориентации спина и от координаты¹⁾.

Число частиц в сосуде задано (вспомните, с чего мы начинали мысленные эксперименты, описанные в этом приложении). Температура тоже считается заданной. Правда, ее можно менять, нагревая или охлаждающая стенки сосуда. Следовательно, равенство (43)

¹⁾ Подчеркнем (это будет важно в следующей главе): в области \vec{p} -пространства с объемом Δ помещается $\frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \Delta$ фермионов.

можно считать уравнением для определения химического потенциала ζ . Сказанное и определяет физический смысл химического потенциала. Он обеспечивает нормировку функции распределения¹⁾. Если бы существовал такой «фантастический» газ, число частиц в котором не сохраняется в замкнутом сосуде при изменении температуры, то химический потенциал у такого газа отсутствовал бы...

Придадим формулам (43) и (44) несколько более простой вид, перейдя в интегралах к сферической системе координат и проинтегрировав по углам:

$$N = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon v(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} \pm 1}, \quad \mathcal{E} = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon v(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} \pm 1}. \quad (45)$$

Величина

$$v(\varepsilon) = \frac{g V M^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3 \sqrt{2}} \varepsilon^{1/2} \quad (46)$$

— плотность состояния на интервал энергии $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$,

$$n(\varepsilon) = \frac{v(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} \pm 1} \quad (47)$$

— функция распределения частиц по энергиям. Мы многократно упоминали, что при высоких температурах господствуют законы классической статистики. Как же совершается предельный переход к высоким температурам в выписанных выше формулах? На первый взгляд — самым невероятным образом: надо пренебречь единицей в знаменателе. Дело в том, что согласно (43) при $T \gg T_0$, где T_0 — та самая температура вырождения, формулу для которой мы обсуждали раньше,

$$\zeta \approx \zeta_{\text{кл}} = -\frac{3}{2} T \ln \frac{T}{T_0}.$$

т. е., во-первых, $\zeta < 0$, а, во-вторых, $|\zeta| \gg T$, что и дает право отбросить единицу.

¹⁾ Этим не исчерпывается физический смысл химического потенциала. К сожалению, здесь нет возможности обсудить другие его роли.

Итак,

$$n_{\text{кл}}(\vec{p}) = e^{[\zeta - \varepsilon(\vec{p})]/k_B T}. \quad (48)$$

При высоких температурах среднее число частиц в ячейке фазового пространства мало, они «не мешают» друг другу, их квантовое взаимодействие (принцип Паули и т. п.) не проявляется, и именно поэтому справедлива классическая статистика.

Несколько слов о бозе-эйнштейновской конденсации и ферми-дираковском вырождении. Из формулы видно, что химический потенциал бозе-газа не может быть положительным. При $\zeta > 0$ число частиц $n_{\text{бэ}}$ в ячейках фазового пространства, для которых $\varepsilon(\vec{p}) < \zeta \neq 0$, сделалось бы отрицательным и $n_{\text{бэ}} = \infty$ при $\varepsilon(\vec{p}) = \zeta \neq 0$. Но согласно (43) или (45) ζ может обратиться в нуль. Температуру $T_{\text{бэ}}$, при которой это происходит, легко вычислить, положив $\zeta = 0$ в выражении для N :

$$N = \int_0^{\infty} \frac{v(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T_{\text{бэ}}} - 1}. \quad (49)$$

Значение $T_{\text{бэ}}$ мы уже приводили (см. стр. 111). Но что же будет при $T < T_{\text{бэ}}$? Число движущихся частиц, как мы знаем, при этом не сохраняется. Их с понижением температуры делается все меньше, а значит, $\zeta \equiv 0$ (рис. 22). Оказалось, что фантастический газ

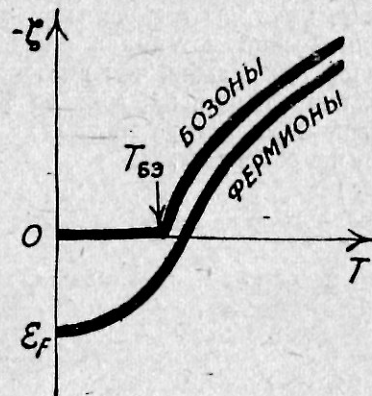


Рис. 22.

существует. Понимание явления, по-моему, не делает его менее фантастическим.

Понимание бозе-эйнштейновской конденсации помогает понять природу сверхтекучести и сверхпроводимости.

Для ферми-газа нет запрета на знак химического потенциала: при температуре, близкой T_0 , он спокойно меняет знак и... что с ним происходит при $T \rightarrow 0$?

Давайте аккуратно вычислим $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{(\epsilon - \zeta)/k_B T} + 1}$, считая, что ζ при $T = 0$ не равняется ни нулю, ни бесконечности (пусть $\zeta_{T \rightarrow 0} = \zeta_0$). Тогда

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{(\epsilon - \zeta)/k_B T} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{при } \epsilon < \zeta_0, \\ 0 & \text{при } \epsilon > \zeta_0. \end{cases} \quad (50)$$

Эту разрывную функцию называют *фермиевой ступенькой*. Отсюда видно, что химический потенциал при нуле температуры есть энергия Ферми ($\zeta_0 = \epsilon_F$). Рис. 20 изображает функцию Ферми — Дирака, умноженную на плотность состояний при $T = 0$ и при $T \ll T_F$. Используя первую из формул (45) (со знаком плюс конечно), а также формулу (46), легко найдем, что

$$\epsilon_F = \left(\frac{6\pi^2 N}{gV} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2M}. \quad (51)$$

В заключение вернемся к фотонам и фононам и сравним формулы (19) и (34) с формулами этого раздела. Мы видим: *фотоны* и *фононы* — *бозоны*. Естественно, их химический потенциал равен нулю, так как число фотонов тем больше, чем выше температура стенок полости, излучающих их, а число фононов тем больше, чем выше температура кристалла. Числа фотонов и фононов не сохраняются.

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{p} + 2\pi\hbar\vec{v}) &= \epsilon(\vec{p}) \\ \epsilon_F &= (3\pi^2 n_e)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e} \\ p_F &\approx \hbar/a = v_F m_e \\ v_F &\approx 10^8 \text{ см/сек.} \\ n_e &\approx Z/a^3 \end{aligned}$$

ГЛАВА 3 об электронах

ЭЛЕКТРОННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КРИСТАЛЛОВ

В сочетании слов «энергетический спектр» уже ощущается влияние квантовой механики. «Спектр» — из волновой картины, а «энергетический» — из корпускулярной. Приступая к изучению электронных свойств твердых тел, мы ставим перед собой несколько задач:

- понять, почему одни кристаллы — проводники — хорошо проводят ток, а другие — изоляторы — плохо;
- объяснить существование тел с промежуточными свойствами: полупроводников, полуметаллов;
- на нескольких примерах разобрать, как квантовая механика и квантовая статистика объясняют наблюдающиеся на эксперименте закономерности.

Проследивать историю развития представлений об электронных свойствах твердых тел мы не будем (мы не придерживались историчности и в предыдущих главах). Постараемся рассказать об электронных свойствах, оперируя сегодняшними представлениями и понятиями. Не имея возможности сколько-нибудь полно использовать математический аппарат квантовой теории, мы будем обращаться к аналогии — помощнице

интуиции. Надо признаться, что этот раздел потребует от читателя несколько больше усилий, чем предыдущие.

Электрон в кристалле находится в поле сил ионов, расположенных периодически в пространстве. Уже эта фраза сугубо «квантовая». Классический электрон находится или в поле одного иона, или в поле другого. Но квантовому электрону «не страшны» потенциальные барьеры — он относительно свободно может передвигаться от иона к иону. Этим (делокализацией, говоря научным языком) электрон в кристалле напоминает свободный электрон. У свободного электрона энергия ϵ — функция импульса \vec{p} . Теперь, чтобы избежать математического аппарата квантовой механики, воспользуемся соотношением де Бройля в его первоначальной форме: $\hbar \vec{k} = \vec{p}$, где \vec{k} , как и раньше, волновой вектор. В начале предыдущей главы, говоря о строении кристаллов, мы обратили внимание: периодический кристалл «создает» обратное пространство (\vec{k} -пространство), которое тоже периодически. В главе о фоновых (стр. 94) мы превратили его в периодическое \vec{p} -пространство. Все величины, зависящие от импульса, — периодические функции \vec{p} . Значит, энергия электрона в кристалле ϵ — периодическая функция \vec{p} .

Теперь подойдем к проблеме «с другой стороны». Электрон в изолированном атоме находится во вполне определенном состоянии. Энергию этого состояния изобразим горизонтальной линией, на которую можно «усадить» электрон (рис. 23). Теперь сблизим два атома — каждый со своей горизонтальной линией. Что с этими линиями произойдет, когда атомы сблизятся? Квантовомеханический расчет показывает, что линии немного раздвинутся. Они изображены одна над другой, так как в обоих состояниях (каждая линия — изображение энергии состояния) электрон «находится в обоих атомах сразу».

¹⁾ Для свободного электрона $\epsilon = p^2/2m = mv^2/2$, m — масса электрона; $\vec{p} = m\vec{v}$, \vec{v} — скорость электрона.

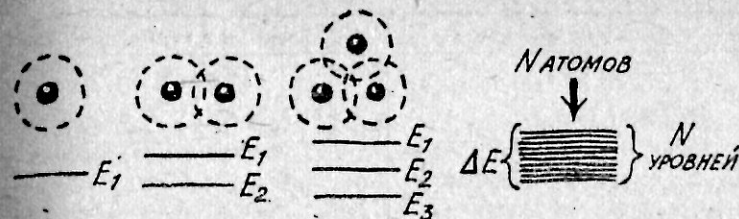


Рис. 23.

Теперь время сказать: «и так далее». Сближение N атомов приводит к тому, что каждое состояние расщепляется в N состояний. При этом нет необходимости, чтобы все атомы были близки друг другу: благодаря туннелированию электрон доберется до любого, переходя от атома к атому. Максимальное расщепление определяется ближайшими соседями. В кристалле объединено огромное количество атомов: в 1 см^3 около 10^{23} . Поэтому каждое атомное состояние в кристалле расщепляется в полосу или зону разрешенных значений энергии. Перенумеруем зоны: 1-я, 2-я, ..., j -я, ... Итак, задавая состояние электрона в кристалле, мы должны указать номер зоны, которой он принадлежит. Но ведь этого явно недостаточно. Как можно уточнить положение электрона в зоне? Так как появление зон вызвано способностью электрона перемещаться от атома к атому, то нет ничего удивительного в том, что его состояние в зоне зависит от импульса \vec{p} , причем, как мы говорили, зависит периодически. Чтобы быть точным, надо еще, задавая состояние электрона, указать направление его спина: по... ($s_z = 1/2$) или против... ($s_z = -1/2$). Часто для записи состояния электрона в кристалле пользуются такими обозначениями: $|j, \vec{p}, s_z\rangle$ — мы теперь знаем, что это значит.

Электрон в кристалле напоминает и электрон в атоме, и электрон в свободном от сил (эквипотенциальном) пространстве. Сходство со свободным электроном для нас здесь более существенно. Поэтому мы приведем таблицу, которая, конечно, требовала бы пояснений, но мы, понимая, что она — результат точной теории, будем ею пользоваться, «не рассуждая».

Свободный электрон	Электрон в кристалле
Состояние $ \vec{p}, s_z\rangle$	$ j, \vec{p}, s_z\rangle$
Энергия $p^2/2m$	$\epsilon_j(\vec{p}) = \epsilon_j(\vec{p} + 2\pi\hbar\vec{b})$
Скорость $\vec{v} = \vec{p}/m$	$\vec{v}_j = \partial\epsilon_j(\vec{p})/\partial\vec{p}$
Уравнение движения $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{вн}$
Закон сохранения импульса при столкновении двух электронов $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + 2\pi\hbar\vec{b}$

¹⁾ Индекс «вн» указывает, что изменение импульса электрона в кристалле определяется внешней силой, а не всей. Силы, действующие со стороны ионов, создав состояние электрона $|j, \vec{p}, s_z\rangle$ как бы исключались. Это — важное обстоятельство: $\epsilon_j(\vec{p})$ часто можно считать кинетической энергией электрона в кристалле. Но в действительности это — полная энергия в отсутствие внешних сил.

ПРОВОДНИК ИЛИ ИЗОЛЯТОР?

Итак, электрон в состоянии $|j, \vec{p}, s_z\rangle$ обладает энергией $\epsilon_{j,s_z}(\vec{p})$. Аргументы j, s_z и \vec{p} написаны по-разному, чтобы подчеркнуть, что j, s_z дискретны, а вектор \vec{p} принимает любое значение. Если ограничиваться физически неэквивалентными состояниями, достаточно использовать \vec{p} из первой зоны Бриллюэна (см. гл. 2, стр. 79). Функции $|j, \vec{p}, s_z\rangle$ и энергии $\epsilon_{j,s_z}(\vec{p})$ можно вычислить, используя какие-либо определенные предположения о взаимодействии электронов с ионами. Мы об этом немного расскажем, правда, совсем немного... Даже если $\epsilon_{j,s_z}(\vec{p})$ — известные функции, то о свойствах кристалла мы знаем еще очень мало... Как о каком-либо учреждении, познакомившись со списком должностей в нем, но не зная людей, занимающих штатные должности... Надо знать, как занимают состояния $|j, \vec{p}, s_z\rangle$ электроны.

Рассмотрим кристалл объема V , состоящий из \mathfrak{N} ячеек, т. е. $\mathfrak{N} = V/a^3$. Пусть в каждой ячейке кристалла Z электронов (для простых кристаллов Z — атомный

номер составляющих его атомов). Всего в кристалле $\mathfrak{N}Z$ электронов. Будем распределять их по зонам, считая, что энергия электрона не зависит от проекции его спина ($\epsilon_{j, \frac{1}{2}}(\vec{p}) \equiv \epsilon_{j, -\frac{1}{2}}(\vec{p})$). Тогда в каждом состоянии может находиться два электрона. Будем заполнять зоны, исходя из метода, использованного при заполнении атомных состояний: так, чтобы энергия была поменьше и чтобы не нарушался принцип Паули. Так как объем первой зоны Бриллюэна равен $(2\pi\hbar)^3/a^3$, то полностью заполняют все состояния в зоне $2V/a^3 = 2\mathfrak{N}$ электронов (см. стр. 79 и примечание на стр. 117). Таким образом, если Z — четное число, то может быть заполнено целое число зон, а если Z — нечетное, то обязательно одна зона останется полупустой (или окажется полуполной?).

Наличие или отсутствие частично заполненных зон имеет фундаментальное значение при ответе на вопрос, поставленный в заглавии этого раздела.

Допустим, что к кристаллу приложено электрическое поле. Ускоряясь под его действием, электрон увеличивает свою энергию, т. е. переходит на более высокий энергетический уровень. Однако процесс может происходить только в том случае, если такой уровень имеется и если он свободен. У кристаллов с частично заполненными зонами это осуществляется, а у кристаллов, у которых зоны либо полностью заполнены, либо пусты, — нет: свободные разрешенные уровни энергии отделены промежутком от занятых (рис. 24).

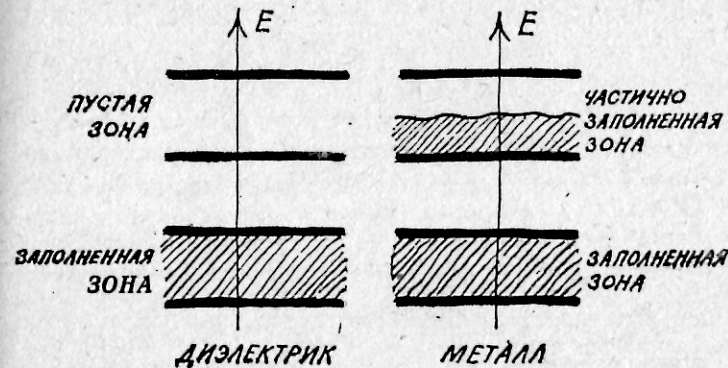


Рис. 24.

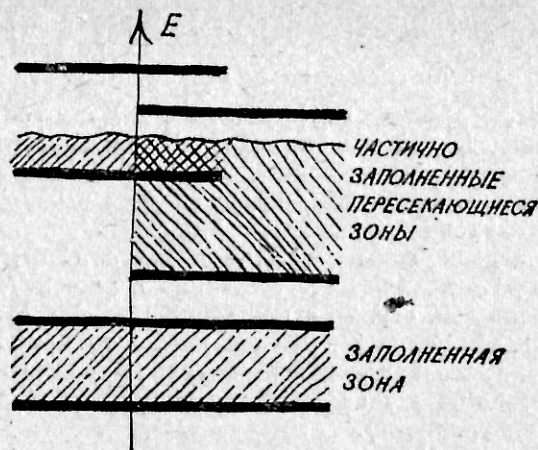


Рис. 25.

Казалось бы, можно сформулировать простое правило: четное Z — изолятор — диэлектрик, нечетное Z — проводник — металл.

