

УДК 539.1.03, 539.12.04

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ СИЛЬНОТОЧНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

С. Н. Сытова

*Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета,
ул. Бобруйская 11, 220006, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. В статье рассматриваются физические процессы, лежащие в основе функционирования вакуумных электронных приборов, а именно – нелинейные процессы излучения сильноточных пучков заряженных частиц при прохождении пространственно-периодических структур (резонаторов) и взаимодействии с электромагнитным полем. Рассмотрены принципы работы ламп бегущей волны, ламп обратной волны, многоволновых черенковских генераторов, лазеров и мазеров на свободных электронах, других приборов. Указанные устройства работают в широком диапазоне спектра от микроволнового до рентгеновского, имеют высокие к.п.д., позволяют получать большие мощности излучения в узких спектральных диапазонах. Повышение производительности и надежности таких устройств основано на совершенствовании сложных электромагнитных структур, составляющих резонаторы. В статье продемонстрировано разнообразие электронных вакуумных устройств с очевидной общностью используемых в них физических принципов. Рассмотрена нелинейная хаотическая динамика их функционирования. Особое внимание уделено принципам работы объемных лазеров на свободных электронах, а также их отличию от других приборов.

Ключевые слова: нелинейная динамика, сильноточные электронные пучки, вакуумные электронные приборы, объемные лазеры на свободных электронах

Сытова Светлана Николаевна – заведующий лабораторией аналитических исследований НИИ ЯП БГУ

sytova@inp.bsu.by

+375172424739, +375295576442

NONLINEAR DYNAMICS OF RADIATION OF HIGH-CURRENT BEAMS OF CHARGED PARTICLES IN SPATIALLY PERIODIC STRUCTURES

S.N.Sytova

*Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University
Bobruiskaya str.11, 220006, Minsk, Belarus*

Annotation. Paper provides a review of physical processes underlying the functioning of vacuum electronic devices, namely, nonlinear processes of radiation of high-current beams of charged particles during their passage through spatially periodic structures (resonators) and their interaction with an electromagnetic field. Principles of functioning of travelling wave tubes, backward wave tubes, multi-wave Cherenkov generators, free electron lasers and free electron masers, volume free electron lasers are considered. These devices operate in a wide spectrum range from microwave to X-ray, have high efficiency, and allow obtaining high radiation powers in narrow spectral ranges. Increase the performance and reliability of electronic vacuum devices is based on improving the complex electromagnetic structures in resonators. The article demonstrates a variety of such devices with an obvious generality of physical principles used in them. Nonlinear chaotic dynamics of their functioning is considered. Particular attention is paid to consideration of principles of operation of volume free electron lasers as well as their difference from other devices.

Keywords: nonlinear dynamics, high-current beams of charged particles, vacuum electronic devices, volume free electron lasers

Sytova Svetlana N. is the head of the laboratory of analytical research, Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University

sytova@inp.bsu.by

+375172424739, +375295576442

Начиная с сороковых годов двадцатого века исследования в области нелинейных процессов излучения заряженных частиц при их прохождении пространственно-периодических структур (резонаторов) и взаимодействии там с электромагнитным полем ведутся в различных типах электронных вакуумных приборов (усилителей и генераторов). Такие приборы функционируют в широком диапазоне спектра от микроволнового до рентгеновского. Их производительность и надежность в настоящее время обеспечивается использованием сложных электромагнитных структур на основе новых материалов и передовых технологий. Широкое применение таких приборов в военных и коммерческих приложениях требует их надежной работы при высокой мощности, высокой эффективности и низкой стоимости [1].

В настоящее время усилители и генераторы вакуумной электроники помимо использования в системах спутниковой связи, телерадиовещании, различных микроволновых устройствах нагрева для промышленного и бытового использования широко применяются в научных исследованиях в ускорителях частиц высоких энергий, нагреве плазмы для управляемого термоядерного синтеза, а также в медицинских системах как компактные ускорители для ядерного магнитного резонанса и т. д. [1–8].

В статье продемонстрировано многообразие вакуумных электронных приборов при их очевидной общности в используемых физических принципах, а также сложной нелинейной динамики их функционирования. Теоретические и экспериментальные исследования каждого нового типа таких приборов имеют огромное значение для науки и практики.

1. Усилители и генераторы вакуумной электроники

Рассмотрим электронные вакуумные приборы, использующие в своем функционировании достаточно близкие физические принципы: лампы бегущей волны (ЛБВ) [9–12], лампы обратной волны (ЛОВ, карсинотроны и карсинотроды) [13–18], многоволновые черенковские генераторы (МВЧГ) [19–21], лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) [22–32], гиротроны и мазеры на свободных электронах (МСЭ) [33–35], оротроны [36, 37], различные варианты черенковских и смит-парселовских ЛСЭ [38–40], объемные лазеры на свободных электронах (ОЛСЭ) [41–52].

Основа функционирования таких приборов заключается в излучении электронов, сгруппированных в сгустки и взаимодействующих в резонаторе (замедляющей системе) с медленными электромагнитными волнами.

Отличие ЛБВ от ЛОВ состоит в том, что в первом случае электроны пучка взаимодействуют с «прямой» электромагнитной волной, распространяющейся в направлении движения электронов. В ЛОВ взаимодействие происходит с бегущей волной, распространяющейся в обратном по отношению к пучку направлении. Также существуют различные их комбинации, в которой формируются прямая и обратная электромагнитные волны. В качестве резонаторов в вакуумных электронных приборах помимо различных пространственно-периодических структур типа спиралей, гребенок, штыревых и щелевых систем [53–55] в настоящее время используются так называемые фотонные кристаллы [56–58]. Фактически рассматриваемые в [53–55] структуры обладают свойствами фотонных кристаллов [55, 58].

Впервые термин «фотонный кристалл» введен в работе [59] для описания свойств фотонной зонной структуры гранецентрированной кубической решетки, используемой в полупроводниковых материалах. Основным свойством фотонного кристалла является наличие высокого показателя преломления, а также тот факт, что структура должна быть объемной, не одномерной, а двумерной или трехмерной [60, 61].

В семидесятые годы прошлого века были созданы лазеры на свободных электронах [2, 3, 22–23], основной принцип работы которых также заключается в излучении электронов, движущихся, колеблющихся и излучающих под действием

внешнего электромагнитного поля. Первые экспериментальные исследования ЛСЭ [24–26] подтвердили эффективность использования релятивистского электронного пучка в качестве активной среды в отличие от обычных лазеров со связанными атомными или молекулярными состояниями. ЛСЭ может генерировать перестраиваемое когерентное излучение высокой мощности в диапазонах от рентгеновского до миллиметрового [27–30]. Среди нескольких десятков современных экспериментальных установок отметим рентгеновский SASE FEL (self-amplified spontaneous emission free electron laser) на установке TESLA Test Facility (ТТФ) в DESY (Гамбург, Германия) [26], Новосибирский ЛСЭ [27], SASE ЛСЭ установки «The Linac Coherent Light Source» (LCLS) в Лаборатории Джефферсона (Стенфорд, США) [28], Европейский рентгеновский лазер на свободных электронах XFEL [29]. Следует упомянуть недавние предложения [30, 31], позволяющие получить тераваттные мощности рентгеновских ЛСЭ. Всего в настоящее время в мире функционируют свыше пятидесяти ЛСЭ и строится 20 новых установок [32].

В последнее десятилетие появилась разновидность ЛСЭ — фотонные ЛСЭ (PFEL – Photonic FEL) [62] или лазеры на фотонных кристаллах [63], а также различные терагерцовые вакуумные электронные приборы с фотонными структурами [64–66] и нанолазеры [67]. В последних решетка резонатора состоит из массивов металлических нанопроволочек, где под воздействием фемтосекундного излучения происходит генерация электронами пучка пикосекундных импульсов.

В большей части указанных выше приборов используются ленточные или кольцевые (трубчатые) электронные пучки, взаимодействующие только с поверхностью резонатора. Последнее, в частности, связано с тем, что во всех вариантах ЛОВ, ЛБВ, оротронах, карсинотронах и др., в которых излучение возбуждается вследствие пролета электронов над плоской периодической замедляющей системой, невозможно использование широкого по двум направлениям (не ленточного или трубчатого) электронного пучка. То есть во всех этих приборах пучок должен проходить на расстоянии d от замедляющей системы:

$$d \leq \frac{\lambda}{4\pi} \beta\gamma,$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ – Лоренц-фактор пучка, v – скорость пучка, c – скорость света, λ – длина волны.

Если величины β и γ будут порядка единицы, то получается $d \sim 0.1 \lambda$. Это условие накладывает серьезные ограничения на толщину пучка, что, в свою очередь, ведет к ограничениям по мощности прибора и жестким требованиям на его фокусировку.

Как уже было отмечено выше, большая часть указанных приборов (ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ) использует одномерную геометрию распределенной обратной связи, в которой волновые векторы электромагнитных волн и вектор скорости электронного пучка расположены вдоль одной прямой. Одним из небольшого числа вакуумных электронных приборов, имеющих неодномерную геометрию, является оротрон, использующий открытый резонатор и перпендикулярно расположенную отражающую решетку [36]. В [34] рассматривается мазер на свободных электронах с двумерной распределенной обратной связью типа оротрона, а также лазеры и мазеры на свободных электронах с использованием двумерных брэгговских резонаторов. В частности, используется четырехволновая геометрия, в которой в резонаторе формируются четыре электромагнитные волны под углом 90 градусов друг к другу.

Такие приборы зачастую называются сверхразмерными [19, 33, 34], что означает существенное превышение поперечных размеров резонатора по сравнению с длиной волны. Но, поскольку во взаимодействии используется только тонкий слой кольцевого пучка, то согласно [34], основная проблема – это сложность создания эффективно работающей сверхразмерной системы на предлагаемых принципах.

Большой интерес представляют релятивистские многоволновые черенковские генераторы (МВЧГ) [19], в которых получены мощности порядка 15 ГВт в 3-х сантиметровом диапазоне длин волн с к.п.д. 50 %. Здесь кольцевой пучок возбуждает поверхностные волны в сверхразмерном цилиндрическом диафрагмированном волноводе. В системе рассматриваются прямая и обратная связанные электромагнитные волны вблизи границы полосы прозрачности, которые в результате взаимодействия с трубчатым электронным пучком возбуждают несколько мод. Диаметр волновода составляет несколько длин волн генерируемого излучения. Но поскольку пучок кольцевой и амплитуды волн экспоненциально затухают с удалением от поверхности волновода, то опять-таки возникает необходимость фокусировки пучка на достаточно близком расстоянии от его поверхности.

В настоящее время существуют также различные типы генераторов и усилителей электромагнитного излучения на основе электронных пучков, использующие различные механизмы спонтанного излучения – дифракционное излучение [68], излучение Смит-Парселла [69], черенковское излучение и другие эффекты [70].

Все вышеуказанные приборы (ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ, МВЧГ, МСЭ) обладают рядом общих принципов функционирования и достоинств, в частности, имеют хорошие к.п.д., позволяют получать большие мощности излучения в узких спектральных диапазонах и другие характеристики. Например, ЛБВ обеспечивают большую полосу пропускания с

диапазоном рабочих частот от 300 МГц до 50 ГГц. Их выходные мощности колеблются от нескольких ватт до МВт. ЛБВ составляют более 50% объема продаж всех вакуумных электронных приборов в СВЧ-диапазоне [1].

Однако рассмотренные выше устройства и приборы также имеют общие недостатки:

- 1) омические потери на металлических поверхностях резонаторов из-за протекания высокочастотных токов и угрозы пробоя волновода;
- 2) дифракционные потери на выходных отверстиях;
- 3) сложность создания сверхразмерных систем;
- 4) сложность изменения частоты для релятивистских пучков, поскольку изменение стартового напряжения (скорости частиц) в релятивистском случае большого эффекта не дает;
- 5) невозможность продвинуться в субмиллиметровую область, поскольку проявляется трудоемкость в изготовлении волноводов.