Проверим теорию практикой: взглянем на первые клеточки таблицы Менделеева. Водород — диэлектрик, он состоит из молекул H_2 , два электрона на ячейку, одна заполненная зона; гелий — аналогичная ситуация: монокристалл (под давлением), два электрона на ячейку — диэлектрик; литий — три электрона на ячейку — металл! Пока эксперимент подтверждает теорию. Но бериллий разрушает «красивую» картину: у него четыре электрона на ячейку, а он — хороший проводник — металл. Дело в том, что мы переупростили схему: разрешенные энергетические полосы могут перекрываться (рис. 25). Поэтому простой критерий по четности числа Z отсутствует. Остается только сказать так:

— если у кристалла есть частично заполненные электронами зоны, то он — проводник — металл; если нет, то изолятор — диэлектрик. Перекрывание зон — частое явление. Проводники-металлы среди элементов встречаются чаще, чем изоляторы.

ПОЛУПРОВОДНИКИ, ПОЛУМЕТАЛЛЫ

Из предыдущего раздела ясно, что металлы могут проводить ток при абсолютном нуле температуры, и, как мы убедимся, эта их способность ухудшается с повышением температуры — сопротивление растет.

Кроме металлов, существует еще один класс кристаллических электронных проводников, к которому принадлежат элементы кремний, германий, селен, целый ряд соединений, например такие, как закись меди и т. д. Все они проводят электричество гораздо хуже, чем металлы, и называются поэтому *полупроводниками*. Кроме того, при абсолютном нуле температуры они совсем не могут проводить и являются диэлектриками. Их проводимость, в отличие от металлов, имеет тепловой характер. Это означает следующее.

Допустим, что в кристалле нижний край незаполненной энергетической полосы (ее называют зоной проводимости) очень близок к верхнему краю заполненной (ее называют валентной). Тогда достаточно сравнительно небольшой энергии теплового возбуждения, чтобы электрон перескочил из целиком заполненной нижней полосы в свободную верхнюю. Очевидно, что при абсолютном нуле, когда теплового возбуждения нет, в верхнюю полосу совсем не попадут электроны, и кристалл будет диэлектриком. С повышением температуры все больше электронов оказывается в верхней полосе. Естественно, что при этом проводящие свойства улучшаются, т. е. сопротивление падает.

Но не следует думать, что в полупроводнике только электроны в зоне проводимости переносят электрический заряд. Уходя из валентной зоны, электроны оставляют в ней свободные места. Следовательно, теперь уже оставшиеся электроны нижней полосы могут, ускоряясь, переходить на эти места. Ясно, что если при этом электрон переходит на свободное место, скажем, слева направо, само свободное место (дырка) перемещается справа налево, подобно тому как пузырь в воде поднимается вверх, тогда как на самом деле центр тяжести всей воды понижается. Электрон, как мы знаем, движется к аноду, т. е. к положительному полюсу. Следовательно, дырка движется к катоду, т. е. ведет себя как положительный заряд.

Дырки отличаются от электронов не только знаком заряда. Вклад электронов и дырок в общую электропроводность различен, потому что во внешнем поле они с разной скоростью переносят заряд, и ток от электронов не равен просто половине общего тока. Можно фактически отличить вклад электронов от вклада дырок. Для этого достаточно поместить полупроводник, по которому течет ток, в магнитное поле, перпендикулярное току. Тогда электроны будут отклоняться в одну сторону, а дырки — в другую. Отклонение зарядов в магнитном поле создает дополнительную разность потенциалов в направлении, перпендикулярном и к току и к полю (эффект Холла¹⁾). Эту разность потенциалов можно обнаружить гальванометром. Отклонение гальванометра в ту или другую сторону характеризует преобладание электронов или дырок. Различный знак эффекта Холла наблюдается и у металлов. Это показывает, что и у металлов дырки могут принимать участие в электропроводности.

До сих пор говорилось о полупроводниках, у которых есть и дырки и электроны. Однако оказывается, что большинство полупроводников обладает либо электронной, либо дырочной электропроводностью. Опыт показывает, что все подобные полупроводники содержат примеси других элементов. Какова же роль примесей?

Кристалл, содержащий примеси, уже не является идеальным. В неидеальных кристаллах, как следует из теории, имеются и полосы дозволенных значений энергий электронов, и отдельные уровни, расположенные между полосами (рис. 26). Эти уровни могут быть как занятыми, так и свободными. Допустим, что занятые уровни лежат очень близко от нижнего края свободной полосы. Тогда тепловое движение заставит часть электронов перейти в свободную полосу (зону проводимости) и получится полупроводник с чисто электронной проводимостью.

Так как в этом случае дырочные уровни соответствуют состояниям, связанным с ядром, то дырочная проводимость могла бы осуществляться путем переско-

¹⁾ Об эффекте Холла мы еще подробно расскажем (см. гл. 4).

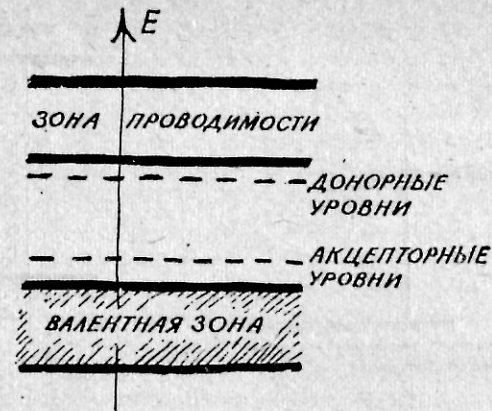


Рис. 26.

ков электронов с соседних атомов. Иногда так и бывает, и такую проводимость называют скачковой. Но чаще всего либо все примеси лишаются своих легко перемещающихся электронов, либо расстояния между атомами примеси велики: скачки маловероятны.

Если свободные уровни находятся вблизи верхнего края заполненной полосы, то тепловое движение перебросит часть электронов на эти уровни, а в заполненной полосе появятся дырки и получится дырочный полупроводник. Связанными с ядром атома окажутся электроны.

При освещении полупроводников видимым или ультрафиолетовым светом электроны могут, поглощая световую энергию, переходить в зону проводимости или уходить из заполненной полосы, оставляя подвижные дырки. Тогда во время освещения, даже и при низкой температуре, полупроводник обладает способностью проводить электрический ток. Это явление называется фотопроводимостью.

Освещая полупроводник монохроматическим светом, можно по фотопроводимости измерить расстояние (по шкале энергий) между занятыми и свободными состояниями. Используя формулу Бора, легко получим $\hbar\omega = \Delta\varepsilon$, где $\Delta\varepsilon$ — изменение энергии электрона. Это — один из основных методов исследования энергетической структуры полупроводников.

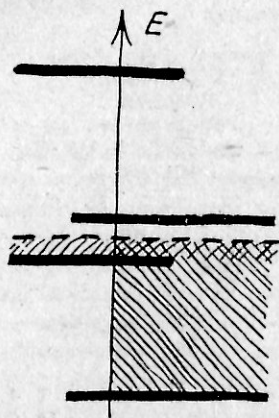


Рис. 27.

В последние годы выделяют еще один класс электронных проводников — полуметаллы. Полуметаллы — металлы, но такие, которые чуть не оказались диэлектриками или, точнее, полупроводниками. Характерный пример полуметалла — Bi . У него два атома на ячейку. Он мог бы быть диэлектриком, но валентная зона и зона проводимости чуть-чуть пересеклись (рис. 27). «Чуть-чуть» буквально! Числа электронов и дырок в Bi , конечно равные друг другу, в 10^5 раз меньше, чем в обычном хорошем металле.

Полупроводники и полуметаллы располагаются у границы между металлами и диэлектриками, но истинная граница проходит по бесщелевым полупроводникам, валентная зона и зона проводимости которых соприкасаются (рис. 28). Такие вещества сейчас открыты и активно изучаются.

ПОВЕРХНОСТЬ ФЕРМИ

В дальнейшем в этой главе будет идти речь только о металлах и их свойствах. Следовательно, о кристаллах с частично заполненной одной или несколькими

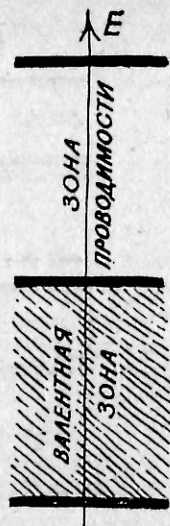


Рис. 28.

зонами. Постараемся представить себе импульсное пространство такого металла. Оно частично заполнено электронами. Поверхность, которая отделяет область, занятую электронами, от области, свободной от электронов, называют *поверхностью Ферми* — аналог ферми-сферы свободного газа фермионов. Поверхность Ферми — одна из изоэнергетических поверхностей¹⁾ $\epsilon_j(p) = \epsilon$. Так как $\epsilon_j(p)$ — периодическая функция импульса, то поверхности Ферми, как и другие изоэнергетические поверхности, могут быть простыми (например, у Na , K), могут быть и очень сложными.

Примеры поверхностей Ферми изображены на рис. 29. Для наглядности мы ограничимся первой зоной Бриллюэна, воображение должно помочь периодически ее продолжить. Один раз мы окажем содействие: сравните рис. 29 и 31 — на них изображена поверхность Ферми меди.

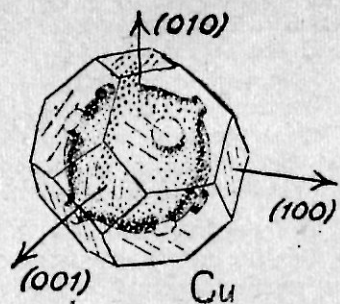
Так как внутри поверхности Ферми, вернее, той ее части, которая располагается в первой зоне Бриллюэна, помещаются все электроны из частично заполненной зоны — их называют электронами проводимости (пусть их n_e в 1 см^3), — то существует простое соотношение

$$n_e = 2\Delta_F / (2\pi\hbar)^3. \quad (52)$$

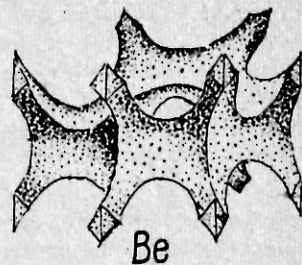
Здесь Δ_F — объем поверхности Ферми, приходящийся на первую зону Бриллюэна (см. примечание на стр. 117). Бывают ситуации, когда поверхность Ферми как бы вывернута наизнанку. В этом случае удобнее и более принято связывать объем поверхности Ферми с числом пустых мест в зоне. Их, как и в полупроводниках, называют дырками, а поверхность Ферми — дырочной. Дырки металла, как и дырки полупроводника, вносят в эффект Холла вклад, противоположный вкладу электронов проводимости.

Поверхность Ферми — очень важная характеристика электронов металла. Многие тонкие свойства металлов, особенно в магнитном поле, зависят от деталей ее строения.

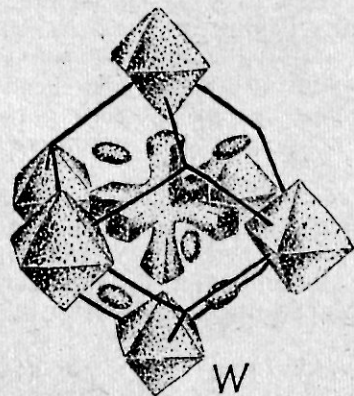
¹⁾ Изоэнергетическая поверхность — это поверхность равной энергии. Для свободных частиц изоэнергетическая поверхность — сфера радиуса $p = \sqrt{2Me}$.



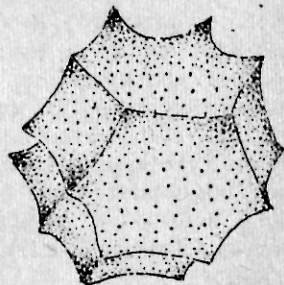
Cu



Be



W



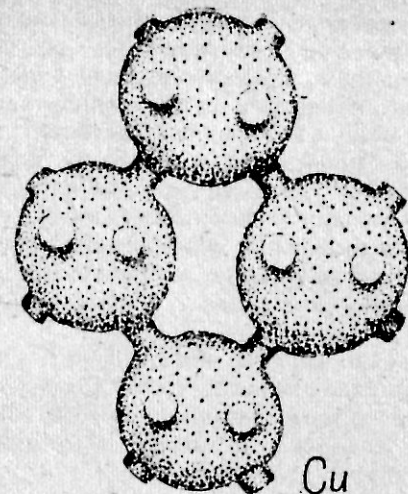
Al, In

Рис. 29.

Рис. 30.

Чтобы воссоздать ферми-поверхности различных металлов, ученые измеряли сопротивление металлов в магнитном поле, изучали поглощение радиоволн сантиметровой и миллиметровой диапазонов металлическими поверхностями, пропускали через металл ультразвук, вычерчивали сложную зависимость магнитного момента металла от магнитного поля. Эксперименты производились в самых сложных условиях: при температурах вблизи абсолютного нуля, в огромных магнитных полях, в труднодоступном частотном диапазоне. Созданы справочники поверхностей Ферми, продолжается уточнение деталей, расширяется, а по пути завершается, диапазон изученных металлов.

В процессе изучения электронного энергетического спектра была понята (во всяком случае в принципе)



Cu

Рис. 31.

причина того, почему одни поверхности так просты (Na, K), а другие сложны.

Забудем на минуту об ионах. Тогда электрон проводимости движется в пустом пространстве, а движение свободного электрона особенно напоминает распространение волны. Чтобы «включить» воображение, будем представлять себе волну в океане. Ионы промоделируем сваями, вбитыми в дно океана. От каждого ряда свай волна немного отражается. Если отражение происходит каждый раз в одной и той же фазе, то отраженные волны взаимно усиливаются. Очень скоро амплитуда волны, отраженной от решетки свай, становится равной амплитуде падающей волны. Ясно, что после этого отдельная волна уже не распространяется, так как ей навстречу бежит волна той же амплитуды. Фактически уже нельзя отличить падающую бегущую волну от отраженной, а получается одна результирующая волна, которая называется стоячей. Чтобы получилась стоячая волна, отражение от последовательных рядов свай должно происходить всегда в одной и той же фазе, а для этого нужно, чтобы полудлина

волны либо совпадала с расстоянием между сваями, либо была в два, три, четыре и т. д. раза меньше.

Итак, мы видим, если происходит интерференция волн, то волновая картина существенно трансформируется по сравнению со свободной частицей, а если интерференция не происходит, то влияние ионов (свай) не слишком велико. Сформулируем на корпускулярном языке, но не условие возможности интерференции, а условие ее невозможности. Интерференция невозможна, если импульс электрона меньше $\pi\hbar/a$. Здесь a — наименьшее расстояние между «плоскостями обратной решетки».

Максимальный импульс имеют фермиевские электроны. Их импульс равен ¹⁾ $p_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}$. Условие невозможности интерференции, а вместе с этим условие простоты поверхности Ферми в кубических кристаллах выглядит так:

$$n_e a^3 < \pi/3.$$

Для щелочных металлов (кроме лития) это условие выполнено. Их поверхности Ферми — сферы.

Остается понять (прежде чем закончить раздел), почему ионы можно рассматривать как малое возмущение (на этом построено вышеприведенное рассуждение). Главным образом потому, что их совокупное действие нейтрализуется электронами — в целом заряд металла равен нулю.

ЭЛЕКТРОНЫ ПРОВОДИМОСТИ — ВЫРОЖДЕННЫЙ ФЕРМИ-ГАЗ

Сказанное в конце предыдущего раздела о сравнительно слабом влиянии ионов на движение электронов позволяет с ними обращаться, как с частицами, двигающимися в свободном пространстве²⁾. Роль ионов сво-

¹⁾ Это выражение получено из формулы (52). Для свободных электронов $\Delta_F = \frac{4\pi}{3} p_F^3$ (см. также (51)).

²⁾ Конечно, такой подход — грубая модель. Многие свойства металлов, особенно, как мы говорили, под воздействием магнитного поля, не могут быть объяснены в рамках этой модели. Но те, о которых речь пойдет ниже, не слишком чувствительны к тонкостям. Главное для них — квантовые свойства газа электронов.

дится к удерживанию электронов в кристалле. Чтобы удалить электрон из металла, надо добавить ему энергии. Если это делается путем поглощения фотона, то наблюдается фотоэффект — мы об этом упоминали в первой главе.

Итак, для нас здесь и в следующей главе электроны — обыкновенные частицы. Энергия ϵ есть $p^2/2m$, где $m \approx 10^{-27}$ г. Электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака. Мы можем воспользоваться формулой (51) и подсчитать их энергию Ферми ($g = 2$, $N/V = Z/a^3 = n_e$):

$$\epsilon_F = (3\pi^2 Z)^{2/3} \hbar^2 / 2a^2 m. \quad (53)$$

Так как размеры ячейки кристалла приблизительно совпадают с размерами атома, то удобно a выразить в боровских радиусах: $a = (\hbar^2/m\epsilon^2)\beta$ (β — безразмерный параметр, равный нескольким единицам). Таким образом,

$$\epsilon_F = \frac{(3\pi^2 Z)^{2/3} m\epsilon^4}{\beta^2 2\hbar^2}, \quad (54)$$

$m\epsilon^4/2\hbar^2 \approx 13,53$ эВ (см. гл. 1), и мы видим, что энергия Ферми — атомного масштаба. Обычно ¹⁾ эпитет «атомный» используется вместо «микроскопический», «маленький». Здесь, скорее наоборот, мы написали выражение для ϵ_F в такой форме, чтобы подчеркнуть: энергия Ферми очень велика. Если с помощью (54) вычислять температуру Ферми $T_F = \epsilon_F/k_B$, то мы получим результат, который, несомненно, заставит нас насторожиться: температура вырождения электронного газа в металле порядка 10^5 К. Это означает, что электронный газ в металле уже при обычной комнатной температуре, да и вплоть до температуры плавления, всегда сильно вырожден, т. е. любой кусок металла — естественный «хранитель» вырожденного, «квантового» газа со всеми его особенностями и свойствами.