В качестве общей системы уравнений, описывающей вакуумные электронные приборы, часто используется следующая система [14, 7, 8]:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -\text{Re}[Fe^{i\theta}], \quad (2)$$

$$\theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \partial\theta/\partial\zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=L} = 0,$$

где θ описывает фазу электронов пучка, F – амплитуда электромагнитной волны. В данном случае система записана для случая взаимодействия электронного пучка со встречной (обратной) волной. Соответственно граничные условия для пучка и волны поставлены на разных границах системы ($\zeta = 0$ и $\zeta = L$), то есть (1)–(2) соответствует случаю ЛОВ.

Система (1)–(2) универсальна в том смысле, что она сохраняет свой вид после нормировки для широкого диапазона электронных устройств (ЛСЭ, ЛОВ, ЛБВ и т.д.).

В случае описания геометрии с несколькими связанными волнами, как, например, в [34], система будет содержать соответствующее количество уравнений типа (1) с дополнительными членами, описывающими связь между волнами. Уравнение (2) для динамики электронного пучка сохраняется.

2. Объемные лазеры на свободных электронах

Объемные лазеры на свободных электронах (ОЛСЭ) [41–52] позволяют преодолеть многие из указанных выше проблем. ОЛСЭ представляют собой вакуумные электронные приборы, работающие на излучении релятивистских заряженных частиц, движущихся в определенных условиях в трехмерной (двумерной) пространственно-периодической системе – естественном или искусственном (фотонном) кристалле (резонаторе).

Пусть релятивистская частица движется в пространственно-периодической среде. В этом случае физические процессы, сопровождающие ее движение, можно разделить на процессы, связанные с кулоновским рассеянием частицы на ядрах мишени (когерентное тормозное излучение и излучение при каналировании), и на излучение при движении с постоянной скоростью (переходное излучение и излучение Вавилова-Черенкова). В последнем случае в рентгеновском диапазоне возможно два типа излучения – квазичеренковское параметрическое рентгеновское излучение и излучение, образованное быстро движущимся осциллятором в среде [5, 71].

Характер преломления и поглощения фотонов в кристалле кардинально отличается от случая аморфной среды. Вследствие периодического расположения рассеивателей излучение испытывает дифракцию. Задача о генерации излучения равномерно движущейся заряженной частицей в среде с периодической диэлектрической проницаемостью рассмотрена Тер-Микаеляном [72].

Как впервые показано в [71], в отличие от резонансного излучения в условиях и с учетом динамической дифракции генерируемого излучения в кристалле возможно резкое изменение показателя преломления среды, что для рентгеновских квантов приводит к существенному изменению спектральных свойств излучения заряженных частиц. В частности, показатель преломления n может стать больше единицы, и, следовательно, станет возможным выполнение условия Вавилова-Черенкова. Периодическая структура кристалла приводит вблизи условий дифракции к изменению собственных состояний фотона и, как следствие, к возможности нового типа излучения. Этот механизм излучения был теоретически предсказан в начале 70-х годов в работах [71, 73, 74] и получил название квазичеренковского параметрического рентгеновского излучения (ПРИ).

Помимо того, что кристаллическая мишень создает возможность квазичеренковского механизма излучения, кристалл является трехмерным резонатором с объемной распределенной обратной связью (ОРОС) [41, 42], чем отличается от одномерного случая распределенной обратной связи, имеющей место в ЛОВ, ЛБВ и др. вакуумных электронных приборах. Неоднородный характер ОРОС изменяет

кардинальным образом функциональную зависимость инкремента неустойчивости и порогов генерации [41–45]. Двух- или трехмерные дифракционные решетки позволяют распределить взаимодействие по большому объему и снизить ограничения на мощность в резонаторе.

Отметим, что в [4, 53, 54] также рассматриваются двумерно- и трехмерно-периодические замедляющие системы, как и резонаторы, используемые в ОЛСЭ.

ПРИ представляет собой квазичеренковское излучение в рентгеновской области спектра вблизи брэгговских углов и брэгговских частот, определяемое условием дифракции на кристаллографических плоскостях [75]:

$$(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})^2 \approx \mathbf{k}^2, \quad (3)$$

и генерируемое при равномерном и прямолинейном движении заряженной частицы в кристалле. Здесь \mathbf{k} – волновой вектор проходящей электромагнитной волны, $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки.

Термин квазичеренковское "параметрическое рентгеновское излучение" подчеркивает физическую общность этого явления с излучением Вавилова-Черенкова и отличие его от переходного излучения, связанного с наличием раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями [6]. Помимо ПРИ в литературе используются термины "динамическое излучение", "квазичеренковское излучение", "резонансное излучение", "динамическое черенковское излучение".

ПРИ было обнаружено в 1985 г. на томском синхротроне "СИРИУС" сотрудниками НИИ ЯП БГУ и НИИ ядерной физики Томского политехнического института [76]. Далее сотрудники НИИ ЯП БГУ наблюдали ПРИ в режиме многоволновой (четырёх- и восьмиволновой) генерации [77, 78]. Большой цикл работ по исследованию свойств ПРИ проводился на микротроне МАМІ в Майнце (Германия) [79, 80].

Таким образом, с начала исследований ПРИ рассматривались объемные трехмерные геометрии, в которых векторы скорости частиц и волновые векторы электромагнитных волн в условиях динамической дифракции направлены под углами друг к другу. Именно неоднородность приводит к новым эффектам. Более того, в рентгеновском диапазоне длина излучаемой волны удовлетворяет неравенству $\lambda \ll L$, где L – характерные размеры системы. Это означает создание сверхразмерной системы при генерации ПРИ в процессе прохождения частицы через кристалл. Идеи сверхразмерности систем, работающих на квазичеренковском излучении, в дальнейшем были успешно перенесены из рентгеновской области на все частотные диапазоны.

В работах [41–45] был установлен и исследован новый закон неустойчивости электронного пучка, проходящего через пространственно-периодическую среду, который предусматривает следующую оценку на стартовый пороговый ток пучка j_{start} в точках вырождения корней дисперсионного уравнения в зависимости от числа s дополнительных волн, возникающих в ОЛСЭ благодаря дифракции:

$$j_{start} \sim \frac{1}{kL^3 k\chi_\tau L^{2s}}.$$

Здесь $k\chi_\tau L \gg 1$, $k = \omega/c$, ω – частота, L – длина резонатора, χ_τ – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки.