Представление об электронном газе как о вырожденном газе, подчиняющемся статистике Ферми — Дирака, — основа наших знаний о физике металлического состояния. Исходя из того, что электронный газ — вы-

¹⁾ Только не в словосочетании «атомный взрыв».

рожденный ферми-газ, удалось объяснить разнообразные свойства металлов (температурную зависимость сопротивления, термоэлектрические, магнитные и гальвано-магнитные явления и т. д.).

Уже с конца XIX века было известно, что в металле (в отличие от диэлектриков) есть свободные электроны. Было ясно, что их много: один-два на кристаллическую ячейку. Иначе нельзя было бы объяснить большую электропроводность металла, его блеск, т. е. способность отражать свет.

Но был один простой экспериментальный факт, который не укладывался в стройную картину. Теплоемкость. Теплоемкость металла, казалось бы, если верить формулам классической статистики, должна быть больше, чем теплоемкость диэлектриков (изоляторов). Причем не на проценты, а, как показали расчеты, более чем в полтора раза¹⁾. Не заметить этого нельзя. Но измеренная теплоемкость металлов упорно совпадала с теплоемкостью диэлектриков. Свободные электроны не обнаруживались. Вся эта проблема благодаря своей простоте имела фундаментальное значение. Она получила название *парадокса о теплоемкости*. Если учесть свойства вырожденного ферми-газа, то все становится ясным, и парадокс естественно разрешается. Температура, при которой производились эксперименты, значительно ниже фермиевской температуры T_F , а электронная теплоемкость в этих условиях просто значительно меньше классической теплоемкости остальной «части» металла — его решетки.

Можно ли вообще измерить электронную часть теплоемкости металла и тем самым непосредственно убедиться в существовании вырожденного газа электронов? Производить эксперименты при температуре, значительно превышающей температуру вырождения, бессмысленно: почти всякий металл в этом случае не только расплавится, но и испарится. Есть другой способ: «опуститься» в область очень низких температур.

Вначале это может показаться глупым. Электронная теплоемкость при этом катастрофически мала. Но

¹⁾ Теплоемкость решетки $3R$, а классических электронов, если их по одному на атом, $\frac{3}{2}R$ (см. 2-ю главу и «Приложение... между двумя главами»).

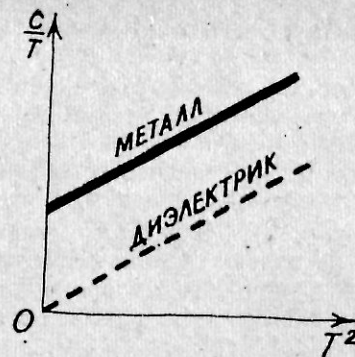


Рис. 32.

по сравнению с чем? По сравнению с ее классическим значением. А какая нам разница, во сколько раз электронная теплоемкость меньше своего классического значения! Нам важно, чтобы она превышала теплоемкость кристаллической решетки, ведь измеряем мы теплоемкость металла как целого, т. е. сумму: теплоемкость ионной решетки и теплоемкость электронного газа. Но теплоемкость решетки за счет квантовых эффектов (о которых мы рассказали выше) уменьшается с приближением к абсолютному нулю быстрее ($\sim T^3$), чем электронная теплоемкость ($\sim T$). При температуре в несколько абсолютных градусов они сравниваются. На рис. 32 изображена зависимость теплоемкости при $T \ll \theta$, деленной на абсолютную температуру, от квадрата абсолютной температуры. Пунктирная линия соответствует диэлектрику, сплошная — металлу.

Это не мысленный эксперимент. Электронная теплоемкость металлов измерена. Соответствующие данные приведены в современных справочниках. Они очень существенны для понимания природы металлического состояния...

Для того чтобы подчеркнуть удивительные свойства вырожденного электронного газа, приведем следующий факт, который противоречит нашей интуиции, основанной на классических представлениях: *вырожденный электронный газ тем идеальнее, чем плотнее*, т. е. чем меньше расстояние между электронами. Хотя это утверждение может показаться абсолютно бессмыслен-

ным, проанализируем его и убедимся, что оно справедливо.

Действительно, газ тем идеальнее, чем меньше энергия взаимодействия между частицами $U_{вз}$ по сравнению с их кинетической энергией¹⁾ E . Последняя, как мы указывали, равна $\frac{3}{5}\epsilon_F$ и, следовательно, растет пропорционально плотности электронов n_e в степени $2/3$ (E пропорциональна $n_e^{2/3}$). Электроны взаимодействуют друг с другом по закону Кулона. Энергия взаимодействия двух электронов обратно пропорциональна расстоянию между ними, т. е. растет пропорционально плотности в степени $1/3$ ($U_{вз}$ пропорциональна $n_e^{1/3}$). Естественно, с ростом плотности кинетическая энергия «перегонит» потенциальную, что и требовалось доказать... Это свойство вырожденного газа дает в руки физиков-теоретиков надежный способ анализа свойств электронов (приближение большой плотности).

¹⁾ И та и другая энергии оцениваются в расчете на одну частицу.

$$\sigma = ne^2 \ell / \rho_F = ne^2 \ell$$

$$R = \frac{1}{ne^2 c}$$

$$\frac{\alpha}{\sigma T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2}$$

ГЛАВА **4**

об электронах и фононах

СВОБОДНЫ ЛИ ЭЛЕКТРОНЫ МЕТАЛЛА?

Есть старая шутка о журналисте, любящем пышные фразы. Пуск электростанции он описывает так: «Такой-то (лицо начальственное) включил рубильник, и ток медленно потек по проводам...» «Медленно» здесь для торжественности. Торжественно-то торжественно, но грубо неверно. Первый токовый сигнал дойдет по потребителя с огромной скоростью, близкой к скорости света. Но постепенно (тоже очень быстро) установится определенный токовый режим. И если потребности в токе не меняются, то по проводам будет течь постоянный ток¹⁾. Но ведь ток — это поток электронов. С какой же скоростью движутся в этом потоке электроны?

Вопрос не совсем корректен, так как известно, что даже в отсутствие тока электроны в металле движутся. Они не успокаиваются и при абсолютном нуле температуры. Об этом было подробно рассказано в предыдущих главах. Напомним все же: разные электроны в металле движутся с разными скоростями, но больше всего электронов, скорость которых (обозначим ее v_F)

¹⁾ Для простоты будем считать, что электростанция производит постоянный ток, а не переменный.

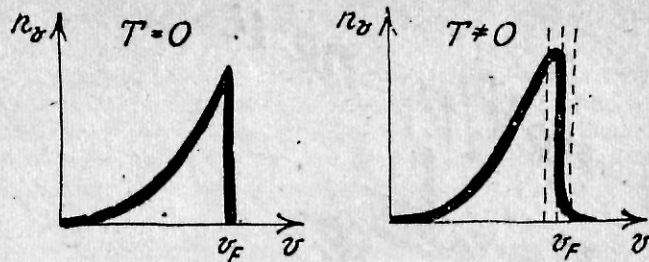


Рис. 33.

около 10^8 см/с. Число это можно получить, воспользовавшись соотношением $\frac{mv_F^2}{2} = \epsilon_F$ (см. (53) и (54)). На рис. 33 схематически изображено распределение электронов по скоростям при абсолютном нуле температуры и при температуре, отличной от нуля.

Итак, даже в отсутствие тока электроны движутся. Но это движение совершенно хаотическое, напоминающее беспорядочную беготню людей в толпе на улице. А когда по металлу течет ток, то движение электронов напоминает беспорядочную беготню людей в толпе, которая медленно движется по улице. Здесь «медленно» уже не для торжественности, а для того, чтобы подчеркнуть: скорость толпы — скорость упорядоченного движения — значительно меньше скорости, с которой бегают люди в толпе, т. е. скорости хаотического движения. Давайте раньше всего убедимся, что наша модель соответствует действительности. Для этого необходимо оценить среднюю скорость электронов (скорость хаотического движения мы знаем). Так как плотность тока есть количество электричества, проходящее за одну секунду через квадратный сантиметр проводника, то согласно определению

$$j = en_e \bar{v}; \quad (55)$$

$e = 4,6 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, $n_e \approx Z/a^3 \approx 10^{22} \div 10^{23}$ 1/см.³. Пусть по металлу проходит ток плотностью в 1 А/см². К сожалению, нельзя просто разделить единицу на произведение en_e ; надо раньше амперы перевести в нужные нам электростатические единицы; 1А =

$= 3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ. Подставляем выписанные здесь числа и с удивлением обнаруживаем: $\bar{v} \approx 10^{-3}$ см/с. Как видите, электроны действительно движутся медленно не только по сравнению со скоростью их беспорядочного движения, но даже по нашим человеческим масштабам (может быть, не так уж не прав был тот журналист, с литературных красот стиля которого мы начали эту главу?).

Скорость упорядоченного движения электронов так мала, что закрадывается подозрение: имеем ли мы право считать электроны металла свободными? А если да, то в какой степени?

Как должен себя вести истинно свободный электрон? По металлу течет ток, только если к концам проводника приложена некоторая разность потенциалов, которая создает в металле электрическое поле. Предположим, это поле E равно 1 В/см. Следовательно, на каждый электрон действует сила eE и ускорение электрона $w = eE/m$. Легко убедиться, что электрон, пройдя расстояние 1 см, приобретает скорость около 10^8 см/с. Ничего похожего на переползание электронов со скоростью \bar{v} . И впрямь электроны не вполне свободны. Слишком разительно отличается поведение электронов металла от того, как должны были бы вести себя истинно свободные частицы.

ЗАКОН ОМА

Способность металла проводить электрический ток привлекала физиков давно. Уже к началу XIX века было установлено, что между приложенной к металлу разностью потенциалов и протекающим за счет этого током существует простая пропорциональность (закон Ома), которую мы запишем в дифференциальной форме:

$$j = \sigma E. \quad (56)$$

Последнее соотношение так и называют *законом Ома в дифференциальной форме*.

Коэффициент пропорциональности между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E — удельная электропроводность σ , величина $\rho = 1/\sigma$ — удельное сопротивление. Сопротивление об-

разца, как известно, $R = \rho L/S$, где L и S — длина и площадь поперечного сечения проводника.

Используя выражение для плотности тока (56), легко устанавливаем, что средняя скорость электронов в проводнике пропорциональна действующей на них силе:

$$\bar{v} = \frac{\sigma}{e^2 n_e} eE. \quad (57)$$

Величина $u = \sigma/e^2 n_e$ — скорость частицы под воздействием единичной силы — имеет специальное название. Она называется *подвижностью*. Подвижность характеризует силу сопротивления среды, через которую движутся электроны. Ведь не будь этой силы, электроны ускорялись бы электрическим полем, а не двигались бы с постоянной средней скоростью. *Подвижность — мера несвободы электронов.*

Соотношение (57) сближает прохождение тока по проводнику с перетеканием жидкости по трубке. Течение жидкости надо поддерживать (обычно разностью давлений на концах трубки) из-за того, что существует трение жидкости о стенки сосуда. Тормозятся не только те молекулы жидкости, которые непосредственно ударяются о стенки трубки. Существует механизм передачи импульса от быстро движущихся участков жидкости к медленным. Это — вязкость — свойство, объясненное на основании молекулярно-кинетических представлений о жидкости.

Электроны в проводнике также движутся с трением. Однако электроны трутся не только о стенки. Лучше сказать даже «не столько о стенки», так как торможение о стенки играет роль лишь у очень тонких проводников (об этом будет сказано дальше). Внутри металла существуют причины, тормозящие движение электронов. Рассказ о них — главное содержание этой главы.

Принято выражать не подвижность через удельную электропроводность, а электропроводность через подвижность:

$$\sigma = n_e e^2 u. \quad (58)$$

Может возникнуть недоуменный вопрос: зачем одну характеристику металла (электропроводность σ)

выражать через две другие n_e и u ? Каждая из них определяет существенно различные, можно сказать, независимые характеристики металлического состояния. Число свободных электронов в единице объема n_e практически не изменяется с температурой, мало зависит от состояния образца данного металла (монокристалл или поликристалл, очень чистый или с небольшим количеством примеси). Подвижность u может изменяться в сотни, тысячи раз с изменением температуры; очистка металла от примесей увеличивает подвижность. Обе характеристики — и число электронов в единице объема n_e , и подвижность u — допускают независимое измерение.

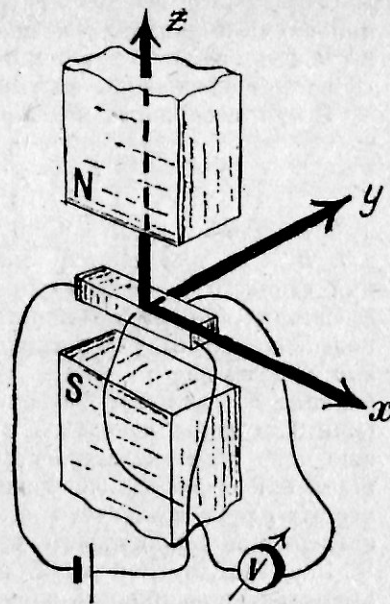


Рис. 34.

ЭФФЕКТ ХОЛЛА. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ПОДВИЖНОСТИ

Одним из наиболее принятых методов измерения числа электронов в проводнике есть метод, использующий эффект Холла — возникновение разности потенциалов в пластине, помещенной в магнитное поле, когда по ней течет ток (рис. 34).

Причина эффекта Холла проста. Со стороны электрического и магнитного полей на электрон действует сила Лоренца $e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}H]\right)$, под воздействием которой электрон стремится двигаться в направлении, перпендикулярном векторам \vec{E} и \vec{H} . Так как в этом направлении проводник разомкнут, то перераспределе-

ние зарядов приводит к появлению тормозящей силы — напряженности поля в направлении оси y (оси координат обозначены на рис. 34).

После несложных преобразований легко получить

$$E_y = \frac{1}{n_e e c} jH. \quad (59)$$

Так как заряд электрона и скорость света известны, а j , H и E_y измеряются непосредственно, то последняя формула позволяет определить число электронов в единице объема проводника. Подобные измерения показывают, что у хороших металлов $n_e \approx 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Это подтверждает наши оценки: от каждого атома металла оторвался и свободно движется по кристаллу один или даже несколько электронов. Казалось бы, еще одно доказательство справедливости наших представлений о свободе электронов. Особенно если учесть, что эта цифра согласуется и с другими измерениями — электронной теплоемкости, например.

Зная число электронов в единице объема, легко вычислить подвижность электронов в металле по формуле (58). Удельное сопротивление ρ металлов можно взять из справочника. Как правило, в справочнике приведено значение ρ при комнатной температуре. Вычислим и получим некое число. Для меди, например, $\mu = 2 \cdot 10^{13} \text{ с/г}$ при комнатной температуре. Много это или мало? Если сравнивать с подвижностью электронов той же меди при очень низких температурах, то очень мало. Вблизи абсолютного нуля подвижность в сотни, тысячи раз больше. Если сравнивать с подвижностью электронов других проводников, то, пожалуй, много. Электроны меди — одни из наиболее подвижных.

ВРЕМЯ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА.

ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА

Зная подвижность, можно оценить две очень важные характеристики электронов металла, давшие название этому разделу. Размерность подвижности μ с/г. Поэтому величина $\tau = \mu u$, где m — масса электрона, имеет размерность секунды. Величину τ , как это часто бывает, называют по-разному. Чаще других употребля-

ются названия «постоянная времени» и «время свободного пробега». Названия взяты из разных областей физики. Первое — из механики, второе — из молекулярно-кинетической теории газов.

Анализ движения частицы с трением показывает, что сразу после включения внешней силы (скажем, электрического поля) частица движется с ускорением, ее скорость возрастает, одновременно растет сила трения, пропорциональная скорости. Через время, приблизительно равное $\tau = \mu u$, сила торможения полностью скомпенсирует внешнюю, ускоряющую силу, и частица будет двигаться с постоянной скоростью. Таким образом, постоянная времени характеризует время установления стационарного режима движения, движения с постоянной скоростью.

Оценим постоянную времени. В нашем примере $\tau \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ с}$. Она фантастически мала. В постоянном поле заметить период свободного движения невозможно. После включения проводника в цепь в проводнике практически немедленно начинает действовать закон Ома¹⁾.

Несмотря на фантастическую малость постоянной времени τ электронов, период свободного движения электронов можно, однако, наблюдать и даже измерить τ . Для этого надо изучить поведение металлов в высокочастотных полях.

С микроскопической точки зрения движение электронов с трением — чередование полета под действием ускоряющей силы и столкновений, во время которых частица отдает энергию, приобретенную под действием силы. При таком подходе τ — среднее время между двумя столкновениями, а произведение $v_F \tau = l$ — длина свободного пробега — среднее расстояние, которое проходит частица между столкновениями.

Таким образом, для того чтобы понять природу сопротивления проводников, надо понять, почему электрон в кристалле имеет конечную длину свободного пробега, и каково ее численное значение.

¹⁾ Фактически при включении проводника в цепь стационарный режим наступает не сразу. Время установления стационарного режима значительно больше τ и определяется инерционными свойствами всей цепи, а не электронов металла.