В других электронных приборах, рассматривавшихся выше, эта оценка выглядит следующим образом:

$$j_{start} \sim \frac{1}{kL^3}.$$

В точках вырождения корней дисперсионного уравнения групповая скорость электромагнитной волны резко уменьшается и излучение задерживается в этой области за счет переотражения на плоскостях резонатора, более эффективно взаимодействуя с электронами пучка. Таким образом, из приведенных формул видно, что при фиксированной длине резонатора L стартовый ток может быть существенно уменьшен по сравнению с обычными системами. В то же время при фиксированном стартовом токе длина резонатора также может быть существенно уменьшена.

В ОЛСЭ для различных частотных диапазонов выбираются (конструируются) резонаторы с расстояниями между плоскостями резонатора, сравнимыми с длиной волны. В такой периодической среде вблизи выполнения брэгговских условий происходит расщепление дисперсионной кривой на несколько ветвей. Для этих ветвей возможно соблюдение условий синхронизма для электронов пучка и, следовательно, возможен механизм квазичеренковского излучения.

Ни в одном из известных рассмотренных выше электронных приборов не используются принципы динамической дифракции (в понимании кристаллооптики). Напротив, широко используется отражение на границах резонатора от брэгговских зеркал (рефлекторов) (с коэффициентом связи α переотраженных волн как в [34] или как в оротроне [36]).

В [45] показано, что, изменяя фактор асимметрии дифракции, можно изменять добротность объемного резонатора. В частности, в зависимости от параметров системы (длины области взаимодействия, величины поглощения, частоты) существует

оптимальное значение фактора асимметрии, при котором потери в объемном резонаторе будут минимальны.

В ОЛСЭ могут использоваться релятивистские широкие в поперечном сечении сплошные электронные пучки. Большие поперечные размеры такого пучка позволяют распределить его мощность и мощность генерируемой волны по большому объему, тем самым снижая локальную нагрузку на отдельные элементы. Как хорошо известно, при этом возникает генерация большого количества нежелательных мод. В результате развивается деструктивная интерференция, и излучение становится некогерентным. ОРОС, формируемая в системе, позволяет выделить требуемые моды и подавить нежелательные.

Использование указанной выше закономерности легло в основу создания принципиально новых генераторов электромагнитного излучения – ОЛСЭ. Первое экспериментальное наблюдение генерации ОЛСЭ в миллиметровом диапазоне было проведено в 2001 г. [47]. Подтверждено, что с использованием ОРОС могут работать не только ОЛСЭ, но и ЛОВ, ЛБВ и др. типы электромагнитных усилителей и генераторов. В 2004 г. создана ЛОВ и ОЛСЭ с прямоугольным сеточным резонатором, работающие в сантиметровом диапазоне длин волн [48]. В дальнейшем были проведены эксперименты с круглыми сеточными и фольговыми резонаторами неоднородными пространственно-периодическими структурами, обладающими всеми свойствами фотонных кристаллов [49–51].

Рассмотрим простую математическую модель двухволнового ОЛСЭ. Пусть электронный пучок со скоростью \mathbf{u} «падает» под некоторым углом на полубесконечный трехмерный пространственно-периодический резонатор толщиной L . На рисунке изображена объемная схема двухволнового ОЛСЭ в геометрии Брэгга, в которой в системе в условиях дифракции формируются проходящая волна с волновым вектором \mathbf{k} и дифрагированная волна с $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки резонатора). Эта волна выходит через заднюю стенку резонатора. Одновременно на систему могут падать внешние электромагнитные волны.

Электроны пучка в резонаторе начинают группироваться в излучающую фазу и генерировать коллективное излучение с волновым вектором \mathbf{k} . Для того, чтобы электроны начали испускать квазичеренковское излучение, необходимо небольшое отставание фазовой скорости электромагнитной волны от скорости электронного пучка в соответствии с условием синхронизма – условием Вавилова–Черенкова:

$$\frac{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}|}{\omega} \sim \delta \ll 1, \quad (4)$$

где δ – отклонение от точного выполнения условия Вавилова-Черенкова.