Квантовая механика объяснила причину «освобождения» электрона из недр отдельного атома, привела к выводу, что в идеальном кристалле, т. е. в бесконечном кристалле без дефектов, в котором каждый ион неподвижно стоит на своем месте, электрон будет двигаться совершенно беспрепятственно, игнорируя окружающие его ионы. Ускоряясь под воздействием приложенного поля, он будет увеличивать свою энергию до тех пор, пока не столкнется с границей образца.

Чтобы заключить этот маленький раздел, выпишем несколько формул, определяющих удельную электропроводность через микроскопические величины: заряд электрона e , его массу m , длину свободного пробега l и т. д. Из формулы (58) и определения постоянной времени τ имеем

$$\sigma = n_e e^2 \tau / m. \quad (60)$$

Если и числитель и знаменатель умножить на v_F , то выражение для удельной электропроводности примет несколько другой вид:

$$\sigma = n_e e^2 l / m v_F. \quad (61)$$

Так как $m v_F = p_F$, то последней формуле можно придать и такой вид:

$$\sigma = n_e e^2 l / p_F; \quad (62)$$

$4\pi p_F^2 = S_F$ — площадь поверхности сферы радиуса p_F . Поэтому формулу (62) можно переписать так:

$$\sigma = e^2 S_F l / 12\pi^3 \hbar^3, \quad S_F = 4\pi (3\pi^2 n_e)^{2/3} \hbar^2. \quad (63)$$

Значение этой формулы в том, что она с очевидностью показывает: перенос заряда в металле осуществляют электроны, расположенные на поверхности Ферми, — только они могут воспринимать от электрического поля его энергию: непосредственно над состояниями, в которых они находятся, есть разрешенные состояния, свободные от других электронов. Кроме того, это — современная формула; она не изменится, если учесть сложную динамику электронов проводимости, двигающихся в периодическом поле ионов кристаллической решетки, когда поверхность Ферми не сфера. При этом, правда, нельзя выразить S_F через число электронов в единице объема n_e (см. (63)).

Мы видели, что поверхности Ферми у многих металлов очень сложны: они могут быть разветвлены,

иметь множество «рукавов», «карманов», «перемычек» (эти образные наименования вошли в серьезные статьи по физике металлов). При вычислении коэффициента электропроводности сложность поверхности Ферми необходимо учитывать, так как расчет с помощью привычных формул, справедливых для металлов со сферическими поверхностями Ферми, может привести к ошибкам¹⁾.

ЭЛЕКТРОНЫ ПЕРЕНОСЯТ ТЕПЛО. ЗАКОН ВИДЕМАНА — ФРАНЦА

Краткое отступление. Представим себе соревнование по бегу с очень необычными правилами, суть которых в том, что соревнующийся должен как можно дальше от старта пронести шляпу на голове и флажок в руке. Все это осложняется тем, что бегуны не знают маршрута и выбирают его по случайным признакам. Кроме того, на трассе полно людей, которым разрешается сбивать с бегуна шляпу и вырывать из его рук флажок. Достоинство каждого участника соревнования будем оценивать по тому, как далеко от старта он пронесет шляпу и (или) флажок по правильной трассе. Ясно, что если бегун сбивается с дороги, то не имеет значения, удержал ли он флажок и шляпу или нет. В некоторых случаях бегуны, бегущие в правильном направлении, дальше донесут флажок, в некоторых случаях — шляпу. Это зависит от поведения людей на трассе и от свойств бегуна.

А теперь — определение, которое поможет нам приблизиться к теме нашего рассказа. Среднее расстояние, на которое бегунам удастся пронести шляпу, назовем длиной свободного пробега относительно потери шляпы, а среднее расстояние, на которое удастся пронести флажок, — длиной свободного пробега относительно потери флажка. Ясно, что, вообще говоря, эти длины пробега разные. Только если бегуны просто сбиваются с дороги, длины пробега одинаковы.

¹⁾ Чтобы излагаемое здесь не казалось совсем абстрактным, не относящимся к реальному металлу, можно все время помнить, что у всех щелочных металлов (кроме Li) поверхности Ферми — сферы.

Из этого рассказа следует усвоить, что длины пробега бывают разные. Чтобы быть точным, после слов «длина свободного пробега» надо добавлять «относительно потери...» и указывать, что при столкновениях теряет..., конечно, не бегун, а электрон.

Ток — это перенос заряда. Заряд электроны потерять не могут. Не донести заряд электроны могут только в том случае, если собьются с пути.

Двигаясь, электроны могут переносить не только заряд, но и тепло, если перемещаются от более горячего конца образца к более холодному. Электроны принимают участие в теплопроводности. Как правило, теплопроводность металлов больше, чем теплопроводность диэлектрика. Причина тому — именно участие электронов в переносе тепла.

Удивительного в этом ничего нет. В любом газе его частицы переносят тепло от горячей стенки к холодной. Металл — это сосуд, наполненный «газами» — фононами и электронами. Расчет электронного коэффициента теплопроводности κ , выполненный при столь же общих предположениях, что и вывод формулы (63), приводит к следующему результату:

$$\kappa = \frac{2\pi^2 k_B^2}{9(2\pi\hbar)^3} T S_F l_T. \quad (64)$$

Длину свободного пробега l_T мы снабдили индексом, чтобы подчеркнуть: это — длина свободного пробега относительно потери электроном тепла. При расчете l_T надо учитывать, сколько энергии теряет электрон при каждом столкновении. Длина свободного пробега (без индекса), входящая в выражение для электропроводности, есть длина свободного пробега относительно потери направления движения. Чтобы не удлинять обозначений, мы ее будем называть просто длиной свободного пробега. Вообще говоря, l и l_T различны и отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} \frac{l_T}{l} \quad (65)$$

зависит от сорта металла и от температуры. Но при обычных температурах (комнатных и более высоких) l_T с большой точностью равна l , а отношение $\kappa/\sigma T$ ока-

зывается постоянной величиной, не зависящей ни от температуры, ни от сорта металла. Оно равно $\pi^2 k_B^2 / 3e^2 = 2,45 \cdot 10^{-8}$ Вт·Ом/К.

Вывод о постоянстве отношения $\kappa/\sigma T$ для разных металлов был получен экспериментально и получил название закона Видемана — Франца. Закон Видемана — Франца — прекрасное доказательство правильности наших воззрений на «устройство» металла. Более того, точное значение постоянной в законе Видемана — Франца — непосредственное доказательство того, что электронный газ вырожден. Если бы электроны они сывались классической статистикой, то постоянная была бы другой...

Исследования электропроводности и теплопроводности металлов при низких температурах показали, что закон Видемана — Франца отнюдь не универсален. Это, конечно, ни в какой мере не уменьшает доверия к нашим основным представлениям об «устройстве» металлов. Обнаружение отклонений от закона Видемана — Франца — еще одно свидетельство правильности теории, ведь l_T не есть l . Эксперимент показывает, когда это различие наиболее существенно, а теория выясняет причину различия... Рассказано об этом будет в одном из следующих разделов.

ОБО ЧТО ТРУТСЯ ЭЛЕКТРОНЫ?

Когда говорилось о средней длине свободного пробега или о среднем времени свободного пробега, то термины «средняя», «среднее» понимались в двух смыслах: во-первых, «усредняются» все электроны (один рассеивается так, другой несколько иначе), а во-вторых, усредняются препятствия, на которых электроны рассеиваются.

В природе не бывает идеальных кристаллов. Каждое нарушение строгой периодичности воспринимается электроном как препятствие. Таким препятствием может быть случайно попавший в кристалл атом примеси, граница кристаллита, вакансия — место в кристалле, где при строгом порядке должен был бы находиться ион, — и т. п.¹⁾ В реальном кристалле множество са-

¹⁾ Ощутить, что всякое нарушение периодичности — препятствие, лучше на «волновом языке». См. стр. 122.

мых разнообразных дефектов. При обычной (комнатной) температуре главная причина рассеяния электронов, а значит сопротивления металлов, — все же не дефекты кристаллической решетки, а тепловое движение ионов. При очень низкой температуре — вблизи абсолютного нуля — тепловое движение почти отсутствует и «проявляются» дефекты, о которых шла речь.

Давайте разделим все столкновения электронов на два класса. Отдельно рассмотрим те столкновения, которые происходят на нарушениях периодичности кристалла, а отдельно те, что связаны с тепловым движением. Ко второму классу присоединим столкновения электронов друг с другом.

Если можно было бы создать идеальный бесконечный кристалл, то и в нем у электронов была бы конечная длина пробега (за счет теплового движения), правда, она неограниченно возрастала бы при понижении температуры. Длину пробега, которая была бы в идеальном кристалле, назовем идеальной длиной пробега $l_{ид}$, а сопротивление идеального кристалла — идеальным сопротивлением $\rho_{ид}$.

При абсолютном нуле температуры в реальном кристалле электроны сталкиваются только с нарушениями периодичности. Длина пробега, связанная с этими столкновениями, называется остаточной длиной пробега $l_{ост}$, а сопротивление — остаточным сопротивлением $\rho_{ост}$. Сопротивление названо остаточным, так как оно *остаётся* даже при абсолютном нуле температуры.

Существует простое правило, согласно которому сопротивление ρ реального металла есть сумма идеального и остаточного сопротивлений (правило Матиссена):

$$\rho = \rho_{ид} + \rho_{ост}. \quad (66)$$

На опыте получаем вот что: у двух образцов одного и того же металла очень похожие зависимости сопротивления от температуры (рис. 35), одна кривая сдвинута относительно другой на величину $\rho_{ост}^{(1)} - \rho_{ост}^{(2)}$ (цифра обозначает номер образца). Сформулировать правило (66) помог анализ экспериментальных кривых.

Согласно правилу Матиссена, для того чтобы выяснить, каково идеальное сопротивление данного ме-

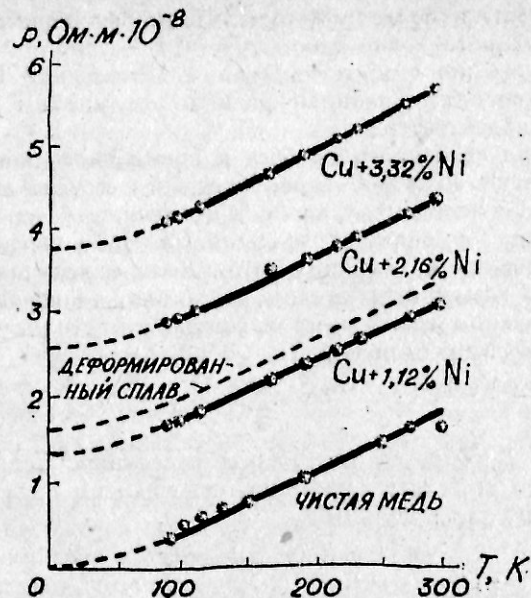


Рис. 35.

талла, нет необходимости создавать идеальный образец (да это и невозможно, хотя бы потому, что его нельзя сделать бесконечно большим). Надо построить кривую, изображающую зависимость сопротивления от температуры реального образца $\rho(T)$, и экстраполировать ее до абсолютного нуля. Так будет найдено $\rho_{ост}$ для данного образца ($\rho_{ост} = \rho(T \rightarrow 0)$), а вычтя $\rho_{ост}$ из $\rho(T)$, получим $\rho_{ид}(T)$ данного металла. Обычно экспериментаторы проделывают эту процедуру на нескольких образцах и удовлетворяются, если результат в пределах точности эксперимента не зависит от того, какой образец использован. Заметим, что процедура обработки экспериментальных данных, описанная выше, предполагает, что $\rho_{ост}$ не зависит от температуры, а $\rho_{ид}(T)$ не зависит от состояния образца. Эксперимент подтверждает это предположение не слишком точно. Обнаруживаются отклонения, которые называют отклонениями от правила Матиссена. Их изучению

посвящены в последние годы многие экспериментальные и теоретические работы.

Какова же природа правила Матиссена? Почему сопротивления, обусловленные разными механизмами рассеяния, складываются?

Длина свободного пробега и время свободного пробега имеют простой вероятностный смысл: $w = 1/\tau$ есть вероятность столкновения (рассеяния) «среднего» электрона в единицу времени, а $1/l$ — вероятность столкновения на единицу пути. Если в кристалле несколько возможных причин рассеяния, то вероятность столкновения есть сумма вероятностей столкнуться с каждым из препятствий¹⁾:

$$w = \sum_j w_j, \quad (67)$$

Индекс j нумерует механизмы рассеяния. Если отделить все причины рассеяния, отвечающие идеальному кристаллу, то получим

$$w = w_{\text{ост}} + w_{\text{ид}}.$$

Сопоставляя $w_{\text{ост}}$ — остаточную длину пробега и $w_{\text{ид}}$ — идеальную, имеем

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{\text{ост}}} + \frac{1}{l_{\text{ид}}}. \quad (68)$$

Последнее соотношение эквивалентно правилу Матиссена, так как сопротивление $\rho = 1/\sigma$, а коэффициент пропорциональности между ρ и $1/l$ не зависит от механизма рассеяния (см. формулы (60) — (63)). Выписанные формулы (66) и (68) очень важны, так как дают возможность обособить различные механизмы сопротивления, изучая каждый в отдельности.

Наиболее существенный вклад (это фигуральное выражение означает: наибольшее слагаемое в сумме вероятностей) в остаточное сопротивление дает рассеяние на различных примесях, которые есть в любом кристалле. Длину свободного пробега $l_{\text{пр}}$, обусловленную рассеянием на примесях, легко оценить, считая

¹⁾ В математике эту формулу «величают» теоремой о сложении вероятностей. Для ее выполнения необходимо, чтобы события были независимы.

примесный атом шариком с радиусом, близким размеру ячейки кристалла. Тогда, естественно,

$$1/l_{\text{пр}} \approx N_{\text{пр}} a^2, \quad (69)$$

где $N_{\text{пр}}$ — число примесных атомов. Для того чтобы приближенное равенство заменить точным, надо, используя знание сил, действующих между атомами примеси и электроном, а также знание законов движения электрона (квантовую механику), вычислить величину, которую называют эффективным поперечником рассеяния. В формуле (69) он заменит множитель a^2 . Точный расчет не слишком изменяет значение $l_{\text{пр}}$ по сравнению с формулой (69), но дает возможность выяснить, как какая примесь влияет на сопротивление металла...

При столкновении с примесью, как, впрочем, и при столкновении с другими нарушениями периодического расположения атомов в кристалле, электроны практически не изменяют своей энергии, но изменяют направление своего движения — сбиваются с пути. Примесь тяжела, электрон легок. Поэтому, если примеси — главная причина рассеяния, то длина свободного пробега относительно потери тепла l_T не отличима от длины свободного пробега относительно потери направления, просто длины пробега l . Сбившись с пути, не донесешь ни заряда, ни избытка тепла. Таким образом, если длина пробега равна $l_{\text{пр}}$, то закон Видемана — Франца выполняется. Из сказанного раньше ясно, что так должно быть при очень низких температурах.

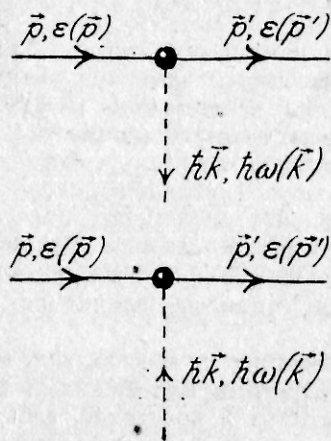
А как обстоит дело при более высоких температурах — комнатных, например? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить, как влияет тепловое движение ионов металла на сопротивление. Но тема эта столь существенна, что требует специального раздела.

ЭЛЕКТРОНЫ СТАЛКИВАЮТСЯ С ФОНОНАМИ

Обычно описание роли теплового движения ионов в сопротивлении металлов начинают словами: «Электроны сталкиваются с фононами...»

Термин «столкновение» надо, однако, уточнить. Мы привыкли, что при столкновении надо на что-то

натолкнуться, а в случае электрон-фононного взаимодействия основные процессы столкновения таковы¹⁾:



Сплошные линии изображают электроны, пунктирные — фононы; у линий стоят импульсы и энергии электрона и фонона (со штрихами — после столкновения). Во втором процессе действительно сталкиваются электрон и фонон. Правда, при этом фонон гибнет, а электрон «рождает» фонон. Проверим прежде всего, возможны ли изображенные процессы с точки зрения законов сохранения импульса и энергии. Легко убедиться, что с точностью до обозначений в обоих случаях они записываются одинаково:

$$\epsilon(\vec{p}) + \hbar\omega = \epsilon(\vec{p} + \hbar\vec{k}). \quad (70)$$

Нас интересуют электроны, энергия которых равна фермиевской, но $\epsilon_F \gg \hbar\omega_{\max} = k_B\theta$. Действительно, $\theta \approx 10^2$ К, $T_F \approx 10^5$ К. Это дает нам право попросту пренебречь $\hbar\omega$ по сравнению с ϵ_F и условия рождения (гибели) фонона с импульсом $\hbar\vec{k}$ переписать:

$$\epsilon_F(\vec{p}) = \epsilon_F(\vec{p} + \hbar\vec{k}). \quad (71)$$

¹⁾ Есть и обычные процессы столкновения, но они значительно менее вероятны, чем изображенные здесь,

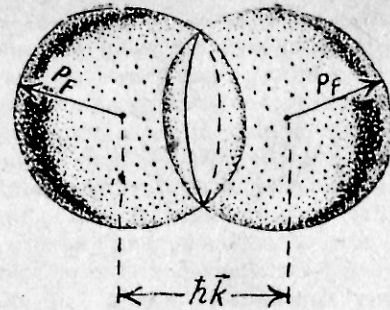


Рис. 36.

Отсюда видно, что процесс «разрешен», если поверхность Ферми $\epsilon(\vec{p}) = \epsilon_F$ и ее сдвинутый на $-\hbar\vec{k}$ аналог $\epsilon(\vec{p} + \hbar\vec{k}) = \epsilon_F$ пересекаются (рис. 36). При $\hbar k < 2p_F$ условие (71) выполнено — рождение и гибель фонона возможны¹⁾. Фононов с $\hbar k < 2p_F$ может быть сколько угодно: поверхность Ферми занимает большую часть первой зоны Бриллюэна.

Столкновение электрона с акустическим фононом может служить интересным примером принципа соответствия. Давайте формально в формуле (71) устремим $\hbar k$ к нулю. Тогда из (71) имеем $v_F k = 0$, т. е. в процессе рождения (гибели) фононов принимают участие электроны, скорости которых перпендикулярны волновому вектору. Правда, раз мы переходим к классическому описанию, то лучше говорить не о рождении (гибели) фонона, а об излучении (поглощении) звуковой волны. Это во-первых. А, во-вторых, так как большая энергия Ферми сократилась, то лучше не выбрасывать $\hbar\omega$. В результате получим

$$\vec{k}v_F = \omega \quad \text{или} \quad \cos\theta = s/v_F; \quad (72)$$

θ — угол между направлением скорости электрона и волновым вектором. Излучение (поглощение) звуко-

¹⁾ То, что при $\hbar k \geq 2p_F$ процесс рождения и поглощения фононов электронами невозможен, приводит к любопытной особенности в фононном спектре металлов (особенности Мигдала — Кона).

вых волн возможно, если $v_F > s$. Но это всегда выполнено: $v_F \approx 10^8$ см/с, $s \approx 10^5$ см/с. Сравнивая условия (70) и (72), мы видим: рождение (гибель) фонона — квантовый аналог черенковского излучения звука.

Чтобы столкновения происходили, мало разрешения законами сохранения. Должно существовать *реальная* взаимодействие между сталкивающимися частицами (вспомните рассуждение об ангармонизмах, обеспечивающих взаимодействие между фононами). Какова природа электрон-фононного взаимодействия? Фонон — квант колебаний ионов металла. Электрон движется в поле ионов. Когда ионы сдвигаются из своих положений равновесия, энергия взаимодействия электронов с ионами меняется. Изменение энергии электронов за счет «сдвигки» ионов и есть энергия электрон-фононного взаимодействия.

Фононы, как все бозоны, обладают удивительным свойством: интенсивность их рождения в определенном состоянии тем больше, чем в этом состоянии их больше¹⁾. Бозоны руководствуются стадным инстинктом: «Туда, куда все!» Однако рождаться бозоны могут и в пустоту.

При абсолютном нуле температуры в металле нет фононов. Можно подумать, что сопротивление, обязанное своим происхождением столкновениям с фононами, не должно при стремлении температуры к нулю исчезать. Подгоняемый электрическим полем электрон действительно не может *поглотить* фонон — их нет, но ведь, казалось бы, родить фонон электрон может, а значит, может затормозиться. Пока мы имеем дело с одним электроном, наше рассуждение безукоризненно, но, когда переходим к огромному коллективу электронов, ситуация усложняется.

Расчет показывает, что та часть сопротивления, которая обязана своим происхождением столкновениям с фононами, обращается в нуль вместе с абсолютной температурой. Это противоречие может поколебать веру в правильность приведенного здесь качественно рассмотренного механизма сопротивления. Однако если проследить все вычисления, которые есть в учеб-

¹⁾ Это свойство бозонов, открытое А. Эйнштейном, — основа устройства квантовых генераторов — лазеров, мазеров.

никах по электронной теории металлов, то легко убедиться, что механизм сопротивления описан совершенно правильно: в каждом акте столкновения электрон излучает или поглощает фонон¹⁾. В чем же все-таки дело?

Читателю уже известно, что движение коллектива электронов описывается средней скоростью, которая очень мала. «Средний» электрон не может ни излучать звуковые волны, ни рождать фононы. Но он может рассеиваться на колеблющихся ионах. «Средний» электрон — понятие очень сложное. Действительно, одни электроны, движущиеся вдоль электрического поля, ускоряются полем, другие, те, которые движутся против поля, замедляются. Первые тормозятся, рождая фононы, вторые, поглощая, ускоряются. Иначе они отстанут от своих собратьев. Существует хорошо разработанный математический аппарат, позволяющий понять все эти действительно сложные процессы и дающий возможность последовательно перейти от описания индивидуального акта излучения и поглощения звуковой волны электроном к таким макроскопическим понятиям, как подвижность, средняя скорость и удельная электропроводность. Этими вопросами занимается особая глава теоретической физики — *физическая кинетика*.

То, что наши представления о средней скорости имеют глубокий физический смысл, видно из следующего: когда удается создать условия, при которых средняя скорость направленного движения электронов делается больше скорости звука, сопротивление проводника резко возрастает — «средний» электрон начинает рождать фононы.

Вернемся к механизму идеального сопротивления.

Рассеяние «среднего» электрона удобнее описать, не используя представления о фононах, хотя в конце этого раздела придется вернуться к фононам, чтобы объяснить природу отклонений от закона Видемана —

¹⁾ Линейная зависимость между током и полем (56), которую мы изучаем, — первый член разложения j по степеням E . Рождение электронами фононов при $T = 0$ приводит к зависимости проводимости от поля и в законе Ома не учитывается. Строго говоря, $\sigma = \lim_{E \rightarrow 0} (j/E)$.

Франца. Выбранный подход позволит не только понять природу сопротивления, но и оценить идеальную длину свободного пробега.

Тепловое движение нарушает строгую периодичность, поэтому беспорядочно колеблющиеся ионы являются причиной рассеяния, а вероятность рассеяться w (напомним, эта величина обратно пропорциональна длине свободного пробега: $w = v_F/l_\phi$) тем больше, чем больше средний квадрат амплитуды колебаний иона $\overline{x^2}$.

Средняя длина свободного пробега l_ϕ определяется простой формулой:

$$1/l_\phi = N_a \overline{x^2}, \quad (73)$$

где N_a — число ионов в единице объема. Эта формула означает, что вероятность рассеяния пропорциональна площади, которую «занимает» колеблющийся ион в плоскости, перпендикулярной скорости электрона¹⁾.

Здесь и в дальнейшем численные множители опущены. Они в некоторых случаях могут довольно значительно изменить оценку величин. Температурная зависимость указана правильно. Длину пробега отметим индексом «ф», так как, по существу, речь идет о длине свободного пробега электронов, обусловленной рассеянием на фононах.

Расчет показывает, что

$$\overline{x^2}/a^2 = \begin{cases} k_B T / M s^2, & T \gg \theta, \\ k_B T^3 / M s^2 \theta^2, & T \ll \theta. \end{cases} \quad (74)$$

Последнее соотношение показывает, что при всех температурах $\overline{x^2} \ll a^2$. Если бы электрон рассеивался

на неупорядоченно расположенных атомах, то его длина свободного пробега была бы равна¹⁾ $(N_a a^2)^{-1}$ (ср. с формулой (69)), а так она значительно больше. Используя формулу (62) и выписанные здесь соотношения, легко находим значение фононной части сопротивления:

$$\rho_\phi \approx \begin{cases} \frac{a k_B \theta}{v_F M s^2} \frac{T}{\theta} & \text{— правильно!} \\ \frac{a k_B \theta}{v_F M s^2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 & \text{— неправильно!} \end{cases} \quad (75)$$

Для простоты мы приняли: $n_e = N_a$, $m v_F^2 = e^2/a$ — оба равенства, как правило, выполняются по порядку величины.

Первая строка — классическое выражение для удельного сопротивления — соответствует строгой теории, а вторая — квантовое выражение для ρ_ϕ *неправильно*. Его надо домножить на $(T/\theta)^2$. Дело в том, что с понижением температуры уменьшается не только амплитуда колебаний иона, но и его скорость. Поэтому каждое столкновение с колеблющимся ионом лишь незначительно изменяет движение электрона — столкновения неэффективны. Необходимо $(\theta/T)^2$ столкновений, чтобы электрон «заметил», что ему что-то мешает на его пути (при $T > \theta$ достаточно одного столкновения). Итак,

$$\rho_\phi \approx \frac{a k_B \theta}{v_F M s^2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^5, \quad T \ll \theta, \text{ — правильно!} \quad (76)$$

Эту формулу вывел Ф. Блох в 1929 г.

Неэффективность столкновений электронов с колеблющимися ионами — важное явление. Оно — главная причина отклонений от закона Видемана — Франца. Обсудим его «на языке фононов». При столкновении электрон изменяет свою энергию на величину энергии фонона, а импульс — на величину импульса фонона. Если изменение энергии электрона обозначить

¹⁾ В жидкости длина свободного пробега частицы $l_{ж} \approx a$, где a — межатомное расстояние: $l_{ж} = (N_a a^2)^{-1} = \left(\frac{1}{a^3} a^2\right)^{-1} = a$.

$\Delta\varepsilon$, а изменение импульса $\Delta\vec{p}$, то, согласно сказанному,

$$\Delta\varepsilon = \hbar\omega, \quad \Delta\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

где ω и \vec{k} — частота и волновой вектор поглощенного фонона. При низких температурах ($T \ll \theta$) в твердом теле больше всего фононов с энергией, близкой к $k_B T$, и с импульсом $\sim \frac{\hbar T}{a}$ (см. гл. 2). Следовательно, их с подавляющей вероятностью и поглощают электроны. Поэтому $\Delta\varepsilon \sim T$, а $\Delta p \approx \frac{\hbar T}{a} \approx p_F \frac{T}{\theta}$, так как $p_F \approx \frac{\hbar}{a}$. Существенное изменение направления полета электрона означает изменение импульса на величину порядка p_F . Оценка $\Delta\vec{p}$ показывает, что изменение импульса за счет поглощения фонона очень мало по сравнению с импульсом Ферми, и подтверждает наше утверждение, что для заметного отклонения требуется большое число столкновений. Точный расчет показывает, что их необходимо $(\theta/T)^2$.

При изучении теплопроводности надо знать, как электроны теряют тепло. Как мы видели, при каждом столкновении электрон изменяет свою энергию на величину, близкую $k_B T$. Хотя электроны почти не сбиваются с пути, зато они легко теряют тепловую энергию.

Другими словами, при столкновениях с фононами длина свободного пробега l_τ относительно потери тепла значительно меньше длины свободного пробега l относительно потери направления. Отношение их $l_\tau/l \approx (T/\theta)^2$ — мера неэффективности столкновений электронов с фононами при низких температурах.

Наверное, нет необходимости подчеркивать, что в тех случаях, когда при низких температурах ($T \ll \theta$) рассеяние на фононах — главная причина рассеяния, закон Видемана — Франца не должен выполняться. Этот вывод находит экспериментальное подтверждение.

При высоких температурах ($T \gg \theta$) большинство фононов имеют энергию, равную θ , а импульс — порядка фермиевского. Поэтому каждое столкновение полностью сбивает электроны с «правильного пути». Естественно, $l_\tau \approx l$, и закон Видемана — Франца выполняется.

ЭЛЕКТРОНЫ СТАЛКИВАЮТСЯ ДРУГ С ДРУГОМ

Слово «газ» вызывает представление о миллиардах частиц, движущихся в разных направлениях с различными скоростями, сталкивающихся друг с другом и при столкновениях изменяющих направление движения, обменивающихся энергией и импульсом.

Электроны в металле тоже сталкиваются друг с другом. Играют ли роль межэлектронные столкновения в сопротивлении металлов?

Похожий вопрос мы задавали, когда изучали фононную теплопроводность (см. главу вторую). И ответ аналогичен: играют, если сопровождаются перебросами. Но отличие есть, и весьма существенное. Процессы переброса в межэлектронных столкновениях — частое событие, так как поверхность Ферми, как правило, расположена недалеко от границ первой зоны Бриллюэна. Поэтому длина свободного пробега не содержит характерного (для фононов) экспоненциального множителя и пропорциональна T^2 :

$$\frac{1}{l_e} \approx \frac{p_F}{\hbar} \left(\frac{e^2}{\hbar v_F} \right)^2 \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2. \quad (77)$$

Эта формула (ее вывод принадлежит Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуку) приведена не для того, чтобы оценивать электрон-электронную длину пробега. Если воспользоваться формулой (77), то получится величина, не слишком точно совпадающая с экспериментом. Мы хотим только обратить внимание, что при стремлении температуры к абсолютному нулю межэлектронная длина свободного пробега стремится к бесконечности.

Это обстоятельство может вызвать удивление. Ведь число электронов не изменяется с понижением температуры. Почему же электроны перестают сталкиваться? Они не перестают сталкиваться, но результат столкновений нельзя обнаружить. И до столкновения и после все состояния с энергией, меньшей чем энергия Ферми, заняты. А тем электроном или другим — определить все равно нельзя: все электроны *неразличимы*. Неразличимость электронов — один из основных принципов квантовой механики. А бесконечная межэлектронная длина пробега при абсолютном нуле температуры — его следствие.

Так как сопротивление пропорционально $1/l$, то часть сопротивления, обязанная столкновениям электронов друг с другом, пропорциональна квадрату температуры ($\rho_s \sim T^2$). Правда, это слагаемое (имеется в виду правило Матиссена) удается сравнительно надежно наблюдать только у переходных металлов (Pt, Fe), у других оно теряется на фоне более значительных.

ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГОВ

При высоких температурах ($T \gg \theta$) главная причина сопротивления металлов — рассеяние на тепловых колебаниях ионов; поэтому полное сопротивление определяется формулой (75), закон Видемана — Франца выполняется. При низких температурах ($T \ll \theta$) сопротивление — сумма трех слагаемых:

$$\rho = \rho_{np} + \rho_{\phi} + \rho_s \quad (78)$$

Первое слагаемое не зависит от температуры, второе пропорционально T^5 , а третье пропорционально T^2 .

Истинные свойства металлов, не связанные с приготовлением данного (случайного) образца, конечно, могут быть определены путем исследования идеальной части сопротивления: $\rho_{ид} = \rho_{\phi} + \rho_s + \dots$. Многоотъем мы хотим подчеркнуть тот факт, что в принципе могут быть и другие причины сопротивления.

Так как $\rho_{ид}$ уменьшается с понижением температуры, то естественно желание сделать ρ_{np} меньше. Искусство создания чистых образцов металлов сейчас так велико, что длина свободного пробега перестает, по сути дела, быть микроскопическим параметром. У наиболее чистых металлов вблизи абсолютного нуля она достигает нескольких миллиметров. А ведь при комнатных температурах длина пробега очень мала. Она приблизительно равна 10^{-6} см. Одна миллионная сантиметра — маленькое расстояние по человеческим, житейским масштабам. В мире атомов 10^{-6} см не такая малая величина — приблизительно сто атомных расстояний. Как видим, столкновения не слишком ограничивают свободу электрона, если под свободой понимать свободу передвижения и вспомнить, что в атоме электрон не удаляется от ядра на расстояние, больше нескольких ангстрем.

$$\mu = \frac{eh}{2mc} = 0,9 \cdot 10^{-20} \frac{\text{эрг}}{\text{гаусс}}$$

$$\omega = gH, \quad g = \frac{e}{mc}$$

$$\Delta M(T) \sim T^{3/2}$$

ГЛАВА

5

о магнонах

Наверное, каждый в детстве почувствовал удивление, впервые увидев магнит. Не для всех это событие послужило толчком к размышлению о явлениях в окружающем нас мире, как это было с Альбертом Эйнштейном, но, по-видимому, у каждого ощущение чуда сохранилось надолго. «Чудо такого рода, — писал Эйнштейн, — я испытал ребенком четырех или пяти лет, когда мой отец показал мне компас. То, что эта стрелка вела себя так определенно, совершенно никак не подходило к тому роду явлений, которые могли найти себе место в моем неосознанном мире понятий (действие через прикосновение)»¹⁾.

К сожалению, «развитие... умственного мира представляет собой в известном смысле преодоление чувства удивления — непрерывное бегство от „удивительного“, от „чуда“»²⁾.

Поразившее пятилетнего Альберта действие на расстоянии, как хорошо известно, объясняется существованием вокруг магнита магнитного поля (на стрелку компаса действует магнитное поле Земли), все харак-

¹⁾ А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1967, т. IV, с. 261.

²⁾ Там же.

теристики которого могут быть полностью рассчитаны, если известна мощность и форма магнита. Но что такое магнит? Почему одни тела — магниты, а другие нет? Человечество открыло магнитные свойства так давно, что даже забыло, откуда происходит слово «магнит». И хотя пользоваться магнитом тоже научились давно (компас — основа навигации), только сравнительно недавно (в 30-х годах нашего века) была принципиально понята природа магнетизма.

При объяснении, почему одни тела — магниты, а другие нет, мы будем исходить из того, что основные кирпичики вещества (электроны, протоны, нейтроны) — магнетики. Так как магнитные моменты протонов и нейтронов примерно в тысячу раз меньше, чем магнитный момент электрона, то при изучении магнитных свойств, во всяком случае на первых порах, магнетизмом ядер вовсе можно пренебречь — то обстоятельство, что железо — магнит, целиком определяется поведением электронов железа.