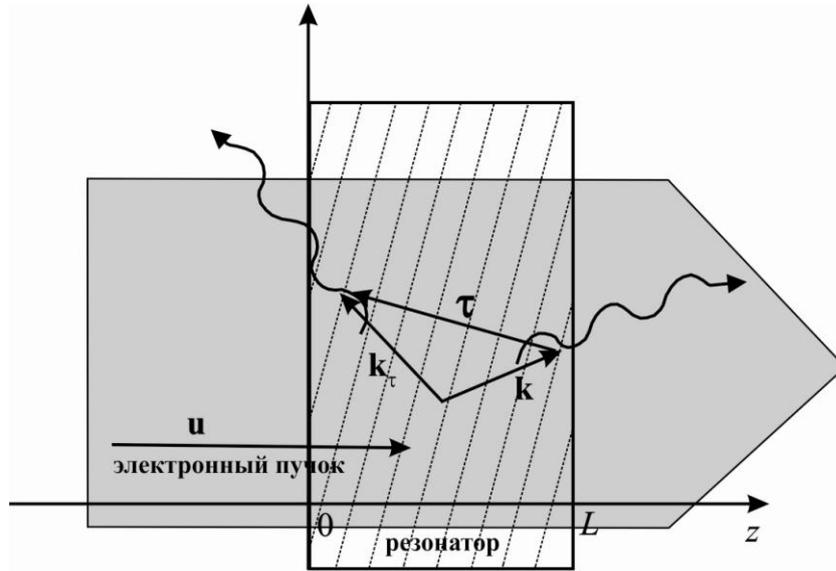


Рисунок. Объемная схема ОЛСЭ в геометрии Брэгга

Figure. Volume scheme VFEL in Bragg geometry

При одновременном выполнении условий дифракции (3) и синхронизма (4) спонтанное излучение преобразуется в коллективное квазичеренковское излучение. Система уравнений для проходящей и дифрагированной волны с амплитудами E и E_τ , а также $\theta(t, z, p)$, описывающей фазу электронов, может быть записана в обобщенном виде без уточнения коэффициентов следующим образом [81]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + a_1 \frac{\partial E}{\partial z} + b_{11}E + b_{12}E_\tau &= \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} e^{-i\theta(t,z,p)} + e^{-i\theta(t,z,-p)} dp, \\ \frac{\partial E_\tau}{\partial t} + a_2 \frac{\partial E}{\partial z} + b_{21}E + b_{22}E_\tau &= 0, \\ \frac{\partial^2 \theta(t, z, p)}{\partial z^2} &= \Psi \left(k_z - \frac{\partial \theta(t, z, p)}{\partial z} \right)^3 \operatorname{Re} E(t - z/u, z) e^{i\theta(t, z, p)}, \\ E(t, 0) = 0, \quad E_\tau(t, L) &= 0, \\ \frac{\partial \theta(t, 0, p)}{\partial z} &= k_z^0 - \omega / u, \quad \theta(t, 0, p) = p, \\ t > 0, \quad z \in [0, L], \quad p &\in [-2\pi, 2\pi]. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) динамика электронного пучка моделируется усреднением по фазам влета электронов в область взаимодействия. Этот метод [4] хорошо известен и широко применяется для расчета ЛБВ, ЛОВ, ЛСЭ и других электронных приборов [14, 7, 8]. Он также хорошо работает при моделировании динамики пучка в ОЛСЭ. Но в отличие от системы (1)–(2) (или системы (9)–(11) [34]), где электронная динамика определяется только временем влета электрона в резонатор, в (5) учтено влияние на динамику

электрона пространственной поперечной точки его влета в область взаимодействия при $z = 0$. Именно благодаря усреднению по двум фазам – моменту влета и поперечной координате влета электронов – в ОЛСЭ удалось промоделировать тонкие эффекты в области вырождения корней дисперсионного уравнения и при синхронизме нескольких мод с пучком.

Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [41–45], но он быстро сменяется нелинейной стадией. Понятно, что нелинейная стадия работы ОЛСЭ, описываемая математическими моделями типа (5), может быть рассмотрена только с использованием численных методов. Аналогичное замечание касается и всех остальных вакуумных электронных приборов.

Для моделирования ОЛСЭ разработан компьютерный код VOLC (*VOL*ume *Code*) [82]. Он всесторонне протестирован, в том числе путем сравнения численных результатов моделирования и известных аналитических решений и успешно применен для моделирования разнообразных вариантов ОЛСЭ, а также экспериментальной установки ОЛСЭ-250 [49, 81–83]. Полученные численные результаты имеют разумное согласие с теоретическими и экспериментальными физическими результатами. В результате проведенного моделирования численно получены все основные физические законы функционирования ОЛСЭ, включая пороговые условия генерации.

3. Хаотическая динамика вакуумных электронных приборов

Работы [84–86] и многие другие, посвященные исследованию нелинейной динамики рассматриваемых приборов, по праву относятся к возникшей в последние четыре десятилетия новой области науки, известной как теория динамического хаоса или нелинейная динамика [87, 88]. Исследователи в этой области занимаются изучением основных свойств решений систем нелинейных уравнений, описывающих различные физические, химические, биологические, социальные и др. процессы. Здесь самые простые детерминированные нелинейные системы могут проявлять поведение, которое является сложным и выглядит случайным. Такое поведение названо хаосом. С другой стороны, хаотическое поведение гораздо более сложных систем часто подчиняется тем же правилам, что и простых систем. Таким образом, в хаосе может быть порядок [3, 7, 8, 87, 88].

Нелинейность является необходимым, но недостаточным условием для формирования хаотического поведения системы. Основным признаком хаоса является экспоненциальная расходимость изначально близких траекторий в нелинейных

системах. Это так называемый «эффект бабочки» (чувствительность к начальным условиям) [89]. Отметим исследование проблемы синхронизации в хаотических системах и методы контроля хаоса [63, 90–92], а также параметризацию различных хаотических режимов динамической системы [93].

В процессе теоретических и экспериментальных исследований хаотической природы различных вакуумных электронных приборов [7, 8, 84–86, 94–96], включая ЛСЭ, показано, что в таких системах существуют разнообразные сценарии перехода к хаосу, в том числе удвоение периода, квазипериодичность, перемежаемость. Квазипериодичность связана с бифуркациями Хопфа, которые вводят новую частоту в систему. Перемежаемость связана с бифуркациями седловых точек, т. е. столкновением устойчивой и неустойчивой точек, которые затем исчезают, и после хаоса может появиться вновь регулярное движение.

Хаос в вакуумных электронных приборах связан с запаздывающим характером распределенной обратной связи [7, 8].

В работах [97–100] ОЛСЭ исследован методами численного моделирования с точки зрения хаотической динамики. Продемонстрировано, что ОЛСЭ является хаотической динамической системой. Источник хаоса в ОЛСЭ имеет более сложную природу по сравнению с другими рассматриваемыми приборами из-за взаимодействия электронного пучка с электромагнитным полем в резонаторе в условиях динамической дифракции и наличием ОРОС. Это приводит к неравномерному распределению интенсивности электромагнитного поля и к значительным возмущениям в движении электронов и, следовательно, к разнообразной динамике ОЛСЭ. Численно получено одно из основных физических свойств ОЛСЭ – подавление паразитных мод в системе вследствие ОРОС и динамической дифракции. Показано, что неоднородная геометрия дифракции представляет сложную картину переходов между различными хаотическими динамическими режимами и позволяет специальным выбором параметров геометрии получить большие значения амплитуд полей в ОЛСЭ по сравнению с одномерной геометрией, а также принципиально другой тип решения.

Заключение

Исследования нелинейной динамики излучения сильноточных пучков заряженных частиц в пространственно-периодических структурах, а именно – в различных типах вакуумных электронных приборов, представляет большой интерес в свете широкого применения таких приборов в различных научных, военных и

коммерческих целях. Исследование объемных лазеров на свободных электронах важно для понимания принципов их функционирования с целью проведения работ по созданию более эффективных экспериментальных установок усилителей и генераторов перестраиваемого когерентного излучения высокой мощности в диапазонах от миллиметрового до рентгеновского.