АТОМЫ ДВУХ СОРТОВ

Для того чтобы понять магнитные свойства макроскопических тел — кристаллов, очень важно разобраться в том, как устроен атом того или другого вещества. Квантовая теория атома однозначно отвечает на вопрос, какие атомы имеют отличный от нуля магнитный момент и чему он равен, а какие нет. Зависит это от того, как электроны распределяются по энергетическим уровням атома. Из рис. 3 видно: на нижних уровнях электроны сидят попарно — так, что их суммарный спин равен нулю, а на верхних располагаются неспаренные электроны — их суммарный спин отличен от нуля. А значит, отличен от нуля и магнитный момент. Изменение магнитного момента атома всегда связано с затратой большой (по атомным масштабам) энергии. Например, чтобы превратить атом гелия в частицу с магнитным моментом, надо «поднять» один электрон на энергетический уровень, который расположен над основным на «расстоянии» 19,77 эВ. Естественно, в нашем дальнейшем рассказе будут играть роль те из атомов, у которых магнитный момент отличен от нуля.

Два усложняющих замечания. Первое: магнитный момент атома может быть отличен от нуля не только за счет спина электрона, но благодаря обычному пространственному (чаще говорят — орбитальному) движению электронов¹⁾. Второе: атомы, магнитный момент которых равен нулю (их называют диамагнитными), также обладают магнитными свойствами. Магнитное поле индуцирует в них маленький магнитный момент, направленный против магнитного поля. Он так мал, что тела, состоящие из диамагнитных атомов, именуют слабыми магнетиками в отличие от тел, состоящих из атомов, обладающих магнитными моментами. Правда, для этого необходимо, чтобы при образовании твердого тела из атомов атомы «раньше» не соединились в диамагнитные молекулы. Но об этом — дальше.

ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Магнитные свойства кристаллов существенно зависят от того, обладает ли магнитным моментом одна ячейка или нет. Если обладает, то такой кристалл называют *парамагнитным*, если нет — *диамагнитным*. В природе много тех и других.

Если в ячейке кристалла расположен один атом, то все, конечно, определяется тем, парамагнитный ли это атом или диамагнитный. Твердый неон — диамагнетик, а кристалл железа или хрома — парамагнетик. Если же кристалл состоит из правильно уложенных молекул, то наличие или отсутствие магнитного момента у ячейки определяется тем, что собой представляет молекула — парамагнитна она или диамагнитна.

Постараемся разобраться в этом отнюдь не простом вопросе. Итак, выясним, как из отдельных атомов создается более сложная конструкция — молекула.

О природе сил взаимодействия между атомными частицами мы рассказывали в первой главе (стр. 50). Главное, что надо вспомнить: существует и притяже-

¹⁾ Магнитный момент в данном случае имеет классическую природу: электрон, вращающийся по орбите, создает токовый лепесток, который ведет себя как микроскопический магнитик. Квантовые законы проявляются в том, что проекция момента количества движения равна целому числу постоянных Планка.

ние и отталкивание; природа этих сил различна, но обе силы электростатического происхождения, магнитное взаимодействие между частицами очень мало (одна из ролей $1/137$ -й!). Есть расстояние — оно того же порядка, что размер атома, — на котором достигается равновесие между отталкиванием и притяжением — суммарная сила равна нулю. Так строятся молекулы... И при этом оказывается, что некоторые (например, молекулы водорода) имеют нулевой магнитный момент, а некоторые — отличный от нуля (молекулы кислорода, например). От чего это зависит? Правильный, но недостаточно конкретный ответ таков: осуществляется то состояние, которое энергетически выгодно. Другими словами: если парамагнитное состояние обладает меньшей энергией, то молекула парамагнитна; если диамагнитное состояние имеет меньшую энергию — диамагнитна. Это-то так, конечно. Но почему энергия молекулы вообще зависит от ее магнитного момента, даже тогда, когда молекула находится вне магнитного поля?

Напрашивается такой ответ: все же каждый электрон — магнитик. Энергия взаимодействия магнитов зависит от их относительной ориентации (одноименные полюсы отталкиваются, разноименные полюсы притягиваются). Поэтому, построив из атомов молекулу, т. е. зная движение электронов в пространстве, надо вычислить энергию одной конфигурации — магнитные моменты параллельны — и сравнить с энергией другой конфигурации — магнитные моменты антипараллельны (если электронов два, как в молекуле водорода). Все правильно, однако так не удастся объяснить экспериментальные факты. Различие энергий парамагнитной и диамагнитной конфигураций — фактически порядка энергий электростатического взаимодействия электронов, находящихся на атомных расстояниях друг от друга, а эта энергия, конечно, не зависит от того, куда направлены магнитные стрелки, а магнитная энергия в десятки тысяч раз меньше электростатической. Так что объяснение «не проходит».

Правильное объяснение значительно сложнее. Последовательное квантовомеханическое рассмотрение показывает, что состояние электронов зависит не только от характера их движения в электрическом поле

ядер, но и от относительного положения спинов, даже если пренебречь непосредственным магнитным взаимодействием. Это явление получило название *обменного взаимодействия*, а ту часть энергии электронов, которая зависит от относительного расположения спинов, называют *обменной энергией*. В молекуле водорода обменная энергия парамагнитного состояния больше обменной энергии диамагнитного состояния. Молекула водорода диамагнитна. А у кислорода энергетически выгодно (опять-таки из-за обменной энергии) парамагнитное состояние...

Природу обменного взаимодействия трудно объяснить достаточно популярно, так как это взаимодействие не имеет классического аналога. Его возникновение — следствие неразличимости частиц и принципа Паули — целиком обязано квантовым свойствам электронов. Рассмотрим для примера два атома. В каждом атоме по одному электрону. Анализ состояния электронов показывает: нельзя утверждать, что один электрон находится в первом атоме, а другой — во втором. Оба электрона все время как бы меняются местами, как бы перепрыгивают из одного атома в другой (неразличимость). С их скачками связана определенная энергия (*обменная энергия*), которая существенно зависит от расположения их спинов (параллельны или антипараллельны). Отбор разрешенных состояний происходит в согласии с принципом Паули. В некоторых случаях обменная энергия при параллельном расположении спинов больше, чем при антипараллельном, а в других — наоборот.

Обменные силы очень быстро спадают с расстоянием: электрону издалека трудно «допрыгнуть» до соседнего атома. Важно еще раз подчеркнуть, что обменные силы не связаны с обычным взаимодействием спиновых магнитных моментов, которое, как мы говорили, очень мало. Отметим важное свойство обменной энергии. Так как обменная энергия зависит от *относительного* расположения спинов электронов, то она безразлична к тому, куда направлен магнитный момент молекулы, если на нее не действует магнитное поле.

Мы продвинулись на одну ступень в понимании магнитных свойств. В природе существуют атомы и

молекулы, обладающие магнитным моментом. Энергии, которые ответственны за существование магнитных моментов, велики. Они определяются электростатическим взаимодействием между зарядами.

ПАРАМАГНЕТИКИ, ФЕРРОМАГНЕТИКИ

Итак, нам известен строительный материал, из которого сложены магнитные тела. Это — атомы или молекулы с магнитными моментами, отличными от нуля.

Физическая причина, приводящая к конденсации атомов и молекул в твердое тело, в кристалл, та же, что и при образовании молекул из атомов. Мы не будем на этом останавливаться. Задумаемся только, играет ли какую-нибудь роль в этом процессе то, что интересующие нас молекулы парамагнитны — обладают (каждая) магнитным моментом? Если быть скрупулезно точным, то играет. Обменная энергия не мала, и поэтому ее вклад в энергию связи кристалла заметен. Однако обменная энергия все же существенно меньше, чем энергия связи, и поэтому вначале мы можем о ней попросту не думать: считать, что магнитные моменты не взаимодействуют друг с другом (мы очень скоро откажемся от этого предположения). Поэтому парамагнетик (вещество, которое получилось после конденсации парамагнитных молекул или атомов) следует себе представить так. Это — правильно расположенные, но свободно блятающиеся, незакрепленные магнитные стрелки. Они направлены во все стороны. Правда, согласно квантовой механике не все направления «разрешены», но если «данное» направление разрешено, то разрешено и обратное. Поэтому суммарный магнитный момент равен нулю.

Есть простой способ «призвать магнитные моменты к порядку». Поместим парамагнетик в магнитное поле. Энергия взаимодействия магнитного момента $\vec{\mu}$ с магнитным полем \vec{H} равна $-\vec{\mu}\vec{H}$. Если магнитный момент может только двумя способами ориентироваться относительно поля (так обстоит дело у электрона), то выигрыш энергии (разность между энергией параллельного и антипараллельного поля состояний) равен $2\mu H$. Полному упорядочению магнитных моментов

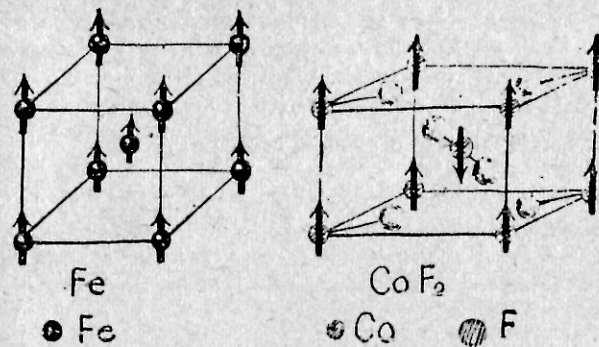


Рис. 37.

вдоль поля препятствует тепловое движение. Поэтому величину $2\mu H$ надо прежде всего сравнить с температурой в ее энергетическом выражении, т. е. с $k_B T$. Так как $\mu \approx 10^{-20}$ эрг/Гс, то мы видим, что равенство $2\mu H = k_B T$ возможно либо при сверхнизкой температуре, либо при грандиозных магнитных полях (если $T = 1$ К, то H , при котором $2\mu H = k_B T$, приблизительно равно 10 000 Гс). При обычных¹⁾ и высоких температурах величина $2\mu H$ значительно меньше $k_B T$. Из-за этого магнитное поле лишь незначительно упорядочивает магнитные моменты.

Однако существует внутренняя причина, выстраивающая магнитные моменты, — обменное взаимодействие, о котором мы столь подробно говорили выше.

Обменное взаимодействие может выстроить магнитные моменты параллельно друг другу либо антипараллельно. В первом случае «получается» ферромагнетик, а во втором — антиферромагнетик²⁾. Это схематически изображено на рис. 37.

¹⁾ К слову «обычный» надо относиться осторожно. Что сегодня следует считать обычным? Во многих лабораториях обычные температуры ниже 1 К и магнитные поля с напряженностью более 100 000 Э.

²⁾ В природе много тел (их называют ферромагнетиками), которые в этой классификации занимают промежуточное положение. Магнитные моменты направлены в разные стороны. Но число «левых» и «правых» не совпадает.

Если сравнивать упорядочивающее действие обменных сил с действием магнитного поля, то придется признать, что на атомные магниты действует огромное магнитное поле — в десятки миллионов эрстед.

Отложим разговор об антиферромагнетиках до специального раздела, а сначала поговорим о веществах, в которых магнитные моменты в кристалле взаимодействуют друг с другом так, что им энергетически «выгодно» выстроиться параллельно друг другу, а тепловое движение препятствует этому выстраиванию. Пока температура высока, тепловое движение столь активно, что в положении магнитных моментов нет никакого порядка (суммарный магнитный момент равен нулю). Однако при некоторой температуре (ее называют температурой Кюри, и мы обозначаем ее θ_c) взаимодействие начинает сказываться весьма существенно: появляется отличный от нуля магнитный момент тела. Магнитные моменты самопроизвольно (не под воздействием внешнего магнитного поля, а благодаря внутренним причинам) выстраиваются¹⁾. Чем ниже температура, тем самопроизвольный (спонтанный, как принято говорить) момент больше. Состояние тела при температуре ниже температуры Кюри θ_c называется *ферромагнитным*, а сами тела — *ферромагнетиками*. При абсолютном нуле температуры все магнитные моменты смотрят в одну сторону (полный порядок). Магнитный момент единицы объема, при этом равен числу магнетиков в единице объема N , умноженному на μ . Типичные представители ферромагнетиков: железо Fe, от него и появилось название «ферромагнетик», кобальт Co и никель Ni. Их спонтанные моменты M_s при абсолютном нуле температуры таковы:

	M_s , эрг/Гс	θ_c , К
Fe	1735	1043
Co	1445	1403
Ni	509	631

¹⁾ На роль обменного взаимодействия в магнитных свойствах вещества впервые обратили внимание В. Гейзенберг и Я. И. Френкель (1928 г.).

ОТ ЧЕГО МЫ АБСТРАГИРОВАЛИСЬ. ДОМЕНЫ

В действительности все происходит совсем не так. Если охлаждать парамагнетик, не поместив его во внешнее магнитное поле, он не намагнитится даже тогда, когда температура его опустится ниже температуры Кюри θ_c . Чтобы его намагнитить, обязательно нужно поместить его во внешнее поле, лишь увеличивая которое можно добиться полного намагничивания. Кривая намагничивания (зависимость магнитного момента тела от магнитного поля) зависит и от формы образца, и от его состояния: с примесями ли он или очень чистый, имеет ли внутренние напряжения или хорошо отожжен.

Очень важным свойством магнитов для использования их в технике, в науке, в быту является способность не размагничиваться после снятия (выключения) внешнего магнитного поля, благодаря которой магниты могут служить источником магнитного поля. Магнит как бы аккумулирует магнитную энергию, которую можно использовать самым различным образом.

И хотя все эти вопросы очень важны и интересны, они весьма далеки от темы нашего рассказа... Дело вот в чем. Если бы парамагнетик был бесконечным¹⁾, то все происходило бы точно так, как мы описали в предыдущем разделе: при понижении температуры ниже точки Кюри тело приобрело бы (спонтанно!) магнитный момент, который возрастал бы с понижением температуры. Но в образце конечных размеров все осложняется конечными эффектами. Граница намагниченного тела служит источником (или стоком) магнитных силовых линий (они ведь не обрываются!). Поэтому вокруг магнита всегда имеется магнитное поле, сравнительно медленно спадающее с расстоянием. Магнитное поле содержит энергию. Таким образом, энергия ферромагнетика несколько больше, чем мы думали раньше: она включает в себя энергию магнитного поля, созданного магнитом.

Всякое тело стремится понизить свою энергию, если есть для этого возможность, конечно. У магне-

¹⁾ Моделью бесконечного магнита может служить достаточно большое кольцо (бублик), из которого не выходят магнитные силовые линии.

тика такая возможность есть. Обменная энергия (главная причина намагничивания) не зависит от того, куда направлен суммарный магнитный момент. Благодаря этому возникает следующая возможность. Магнетик разбивается на области (домены). В каждой области магнитный момент однороден, но (в простейшем случае) в соседних областях магнитные моменты направлены в противоположные стороны¹⁾. В целом тело вообще не обладает магнитным моментом, следовательно, вокруг нет магнитного поля. Точнее, есть, но только на расстояниях, близких к величине домена.

Таким образом, «с точки зрения магнитного поля» выгодно разбиение магнетика на возможно большее число областей — доменов. Правда, существование границ между доменами невыгодно, так как магнитные моменты по обе стороны границы направлены в противоположные стороны. Поэтому для уменьшения обменной энергии число границ, а значит, и доменов должно быть поменьше. Одна энергия уменьшается с увеличением числа доменов, другая — растет. При некотором промежуточном числе доменов сумма обеих энергий имеет минимум. На такое число доменов и разбивается магнетик. Расчет показывает (Л. Ландау и Е. Лифшиц, 1935 г.), что размеры домена растут пропорционально корню квадратному из размеров тела.

Существование доменов давно не является гипотезой. Они хорошо изучены и теоретически и экспериментально. Есть много способов, позволяющих видеть домены... даже невооруженным глазом.

Таким образом, появление доменов — вторичный эффект. Внутренние силы намагничивают образец, упорядочивают магнитные моменты атомов и молекул, а «желание» уменьшить энергию системы приводит к разбиению тела на домены. Это обстоятельство в дальнейшем мы будем игнорировать. Либо можно считать, что мы имеем дело с бесконечным магнетиком, либо что мы находимся в пределах одного домена. Хотя, повторяю, структура магнетиков — вопрос интересный и важный. Но ведь наша задача — понять *микроскопическую* природу магнетизма...

¹⁾ Понятие о доменах было впервые введено П. Вейссом (1907 г.).

АНТИФЕРРОМАГНЕТИКИ

В 30-х годах в Харькове группа молодых ученых под руководством Л. В. Шубникова обнаружила удивительные аномалии в поведении ряда веществ — хлоридов переходных элементов. Их теплоемкость при некоторой температуре претерпевала скачок, а магнитная восприимчивость имела при той же температуре максимум. За несколько лет до этого Л. Ландау теоретически исследовал поведение системы магнитных моментов, обменное взаимодействие между которыми таково, что им выгодно располагаться антипараллельно, и показал, что при определенной температуре θ_N (она потом получила название температуры Нееля¹⁾) в расположении магнитных моментов возникает некоторый порядок. Чем температура ниже, тем порядок больше. При абсолютном нуле температуры расположение полностью упорядочено. Но не так, как в ферромагнетике. Каждый магнитный момент окружен антипараллельными соседями (см. рис. 37). Поэтому вещества с подобным типом упорядочения получили название *антиферромагнетиков*. Вблизи температуры Нееля, согласно теории Ландау, должны были наблюдаться и наблюдались аномалии, о которых речь шла выше...

Антиферромагнетиков в природе немало. Вот несколько примеров (они взяты из работы А. С. Боровика-Романова²⁾):

Соединение	θ_N, K	Соединение	θ_N, K
NiSO ₄	37	FeO	188
FeSO ₄	21	NiF ₂	73,2
NiO	520	FeF ₂	78,3

Антиферромагнетиками бывают не только соединения. Хром, многие редкоземельные металлы — антиферромагнетики.

¹⁾ Неель — французский физик-теоретик, сыгравший выдающуюся роль в изучении антиферромагнетиков. Неель — лауреат Нобелевской премии, которую он получил за работы по магнетизму.

²⁾ Антиферромагнетизм/В сб.: Антиферромагнетизм и ферриты. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Появление магнитного порядка в ферромагнетике обнаружить легко. О нем сообщает магнитное поле, создаваемое ферромагнетиком, или (без литературных красот): спонтанный магнитный момент ферромагнетика можно измерить непосредственно. А как непосредственно обнаружить порядок в расположении магнитных моментов? Это можно сделать, исследуя рассеяние нейтронов антиферромагнетиком.

Почему нейтроны, а не привычные рентгеновские лучи или электроны, столь успешно применяющиеся для исследования кристаллов? И для рентгеновского кванта, и для электрона атом с магнитным моментом вверх и атом с магнитным моментом вниз — практически одно и то же. Они взаимодействуют только (точнее, главным образом) с зарядами в атоме. А у нейтрона заряда нет, но есть магнитный момент. Поэтому различным образом ориентированные атомы будут рассеивать различно — для нейтронов атомы с различными направлениями магнитных моментов неэквивалентны.

МАГНОНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Знать, как расположены магнитные моменты, — полдела. Для понимания свойств магнетика очень важно представлять себе, как движутся магнитные моменты.

Изучая движение магнитных моментов, нельзя рассматривать движение одного магнитного момента, необходимо учитывать его коллективный характер (мы в этом еще убедимся).

Рассмотрим свойства магнетиков вблизи 0 К. Движение почти полностью заторможено. Оно выступает в своей простейшей форме. В частности, можно не учитывать изменение величины магнитного момента атома, так как это изменение связано с существенным увеличением энергии атомных электронов, что при низкой температуре крайне маловероятно. Поэтому несколько туманное выражение «простейшая форма движения» уточняется: магнитные моменты атомов могут «вращаться» вокруг неподвижных центров... и все. Правда, глагол «вращаться» нам пришлось заключить в кавычки: трудно понимать его буквально, если момент может занимать только два положения в про-

странстве. А мы начнем именно с такого случая, выбрав для простоты рассмотрения ферромагнетик, состоящий из частиц со спином $1/2$.

Рассмотрим слабо возбужденные состояния ферромагнетика, у которого в основном, наименее состоянии (0 К) все магнитные моменты направлены в одну сторону. Возбужденные состояния ферромагнетика удобно классифицировать по величине отклонения магнитной системы от полностью упорядоченного состояния. Сделаем мысленный эксперимент. Перевернем магнитный момент одного атома и предоставим ферромагнетик «действовать самостоятельно». Из-за обменного взаимодействия состояние с перевернутым магнитным моментом невыгодно: соседние магнитные моменты будут стремиться «призвать товарища к порядку». Но... пожалуй, это одно из самых важных обстоятельств: пока мы учитываем только обменные силы, ферромагнетик не может изменить суммарную величину магнитного момента¹⁾. Поэтому стремление упорядочить соседа приводит к тому, что вместо него переворачивается другой, смежный магнитный момент. По кристаллу побежит волна переворотов магнитных моментов, или спинов. Эти волны — их существование установил Ф. Блох в 1930 г. — названы спиновыми волнами.

Анализ распространения волн переворотов спинов показывает, что между частотой спиновой волны ω и ее длиной $\lambda = 2\pi/k$ существует определенная связь — закон дисперсии, выражающий зависимость частоты от волнового вектора \vec{k} . Таким образом, состояние с одним перевернутым магнитным моментом есть волна с определенным волновым вектором \vec{k} и соответствующей ему частотой $\omega(\vec{k})$.

А теперь, как обычно, воспользуемся соотношениями Луи де Бройля и перейдем от волны к квазичастице. Ее называют *магноном*. Итак, кристалл с одним перевернутым спином — это кристалл с одним магноном.

¹⁾ Строгая формулировка сказанного в последней фразе: спин системы — интеграл движения, если действуют только электростатические силы.

Обратим внимание, что мы, говоря об одном перевернутом магнитном моменте, не можем уточнить положение этого недисциплинированного момента. Спиновая волна «затрагивает» все магнитные моменты.

При большой длине волны, т. е. при малом волновом векторе, закон дисперсии очень прост: $\omega \sim k^2$.

Коэффициент пропорциональности удобно оценить, записав не частоту спиновой волны, а энергию магнона $\varepsilon = I(ak)^2$, где a — расстояние между соседними атомами. Эта запись показывает, что постоянная I (по порядку величины, конечно) совпадает с энергией обменного взаимодействия соседних магнитных моментов¹⁾. А эта энергия численно близка температуре Кюри ферромагнетика, выраженной в энергетических единицах ($I \approx k_B \theta_c$). Таким образом, мы имеем надежный критерий для оценки наиболее существенной величины в законе дисперсии. Правда, критерий весьма приблизительный: I от $k_B \theta_c$ может отличаться в 2—3 раза.

Формулу для энергии магнона удобно переписать в другом виде, заменив волновой вектор k импульсом p и введя новую постоянную с размерностью массы:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*}, \quad m^* = \frac{\hbar^2}{2a^2 I}. \quad (79)$$

Новую постоянную m^* называют *эффективной массой*. Последнее выражение особенно отчетливо показывает, что магнон очень похож на частицу.

Если в ферромагнетике перевернуть не один магнитный момент, а больше, это означает, что по нему распространяется не одна спиновая волна, а несколько. Или на корпускулярном языке: в ферромагнитном кристалле существует несколько магнонов. При повышении температуры число магнонов возрастает, а общий магнитный момент ферромагнетика соответственно уменьшается. Пока спиновых воли (магнонов) мало, можно не учитывать взаимодействие магнонов друг с другом и, следовательно, считать магноны идеальным газом. Число частиц в нем тем больше, чем выше температура. Методы квантовой статистической

¹⁾ Если $k \approx 1/a$, то спины соседних атомов антипаралельны.

физики позволяют изучить свойства этого газа и установить, что газ магнонов подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна.

Магноны — бозоны. Химический потенциал их, конечно, равен нулю. Знание статистических свойств дает в руки метод расчета макроскопических характеристик. Так установлено, что число магнонов растет пропорционально $T^{3/2}$. Это значит, что при низких температурах спонтанный магнитный момент ферромагнетика M убывает пропорционально $T^{3/2}$ — ведь каждый магнон — это не что иное, как движущийся по ферромагнетiku один перевернутый магнитный момент:

$$M(T) = M_0 \left[1 - \beta \left(\frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \right], \quad (80)$$

$$T \ll \theta_c, \quad \beta \approx 1, \quad M_0 = N\mu.$$

Газ магнонов вносит вклад в тепловые свойства ферромагнетика. Благодаря магнонам теплоемкость при низких температурах ($T \ll \theta_c$) содержит слагаемое, также пропорциональное $\sim T^{3/2}$, т. е. опять-таки пропорциональное среднему числу магнонов. Линейную зависимость термодинамических величин от температуры в степени 3/2 часто называют «законом 3/2». Следует подчеркнуть, что при низких температурах вклад магнонов в теплоемкость больше, чем вклад фононов, так как теплоемкость газа фононов убывает с понижением температуры быстрее — пропорционально T^3 .

И фононы и магноны — бозоны, у обоих газов химический потенциал $\xi = 0$. Различие в температурной зависимости теплоемкости — следствие различия в законах дисперсии фононов и магнонов (у фононов $\varepsilon = sp$, у магнонов $\varepsilon = p^2/2m^*$).

Магноны — полноправные квазичастицы. Они переносят тепло, принимают участие в поглощении энергии звуковых колебаний, на них рассеиваются электроны в ферромагнитных металлах. Описанные здесь свойства магнонов отнюдь не гипотезы. Вклад магнонов в разнообразные свойства ферромагнетиков обнаруживается в эксперименте. В частности, температурная зависимость магнитного момента и вклад магнонов в теплоемкость нашли свое уверенное эксперименталь-

ное подтверждение. Идентифицирован вклад магнонов в механизм рассеяния электронов в металлических ферромагнетиках. Мы умеем наблюдать один магнон. Но об этом — дальше.

МАГНОНЫ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ

В антиферромагнетике при $T = 0$ К все магнитные моменты атомов тоже строго упорядочены, только порядок этот сложнее. Поворот любого магнитного момента есть нарушение, которое в виде волны бежит по кристаллу. Однако существование двух типов атомов (у одних спины по ..., а у других против...) приводит к тому, что в антиферромагнетике могут распространяться спиновые волны двух сортов — могут возникнуть два сорта магнонов. Пока мы учитываем только обменное взаимодействие между атомами, свойства этих магнонов почти неразличимы: у них совпадающие законы дисперсии, существенно отличающиеся от закона дисперсии магнонов в ферромагнетиках. Магноны в антиферромагнетике похожи на фононы. Для малых значений импульсов $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$\varepsilon_{1,2} \approx \theta_N ak, \quad ak \ll 1. \quad (81)$$

Индексы 1 и 2 подчеркивают: магнонов два сорта. Напомним: θ_N — температура Нееля, а a — расстояние между атомами. И в антиферромагнетиках магноны — бозоны.

С ростом температуры их число растет ($\xi = 0$), постепенно разрушая строгий порядок в расположении магнитных моментов. Возрастание числа магнонов с ростом температуры проявляется в тепловых и магнитных свойствах антиферромагнетиков.

Различие в законах дисперсии магнонов в ферро- и антиферромагнетиках имеет своим следствием различие температурных зависимостей. Так, магнитная часть теплоемкости антиферромагнетика пропорциональна T^3 , как у фононов, а не $T^{3/2}$, как у ферромагнетиков.

Изучение свойств магнонов антиферромагнетика показывает, что они весьма чувствительны к структуре основного состояния. Изменение в расположе-

нии магнитных моментов приводит к изменению закона дисперсии магнонов. Наиболее естественным способом воздействия на структуру магнитных моментов служит магнитное поле, которое «пытается» установить магнитные моменты вдоль себя. Поэтому исследование свойств магнетиков в достаточно сильных магнитных полях — один из методов изучения свойств магнонов.

МАГНОНЫ С НЕСКОЛЬКО ДРУГОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Теперь, когда мы поняли микроскопическую природу спиновой волны как волны переворотов спинов, можно попытаться описать ее более упрощенно, используя макроскопические термины.

Рассмотрим однородные вращения магнитных моментов, т. е. длину спиновой волны примем равной бесконечности. Это значит, что все атомы находятся в совершенно одинаковых условиях — обменные силы как бы отключены. Если бы никакие другие силы не действовали на магнитные моменты тела, то поворот магнитных моментов не требовал бы затраты энергии. Это значит (опять «работает» соотношение Луи де Бройля), что при учете только обменных сил частота однородного вращения магнитных моментов равна нулю. Но, кроме обменных сил, есть еще силы, уже не безразличные к направлению магнитного момента. Они получили название анизотропных сил (чаще говорят об энергии анизотропии). Анизотропную силу легко представить, заменив ее фиктивным магнитным полем H_a , приложенным вдоль избранной оси ферромагнетика. Избранная ось всегда направлена вдоль одной из кристаллографических осей ферромагнетика. Спонтанно магнитный момент располагается вдоль нее. У кобальта эта ось шестого порядка гексагональной решетки, у железа — три оси вдоль ребер куба кубической решетки.

Что произойдет с магнитным моментом в магнитном поле, если его отклонить на некоторый угол? Так как на магнитный момент действует момент силы, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор магнитного поля и магнитный

момент, то магнитный момент будет вращаться вокруг магнитного поля. Частота ω его вращения вокруг поля H_a для частиц со спином $1/2$ равна $\omega = gH_a$, где $g = e/mc$ — квантовое гиромагнитное отношение (см. стр. 41).

Настоящее магнитное поле H , приложенное вдоль избранной оси, увеличивает частоту вращения, так как оно добавляется к полю анизотропии H_a , т. е. $\omega = g(H_a + H)$.

Если отклонение магнитных моментов неоднородно (скажем, мы заставим вертеться моменты на границе образца), то включаются обменные силы — по ферромагнетику побежит волна, частота которой есть сумма частот однородного и неоднородного вращения:

$$\omega = g(H_a + H) + \frac{I}{\hbar}(ak)^2. \quad (82)$$

Существование энергии анизотропии или энергии внешнего магнитного поля приводит к тому, что частота спиновой волны при $k=0$ отлична от нуля. Или на квантовом языке: магнон с импульсом, равным нулю, имеет отличную от нуля энергию — «энергию покоя», равную

$$\epsilon_0 = \hbar g(H_a + H) = 2\mu(H_a + H).$$

У обычных частиц энергия покоя равна mc^2 , где m — масса частицы, а c — скорость света. Можно вычислить массу покоя магнона $m_0 = \epsilon_0/c^2$. Эта величина баснословно мала: при $H = 10\,000$ Э (H при этом чаще всего больше H_a) $m_0 \approx 10^{-37}$ г, т. е. в 10^{10} раз меньше массы самой легкой частицы — электрона. И все же есть эксперименты, когда энергия покоя обнаруживается. Во-первых, это эксперименты по изучению высокочастотных свойств ферромагнетиков (но о них позже), а во-вторых, эксперименты, исследующие тепловые и магнитные свойства при очень низких температурах.

Если охладить ферромагнетик до ультранизких температур, тепловой энергии не хватит на рождение магнонов. Это проявится в том, что число магнонов будет экспоненциально мало — пропорционально $e^{-\epsilon_0/kT}$, и найдет свое отражение в темпера-

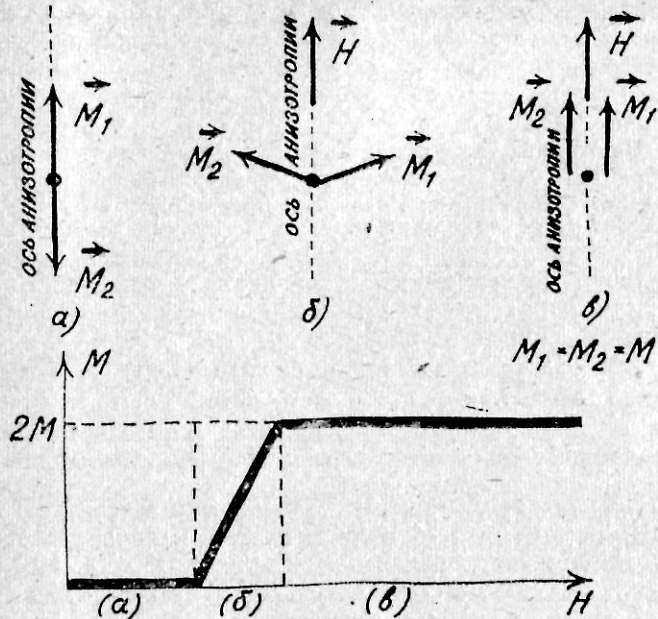


Рис. 38.

турной зависимости спонтанного момента и магнитной части теплоемкости: «закон $3/2$ » справедлив не до абсолютного нуля, он сменится экспоненциальной зависимостью от температуры. Показатель экспоненты содержит энергию покоя магнона. Можно «взвесить» частицу, масса которой в 10^{10} раз меньше массы электрона!

Теперь об антиферромагнетиках. Если магнитным моментам выгодно располагаться вдоль оси анизотропии (рис. 38), то при любом отклонении моментов от оси они вращаются. Так как моментов два, то и частот две:

$$\omega_1 = g(\sqrt{H_a H_e} + H), \quad \omega_2 = g(\sqrt{H_a H_e} - H),$$

где H_e — «обменное» поле, введенное для унификации обозначений: $\mu H_e = I$.

Каждая из частот (ω_1 и ω_2) соответствует сравнительно сложному вращению обоих моментов. Когда магнитное поле равно нулю, обе частоты совпадают и равны $\omega_{1,2} = g\sqrt{H_a H_e}$. Поле анизотропии H_a приблизительно такое же, как в ферромагнетике, а «обменное поле» H_e значительно больше поля анизотропии. Поэтому при $H \ll \sqrt{H_a H_e}$ частоты спиновых волн в антиферромагнетиках значительно больше частоты спиновой волны в ферромагнетике. Внешнее магнитное поле увеличивает одну частоту и уменьшает другую. Для одного из вращений оно — союзник энергии анизотропии, для другого — противник. Последние формулы справедливы только в случае, если $H < \sqrt{H_a H_e}$. При $H \approx \sqrt{H_a H_e}$ магнитная система, изображенная на рис. 38, делается неустойчивой и перестраивается. Что получится после перестройки, изображено на рис. 38, б. Дальнейшее увеличение магнитного поля прижимает магнитные моменты к оси. Наконец, при магнитном поле, равном H_e , магнитные моменты схлопываются (рис. 38, в). Правда, величина поля схлопывания очень велика: энергия μH при этом приблизительно равна обменной энергии $I \approx k_B \theta_N$, т. е. увидеть схлопывание можно только у тех антиферромагнетиков, у которых низка температура Нееля. Перестройка магнитной структуры отчетливо проявляется в зависимости суммарного магнитного момента антиферромагнетика (его намагниченности) от магнитного поля, изображенной на тех же рисунках.