Литература

1. Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E. High Power Microwave. Boca Raton: CRC Press, 2016.
2. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах: пер. с англ. М. : Мир, 1987.
3. Freund H. P., Antonsen Jr. T. M. Principles of Free Electron Lasers. Springer, 2018.
4. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике СВЧ. М.: Сов. Радио, 1973.
5. Baryshevsky V.G. High-energy nuclear optics of polarized particles. World Scientific Publishing Company, 2012.
6. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D., Ulyanenko A. P. Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiments and Applications. Springer, 2005.
7. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
8. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
9. Kompfner R. The traveling wave tube // Wireless World LII. 1946. P. 369–372.
10. Pierce J. R. Traveling Wave Tubes // Bell Technical Journal. 1950. Vol. 29, Iss.3. P. 390–460.
11. Shiffler D., Nation J. A., Kerslick G. S. A High-Power, TWT Amplifier // IEEE Transactions on Plasma Science. 1990 . Vol. 18, №3. P. 546–552. DOI: 10.1109/27.55926.
12. Nusinovich G. S., Levush B., Abe D. K. A Review of the Development of Multiple-Beam Klystrons and TWTs. Naval Research Laboratory; NRL/MR/6840-03-8673, 2003.
13. Epsztein B. Backward flow travelling wave devices: Patent FR1035379 (A), France, published 1959-03-31.
14. Гинзбург Н.С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Известия вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, №7. С. 1037–1052. DOI: 10.1007/BF01033055.

15. Swegle J. A., Poukey J. W., Leifeste G. T. Backward wave oscillators with rippled wall resonators: Analytic theory and numerical simulation // *Physics Fluids*. 1985. Vol. 28, № 9. P. 2882–2894. DOI: 10.1063/1.865209.
16. Зайцев Н. И., Ковалев Н.Ф., Кораблев Г.С. и др. Релятивистский карсинотрон с длиной волны 3 сантиметра и длительностью импульса 0.4 микросекунды // *Письма в ЖТФ*. 1981. Т. 7, № 14. С. 879–882.
17. Солнцев В.А. Карсинотрод: Патент на изобретение №2121194RU2121194С1.Б.И. №30.27.10.98г.
18. Abe D. K., Carmel Y., Miller S. M. et al. Experimental studies of overmoded relativistic backward-wave oscillators // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1998. Vol. 26. P. 591–604. DOI: 10.1109/27.700796.
19. Бугаев С. П., Канавец В. И., Кошелев В. И. и др. Релятивистские многоволновые СВЧ-генераторы. Новосибирск: Наука. 1991.
20. Ting S., Liu Y. Particle simulation of a millimeter wave multiwave Cherenkov generator producing GigaWatt power levels // *Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 1998. Vol. 19, No. 3. P. 385–397. DOI: 10.1023/A:1022547307852.
21. Zhang J., Zhong H.-H., Luo L. A Novel Overmoded Slow-Wave High-Power Microwave (HPM) Generator // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004. Vol. 32, N. 6. P. 2236–2242. DOI: 10.1109/TPS.2004.835970.
22. Madey J. M. J. Stimulated Emission of Bremsstrahlung in a Periodic Magnetic Field // *Journal Appl. Physics*. 1971. Vol. 42. P. 1906–1913. DOI: 10.1063/1.1660466.
23. Colson W.B. Theory of a Free Electron Laser // *Physics Letters*. 1976. Vol. 59A. P. 187–190. DOI: 10.1016/0375-9601(76)90561-2.
24. Deacon D. A., Elias L.R., Madey J.M.J. et al. First operation of a Free-Electron Laser // *Phys. Rev. Lett.* 1977. Vol. 38, No.16. P. 892–894. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.892.
25. Billardon M., Elleaume P., Ortega J. M. et al. First Operation of a Storage-Ring Free-Electron Laser // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51, N 18. P. 1652–1655. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1652.
26. Andruszkow J., Aune B., Ayvazyan V. et al. First Observation of Self-Amplified Spontaneous Emission in a Free-Electron Laser at 109 nm Wavelength // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, N 18. P. 3825–3829. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3825.
27. Kulipanov G. N., Bagryanskaya E. G., Chesnokov E. N. et al. Novosibirsk Free Electron Laser Facility Description and Recent Experiments // *IEEE Trans. on Therahertz Science and Technology*. 2015. Vol. 5, No. 5. P. 798–809. DOI: 10.1109/TTHZ.2015.2453121.

28. Emma P., Akre R., Arthur J. et al. First lasing and operation of an Angstrom-wavelength free-electron laser // *Nature Photonics*. 2010. Vol. 4. P. 641–647. DOI: 10.1038/nphoton.2010.176.
29. Weise H., Decking W. Commissioning and First Lasing of the European XFEL // *Proc. 38th Int. Free Electron Laser Conf. FEL2017*. P. 9–13. DOI: 10.18429/JACoW-FEL2017-MOC03.
30. Prat E., Reiche S. Simple Method to Generate Terawatt-Attosecond X-Ray Free-Electron-Laser Pulses // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. P. 244801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.244801.
31. Emma C., Fang K., Wu J. et al. High efficiency, multiterawatt x-ray free electron lasers // *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2016. Vol. 19. P. 020705. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.19.020705.
32. Neyman P. J., Colson W. B., Gottshalk S. C. Free Electron Lasers in 2017 // *Proc. 38th Int. Free Electron Laser Conf. FEL2017*. P. 204–209. DOI: 10.18429/JACoW-FEL2017-MOP066.
33. Ботвиник И.Е., Братман В. Л., Волков А. Б. и др. Мазеры на свободных электронах // *Письма ЖЭТФ*. 1982. Т. 35, вып. 10. С. 418–420.
34. Ginzburg N.S., Zaslavsky V.Yu., Peskov N.Yu. Theory of a planar free-electron maser with transverse electromagnetic flux circulation in a 2D Bragg mirror // *Technical Physics*. 2006. Vol. 51. P.1618–1623. DOI: 10.1134/S1063784206120115.
35. Thumm M. State-of-the-Art of High Power Gyro-Devices and Free Electron Maser / M. Thumm. *KIT Scientific Reports 7735*. Karlsruhe, 2016.
36. Русин Ф. С., Богомолов Г. Д. Оротрон как генератор миллиметрового диапазона // *Электроника больших мощностей*. 1968. Вып. 5. С. 45–51.
37. Братман В.Л. Релятивистские электронные приборы миллиметрового диапазона длин волн // *Известия вузов. Радиофизика*. 2003. Т. XLVI, №10. С. 859–873. DOI: 10.1023/B:RAQE.0000026870.90994.67.
38. Owens I.J., Brownell J. H. Compact superradiant Čerenkov source // *J. Appl. Physics*. 2005. Vol. 97. P. 104915. DOI: 10.1063/1.1901840.
39. Andrews H. L., Brau C. A. Gain of a Smith-Purcell free-electron laser // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. 2004. Vol. 7. P. 070701. DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.7.070701.
40. Kalkal Y., Kumar V. Analysis of Čerenkov free-electron lasers // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. 2015. Vol. 18. P. 030707. DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.18.030707.

41. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal // *Phys. Let. A*. 1984. Vol. 102. P. 141–144. DOI: 10.1016/0375-9601(84)90799-0.
42. Барышевский В. Г., Дубовская И. Я., Феранчук И. Д. Черенковская неустойчивость пучка заряженных частиц, проходящего через трехмерную пространственно-периодическую среду // *Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. н.* 1988. № 1. С.92–97.
43. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya. Parametric (quasi-Cerenkov) X-ray free electron lasers // *J. Physics D: Appl. Physics*. 1991. Vol. 24. P. 1250–1257. DOI: 10.1088/0022-3727/24/8/005.
44. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya. Surface quasi-Cherenkov free-electron laser // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 1994. Vol. A 341. P. 274–276. DOI: 10.1016/0168-9002(94)90363-8.
45. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G. Dependence of volume FEL (VFEL) threshold conditions on undulator parameters // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2002. Vol. A 483. P. 531–533. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)00375-3.
46. Baryshevsky V. G., Gurinovich A. A. Spontaneous and induced parametric and Smith-Purcell radiation from electrons moving in a photonic crystal built from the metallic threads // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2006. Vol. B252. P. 92–101. DOI: 10.1016/j.nimb.2006.07.009.
47. Baryshevsky V. G., Batrakov K.G. Gurinovich A. A. et al. First lasing of a volume FEL (VFEL) at a length range $\lambda \sim 4-6$ mm // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2002. Vol. A483. P. 21–23. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)00279-6.
48. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Evdokimov V. A. et al. Experimental observation of radiation frequency tuning in "OLSE-10" prototype of volume free electron laser // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2006. Vol. B252. P. 86–91. DOI: 10.1016/j.nimb.2006.07.029.
49. Baryshevsky V. G., Belous N.A., Gurinovich A. A. et al. Experimental Study of Volume Free Electron Laser using a "grid" photonic crystal with variable period // *Proc. 29th Int. Free Electron Laser Conf. FEL2007*. P. 496–498.
50. Baryshevsky V., Belous N., Gurinovich A. et al. Volume free electron laser with a "grid" photonic crystal with variable period: theory and experiment // *Proc. 31st Int. Free Electron Laser Conf. FEL2009*. P. 134–137.
51. Baryshevsky V. G., Belous N. A., Gurinovich A. A. et al. Experimental studies of volume FELs with a photonic crystal made of foils // *Proc. 32st Int. Free Electron Laser Conf. FEL2010*. P. 632–636.

52. Baryshevsky V. G., Gurinovich A. A. Photonic crystal-based compact high-power vacuum electronic devices // *Phys. Rev. Acc. Beams*. 2019. Vol. 22. P. 044702. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.044702.
53. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966.
54. Силин, Р. А. Периодические волноводы. М.: Фазис, 2002.
55. Силин Р. А. Электромагнитные волны в искусственных периодических структурах // *УФН*. 2006. Т.176, №5. С.562–565. DOI: 10.3367/UFNr.0176.200605j.0562.
56. Luo C., Ibanescu M., Johnson S. G. et al. Cherenkov Radiation in Photonic Crystals // *Science*. 2003. Vol. 299. P. 368–371. DOI: 10.1126/science.1079549.
57. Cowan B. M. Three-dimensional dielectric photonic crystal structures for laser-driven acceleration // *Phys. Rev. ST Acc. Beams*. 2008. Vol. 11. P. 011301. DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.11.011301.
58. Denis T., van Dijk M. W., Lee J. H. H. et al. Coherent Cherenkov radiation and laser oscillation in a photonic crystal // *Phys. Rev. A*. 2016. Vol. 94. P. 053852-1–053852-7. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053852
59. Yablonovich E., Kmitter G. T. Photonic Band Structure: The Face-Centered-Cubic Case // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63. P. 1950–1953. DOI: PhysRevLett.63.1950.
60. Yablonovich E. Photonic crystals: semiconductors of light // *Scientific American*. 2001. Vol. 285, No. 6. P. 46–51, 54–55.
61. Yablonovich E. One-way road for light: the transmission of information from one place to another by light waves sent through waveguides is hampered by light attenuation and scattering loss. Magnetic photonic crystals could provide a solution to such problems // *Nature*. 2009. Vol. 461, no. 7265. P. 744–745. DOI: 10.1038/461744a.
62. Van der Slot P. J. M., Denis T., Lee J. H. H. et al. Photonic Free-Electron Lasers // *IEEE Photonics Journal*. 2012. Vol. 4, No. 2. P. 570–573. DOI: 10.1109/JPHOT.2012.2190724.
63. Fyath R. S., Al-mfrji A. A. Investigation of chaos synchronization in photonic crystal lasers // *Optics & Laser Technology*. 2012. Vol. 44. P. 1406–1419. DOI: 10.1016/j.optlastec.2011.12.026.
64. Letizia R., Mineo M., Paoloni C. Photonic Crystal-Structures for THz Vacuum Electron Devices // *IEEE Trans. Electron Devices*. 2015. Vol. 62, No. 1. P.178–183. DOI: 10.1109/TED.2014.2366639.
65. Lin S. Y., Fleming J. G., Hetherington D. L. et al. A three-dimensional photonic crystal operating at infrared wavelengths // *Nature*. 1998. Vol. 394. P.251–253. DOI: 10.1038/28343.

66. Hu M., Zhong R., Gong S. et al. Tunable Free-Electron-Driven Terahertz Diffraction Radiation Source // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2018. Vol. 65, No. 3. P.1151–1157. DOI: 10.1109/TED.2018.2795009.
67. Rolles D. Highly efficient nanoscale X-ray sources // *Nature Photonics*. 2018. Vol. 12. P. 62–63. DOI: 10.1038/s41566-018-0092-9.
68. Болотовский Б.М., Воскресенский Г. В. Дифракционное излучение // *УФН*. 1966. Т. 88. С. 209–251. DOI: 10.3367/UFNr.0088.196602a.0209.
69. Smith S. J., Purcell E. M. Visible light from localized surface charges moving across a grating // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 92. P. 1069. DOI: 10.1103/PhysRev.92.1069.
70. Гинзбург В.Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // *УФН*. 1996. Т. 166, № 10. С.1033–1042. DOI: 10.3367/UFNr.0166.199610b.1033.
71. Барышевский В. Г. О рассеянии света потоком электронов, проходящих через кристалл // *Докл. АН БССР*. 1971. Т. 15, № 4. С. 306–308.
72. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969.
73. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. О переходном излучении гамма-квантов в кристалле // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 61, N 3(9). С. 944–948; Поправка // *ЖЭТФ*. 1973. Т. 64, N 2. С. 760.
74. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. К квантовой теории излучения электронов в кристалле // *Докл. АН БССР*. 1974. Т. 18, N 6. С. 499–502.
75. Pinsker Z.G. *Dynamical Scattering of X-Rays in Crystals*. Springer, 1978.
76. Адищев Ю. Н., Барышевский В. Г., Воробьев С. А. и др. Экспериментальное обнаружение рентгеновского параметрического излучения // *Письма в ЖЭТФ*. 1985. Т. 41, вып. 7. С. 295–297.
77. Афанасенко В. П., Барышевский В. Г., Зуевский Р. Ф. и др. Обнаружение многоволновой генерации параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) // *Письма в ЖТФ*. 1989. Т. 15, вып. 1. С. 33–36.
78. Афанасенко В. П., Барышевский В. Г., Гациха С. В. и др. Обнаружение аномалии в угловом распределении параметрического рентгеновского излучения // *Письма в ЖЭТФ*. 1990. Т. 51. С.213–215.
79. Brenzinger K.-H., Herberg C., Limburg B. et al. Investigation of production mechanism of parametric X-ray radiation // *Zeitschrift fur Physik A*. 1997. Vol. 358, N 1. P.107–114. Doi: 10.1007/s002180050283.

80. Lauth W., Backe H., Kettig O. et al. Coherent X-rays at MAMI // *European Physics J. A.* 2006. Vol. 28. P. 185–195. DOI: 10.1140/epja/i2006-09-019-0.
81. Батраков К. Г., Сытова С. Н. Моделирование лазеров на свободных электронах // *Журнал выч. мат. и мат. физики.* 2005. Т. 45, № 4. С. 690–700.
82. Sytova S. VOLC: Volume Free Electron Laser simulation code // *Proc. 29th Int. Free Electron Laser Conf. FEL2007.* P.14–17.
83. Batrakov K., Sytova S. Dynamics of electron beam instabilities under conditions of multiwave distributed feedback // *Nonlin. Phen. Compl. Syst.* 2005. Vol. 8, No. 4. P. 359–365.
84. Billardon M. Chaotic behavior of the storage-ring free-electron laser // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A.* 1991. Vol. A304. P. 37–39. DOI: 10.1016/0168-9002(91)90816-9.
85. Bruni C., Garzella D., Orlandi G. L. et al. Chaotic nature of the super-ACO FEL // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A.* 2004. Vol. A528. P. 273–277. DOI: 10.1016/j.nima.2004.04.069.
86. Bielawski S., Bruni C., Orlandi G. L. et al. Suppression of the pulsed regimes appearing in free-electron lasers using feedback control of an unstable stationary state // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69. P. 045502. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.045502.
87. Shuster H. G. *Deterministic Chaos: An Introduction.* Vch Pub, 1998.
88. Кузнецов С. П. *Динамический хаос.* М.: Физматлит, 2001.
89. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130–141. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2).
90. Boccaletti S., Kurths J., G. Osipov G. et al. The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366. P. 1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
91. Fradkov A. L., Evans R. J. Control of chaos: Methods and applications in engineering // *Annual Reviews in Control.* 2005. Vol. 29. P. 33–56. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2005.01.001
92. Kim C.-B., Hong K.-S. Control of chaos in free-electron laser // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A.* 1998. Vol. A.403. P. 161–170. DOI: 10.1016/S0168-9002(97)01119-4.
93. Hur M. S., Lee H. J., Lee J. K. Parametrization of nonlinear and chaotic oscillations in driven beam-plasma diodes // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, iss.1. P. 936–941. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.936.
94. Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S. et al. Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // *Phys. Plasmas.* 2006. Vol. 13. P. 013104. DOI: 10.1063/1.2161170.
95. Alberti S., Ansermet J.-Ph., Avramides K. A. et al. Experimental study from linear to chaotic regimes on a terahertz-frequency gyrotron oscillator // *Phys. Plasmas.* 2012. Vol. 19. P. 123102. DOI: 10.1063/1.4769033

96. Hahn S. J., Lee J. K. Bifurcations in a short-pulse free-electron laser oscillator // *Phys. Lett. A*. 1993. Vol. 175. P. 339–343. DOI: 10.1016/0375-9601(93)90929-T.
97. Sytova S. Volume Free Electron Laser (VFEL) as a Dynamical System // *Nonlin. Phen. Compl. Syst.* 2007. Vol. 10, No 3. P. 297–302.
98. Sytova S. Comparison of One-Dimensional and Volume Distributed Feedback in Microwave Vacuum Electronic Devices // *Nonlin. Phen. Compl. Syst.* 2012. Vol. 15, No 4. P. 378–386.
99. Барышевский В. Г., Сытова С. Н. Радиационные процессы, радиационная неустойчивость и хаос в излучении, образованном релятивистскими пучками, движущимися в трехмерных (двумерных) пространственно-периодических структурах (естественных и фотонных кристаллах) // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21, № 6. С.25–48.
100. Сытова С. Н. Влияние внешних условий на хаос в объемных лазерах на свободных электронах // *Доклады НАН Беларуси*. 2014. Т.58, №1. С.47–52.