Из-за сравнительно большой частоты однородного вращения экспоненциальная зависимость магнетонных частей термодинамических величин антиферромагнетиков наблюдается при больших температурах. Масса покоя магнетонов антиферромагнетиков больше массы покоя магнетонов ферромагнетиков.

Сказанное относится только к тем антиферромагнетикам, магнитным моментам которых выгодно располагаться вдоль оси. Есть и другие (их даже больше, чем тех, о которых мы рассказали сначала), в них магнитным моментам выгодно располагаться в плоскости, перпендикулярной оси (см. рис. 39). Как ориентированы магнитные моменты в плоскости

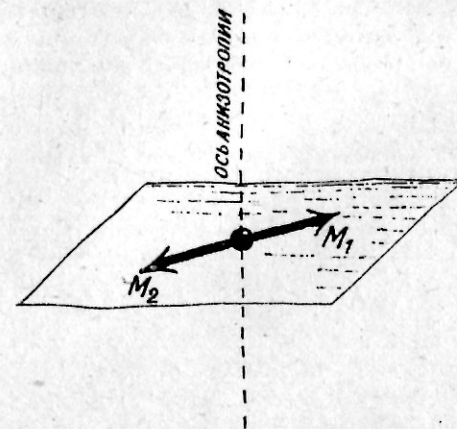


Рис. 39.

— безразлично. Или, другими словами, поворот системы магнитных моментов вокруг оси анизотропии не требует затраты энергии. Как следствие, одна из частот вращения магнитных моментов равна нулю. Другая частота примерно такая же, как и у тех антиферромагнетиков, у которых магнитные моменты параллельны оси.

Мы описали только частоты однородных вращений. Если частоту однородных вращений умножить на постоянную Планка, получится энергия покоя магнона. Неоднородным вращением (с волновым вектором, отличным от нуля, или длиной волны, отличной от бесконечности) соответствуют движущиеся магны, но о них мы уже достаточно рассказали.

Резюмируем сказанное в этом разделе: магны с очень малым импульсом — это волны вращений магнитных моментов; магны с нулевым импульсом — однородное (софазное) вращение всех магнитных моментов ферро- или антиферромагнетиков.

РЕЗОНАНСЫ

Магнитные моменты ферромагнетика можно искусственно заставить вращаться. Для этого ферромагнетик надо поместить во вращающееся магнитное

поле. Если частота вращения магнитного поля отличается от собственной частоты вращения магнитных моментов, магнитное поле будет то ускорять магнитные моменты (передать им энергию), то тормозить (забирать у них энергию). В среднем магнитные моменты вовсе не воспримут энергии вращающегося магнитного поля, и эксперимент, поставленный с целью измерить поглощенную ферромагнетиком энергию переменного магнитного поля, ничего не покажет. Но если частота переменного магнитного поля совпадает с собственной частотой вращения магнитных моментов, наступает *резонанс* и энергия магнитного поля поглощается.

Этот резонанс называют *ферромагнитным резонансом*. Ферромагнитный резонанс был открыт Дж. Гриффитсом в 1946 г. Частота, при которой наблюдается ферромагнитный резонанс, существенно зависит от энергии анизотропии и от величины приложенного магнитного поля. Для понимания порядков величин отметим: магнитному полю H в $10\,000$ Э по формуле $\omega = gH$ соответствует частота $\omega \approx 10^{11}$ с⁻¹ или длина волны $\lambda \approx 6$ мм.

Ферромагнитный резонанс допускает естественную квантовомеханическую трактовку: фотон с импульсом $p = \hbar\omega/c$ (где ω — частота электромагнитной волны) превращается в магнон, энергия которого ε — функция p .

Превращение может произойти, если выполнены законы сохранения энергии и импульса. Их выполнение легко проанализировать на рис. 40, где отложены зависимости энергии фотона и магнона от импульса. Пересечение происходит при том значении импульса, при котором возможно резонансное превращение фотона в магнон. Надо только учесть, что нам пришлось несколько исказить рисунок: скорость света так велика, что прямая, изображающая зависимость энергии фотона от импульса, должна практически совпадать с осью ординат. А это значит: при превращении фотона в магнон «рождается» магнон с почти нулевым импульсом. Другими словами, ферромагнитный резонанс дает возможность непосредственного измерения энергии покоя магнона («взвешивание» его массы покоя).

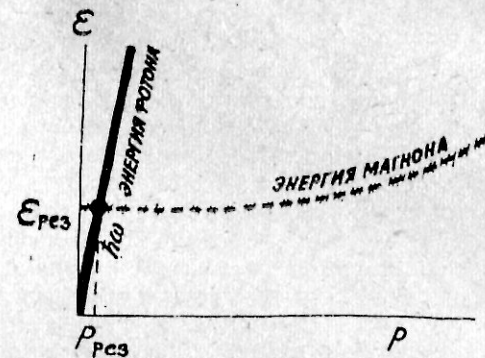


Рис. 40

Мы нарочно несколько упростили рассказ. В действительности информация, извлекаемая из экспериментов по ферромагнитному резонансу, не ограничивается определением частоты однородных вращений. Поглощенная ферромагнетиком энергия отлична от нуля не только при строгом резонансе, но и вблизи резонансного значения магнитного поля. Причина этого состоит в следующем. Вращение магнитного момента не может продолжаться бесконечно (на квантовом языке: магнон не живет вечно). Всегда есть процессы, приводящие к замедлению вращения магнитного момента. Мы о них не говорили в предыдущем разделе, так как время замедления τ , как правило, значительно больше периода вращения момента. Согласно принципу неопределенности время жизни в данном состоянии τ и неопределенность энергии этого состояния $\Delta\varepsilon$ связаны друг с другом:

$$\Delta\varepsilon \geq \hbar/\tau. \quad (83)$$

Это означает, что энергия магнона определена с точностью, не большей $\Delta\varepsilon = \hbar/\tau$. Поэтому на рис. 40 линия $\varepsilon = \varepsilon(p)$ размыта на ширину $\Delta\varepsilon = \hbar/\tau$. Ясно, что неопределенность энергии приводит к возможности превращения «фотон — магнон» в некотором интервале значений параметров. И другой вывод: последняя формула резонансной кривой (зависимость поглощенной

мощности от магнитного поля), можно узнать о процессах, ограничивающих время жизни магнона. А это весьма интересно, так как открывает глаза на взаимодействия магнона с себе подобными и с квазичастицами другой «породы» — с фононами, например. К сожалению, мы не имеем возможности остановиться на этом подробнее.

Ферромагнитный резонанс — метод определения энергии покоя магнона. А можно ли непосредственно исследовать свойства *отдельного* подвижного магнона? Мы нарочно подчеркиваем, что речь идет об изучении *отдельного* магнона. Коллектив магнонов доступен экспериментальному изучению (мы уже об этом говорили), однако, конечно, выводы становятся убедительней, если удастся «изолировать» объект исследования и иметь дело с одним подопытным. Природа предоставила нам такие возможности.

Рассмотрим некоторые из них.

Сначала мы займемся почти покоящимися магнонами, магнонами с очень малым импульсом, т. е. спиновыми волнами с большой длиной волны.

Напомним, что фотон превращается в покоящийся, а не в движущийся магнон из-за того, что у фотона огромная скорость (см. рис. 40). А если заставить превращаться в магнон квант звука — фонон? Скорость звука в 100 тысяч раз меньше скорости света. Анализ законов сохранения показывает: действительно, при *ферроакустическом резонансе* (такое название получило превращение фонона в магнон) образуется магнон с конечным импульсом. Ферроакустический резонанс был предсказан А. И. Ахизером, В. Г. Барьяхтаром и С. В. Пелетминским в 1956 г. и стал одним из эффективных методов исследования магнетиков. Рассмотрение ферроакустического резонанса подсказывает еще одну возможность изучения магнонов с конечным импульсом. Чтобы легче понять идею метода, опишем акт рождения магнона фононом на «волновом языке»: звуковая волна превратилась в спиновую волну той же длины. Длина радиоволн, даже ультракоротких, используемых в опытах по ферромагнитному резонансу, очень велика по атомным масштабам. Поэтому при ферромагнитном резонансе возбуждается

бесконечно длинная спиновая волна (точнее, такая длинная, что мы можем считать ее бесконечной). А нельзя ли сжать электромагнитную волну, укоротить ее? В оптически плотной среде с показателем преломления \mathcal{N} длина волны света в \mathcal{N} раз меньше, чем в вакууме. Но \mathcal{N} в лучшем случае равно нескольким единицам. И свет, и радиоволны — электромагнитные колебания. Поэтому надеяться на такое сжатие за счет показателя преломления особенно не приходится. Исключение составляют металлы. В металлы электромагнитные волны вообще почти не проникают, а та незначительная часть, которая проникает, затухает на очень малом расстоянии. Это расстояние (его называют глубиной скин-слоя) для длин волн порядка 1 см приблизительно равно 10^{-5} см, т. е. электромагнитное поле в металле существенно изменяется на расстояниях, в 100 тысяч раз меньше, чем длина волны этого поля в вакууме. Если бы мы захотели представить электромагнитное поле в виде совокупности плоских волн, то убедились бы, что главный вклад дают волны с длиной $\approx 10^{-5}$ см, в то время как на поверхность металла падает волна длиной 1 см. Другими словами, металл совершает огромное сжатие электромагнитных волн, правда, несколько «размывая» их: вместо одной плоской волны возникает пакет — совокупность волн, сложение которых создает затухающее в глубину металла поле.

Сжатие электромагнитной волны металлом позволяет использовать исследования высокочастотных свойств металлических ферромагнетиков для изучения подвижных магнонов. Для этого надо измерить зависимость от частоты и от внешнего магнитного поля коэффициента отражения электромагнитной волны. Конечно, измерения надо проводить в условиях, близких к условию ферромагнитного резонанса. То обстоятельство, что электромагнитная волна возбуждает спиновую волну, а не однородное вращение магнитных моментов, проявляется в величине коэффициента отражения и дает возможность определить свойства подвижного магнона. Впервые подобные эксперименты были проведены американскими физиками В. Аментом и Г. Радо в 1955 г.

Мы до сих пор не рассказали о, казалось бы, самой естественной возможности исследования спиновых волн конечной длины — резонансном возбуждении стоячих спиновых волн. Действительно, для спиновой волны ферромагнитный образец — это резонатор, отражение от стенок которого должно приводить к образованию стоячих волн. Чтобы интерференционная картина была заметна, пленку нужно брать потоньше. Подходят весьма тонкие ферромагнитные пленки, толщиной примерно $10^{-6} \div 10^{-5}$ см. Конечно, трудно сделать хорошие пленки толщиной в несколько сотен атомных слоев. Однако такой эксперимент был осуществлен. Он заключается в исследовании резонансного поглощения энергии переменного магнитного поля тонкой ферромагнитной пленкой. Вместо одного пика, соответствующего возбуждению однородного вращения магнитных моментов, наблюдается несколько пиков, расстояние между которыми позволяет измерить величину, непосредственно связанную с обменным взаимодействием соседних атомов.

Итак, мы видим, что существует несколько методов исследования длинноволновых спиновых волн. Каждый из них обладает своими достоинствами. Все они обогащают физиков многочисленными сведениями, позволяющими глубже проникнуть в природу магнитного состояния. И всем этим методам присущ общий недостаток. С их помощью нельзя (или необычайно трудно) исследовать спиновые волны, длина которых порядка межатомных расстояний (о таких спиновых волнах заведомо лучше говорить как о квазичастицах — магнонах). А ведь тепловые и магнитные свойства магнетиков определяются всеми магнонами. Наши знания будут неполны, если мы ограничимся почти неподвижными магнонами. Добраться до магнонов с большими импульсами нам помогает исследование неупругого рассеяния нейтронов.

Принципиальные основы восстановления закона дисперсии магнонов по неупругому рассеянию нейтронов магнонами те же, что и в случае рассеяния фононами. Мы их описали в главе второй.

Однородное вращение магнитных моментов, как мы знаем, возможно не только в ферромагнетиках,

о которых речь шла в этом разделе, но и в антиферромагнетиках. Значит, возможно и резонансное поглощение энергии переменного магнитного поля. Особенно убедительно это утверждение звучит, если сформулировать его на квантовом языке: фотон при взаимодействии с антиферромагнетиком может превратиться в магнон. Физическая природа антиферромагнитного резонанса, по существу, не отличается от природы ферромагнитного резонанса. Поэтому нет необходимости повторять сказанное. Интересно, однако, подчеркнуть различия, обусловленные антиферромагнитным упорядочением магнитных моментов.

Спектр антиферромагнетика сложнее, чем спектр ферромагнетика. У большинства антиферромагнетиков энергия покоящегося магнона значительно больше энергии покоящегося магнона ферромагнетика. Для антиферромагнетика резонанс либо находится в недоступной или труднодоступной области частот, либо надо использовать огромные магнитные поля, так как одна из частот неоднородного вращения уменьшается с ростом внешнего магнитного поля. И наконец, магнитная структура антиферромагнетика перестраивается под воздействием магнитного поля (мы об этом уже говорили), а это приводит к перестройке магнитного спектра, что, естественно, проявляется в антиферромагнитном резонансе.

Антиферромагнитный резонанс впервые наблюдался группой голландских физиков в 1951 г. и после этого стал одним из распространенных методов исследования антиферромагнетиков.

* * *

Мы начали с выяснения природы магнетизма, и логика рассказа привела нас к описанию высокочастотных свойств магнетиков. Это не случайно. Исследование высокочастотных свойств — один из наиболее эффективных методов выяснения энергетической структуры.

По необходимости мы ограничились свой рассказ самыми простыми, наглядными явлениями и свойствами магнетиков. Их высокочастотным свойствам посвящены объемистые монографии; буквально каждый день на эту тему появляются десятки статей,

часто устраиваются международные конференции и узкие семинары. Многие открытия переданы в технику, освоены ею и «спокойно работают» в радиоприемниках и в радиолокаторах, в вычислительных машинах и в разнообразных релейных устройствах. Одновременно развиваются наши представления о природе магнетизма различных твердых тел. Открываются прелюбопытнейшие особенности. Например, сравнительно недавно было выяснено, что структура основного состояния большого числа магнетиков, сложнее, чем мы думали. Есть кристаллы, у которых магнитным моментам энергетически выгодно расположиться почти антипараллельно. Это — почти антиферромагнетики. В основном состоянии у них есть магнитный момент (даже в отсутствие магнитного поля!), но он очень мал — во много раз меньше, чем у настоящих ферромагнетиков. Явление, открытое А. Боровиком-Романовым, получило название *слабого ферромагнетизма* и нашло свое объяснение в работах И. Дзялошинского (1957 г.). У других кристаллов структура основного состояния особенно вычурная: магнитные моменты соседних ячеек несколько повернуты друг относительно друга так, что образуется спираль, шаг которой не кратен размерам кристаллической ячейки. Выясняется, что в формировании магнитной спирали в металлах важную роль играют электроны проводимости.

Глубокое проникновение в природу магнетизма ни в коей мере не означает решения всех вопросов. Кто-то сравнивал развитие науки с военным наступлением. Как правило, в тылу остаются очаги сопротивления. Но, в отличие от военных действий, мы никогда не знаем, не станет ли в самое ближайшее время оставленный в тылу очаг сопротивления новым фронтом. Наука не имеет средств разведки для выяснения этого. Новое открытие, новая теория могут совершенно перераспределить силы.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ФРАЗЫ

Познакомиться со страной из окна автобуса, останавливаясь в придорожных гостиницах и бегом осматривая разрекламированные туристские достопримечательности, конечно, нельзя, но, если нет другого выхода, приходится ограничиваться туристской поездкой. Вы проехали по нескольким районам огромной страны. Если она вам понравилась, если вы почувствовали, что образ жизни в ней вас не раздражает, и районы, оказавшиеся на вашем пути, понравились, а только упомянутые в путеводителе привлекают, то автор-гид будет считать свою миссию выполненной.

Популярная книга всегда напоминает рекламное описание: скучные подробности скрыты, трудности не выпячиваются. Думаю, все читатели понимают, что прочитанный рассказ о квантовой физике твердого тела — фасад науки, что методы теоретической физики не ограничиваются более или менее убедительными аналогиями и оценками. Теоретическая физика — строгая наука, требующая тонких физических соображений и кропотливых, иногда очень трудных, математических расчетов. Получить новые результаты можно, только овладев всем арсеналом средств, методов и представлений современной физической теории. И, как в любой сфере человеческой деятельности, оказывается, что источником результатов служит труд, к счастью приносящий радость не только своими результатами, но и непосредственно в процессе решения еще не решенных задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ</i> о языках науки	3
<i>ГЛАВА 1</i> о физике вообще и о квантовой механике в частности	7
<i>ВВЕДЕНИЕ</i> о физике твердого тела к четырём главам и приложению	64
<i>ГЛАВА 2</i> о фононах	76
<i>ПРИЛОЖЕНИЕ</i> о двух статистиках между двумя главами	104
<i>ГЛАВА 3</i> об электронах	121
<i>ГЛАВА 4</i> об электронах и фононах	139
<i>ГЛАВА 5</i> о магнонах	163
<i>ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ФРАЗЫ</i>	191